

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ  
РЕСПУБЛИКИ  
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА  
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
СТРОИТЕЛЬСТВА, ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ**

На правах рукописи

УДК 532.526

**БЕКЕТАЕВА АСЕЛЬ ОРОЗАЛИЕВНА**

**Моделирование и исследование сверхзвуковых течений с вдувом струй**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени доктора  
физико-математических наук

Научный консультант

доктор физико-математических  
наук,

профессор Найманова А.Ж.

г. Бишкек, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	7
ГЛАВА I. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА	
1.1 Состояние вопроса теоретического изучения взаимодействия сверхзвукового потока с вдувом струй.....	17
1.2 Состояние проблемы взаимодействия ударной волны с пограничным слоем.....	32
1.3 Исследование вопроса теоретического изучения взаимодействия сверхзвуковых струй в спутном потоке как системы разноскоростных сверхзвуковых параллельных потоков.....	36
1.4 Исследование проблемы моделирования турбулентности .....	40
1.5 Выводы по главе .....	68
ГЛАВА II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ	
2.1 Постановка задачи .....	72
2.2 Определение коэффициента динамической вязкости.....	76
2.3 Определение коэффициента турбулентной вязкости.....	77
2.4 Постановка начальных и граничных условий.....	81
2.5 Построение граничных условий неотражения.....	84
2.6 Построение W ENO схемы .....	89
2.7 Построения функции $H_m(x;W)$ .....	93
2.8 Метод решения исходных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса.....	100
2.9 Вычисление поля температуры.....	107
2.10 Результаты расчетов и численный анализ решения задачи	

взаимодействия ударной волны с пограничным слоем .....	109
2.11 Выводы по главе .....	123
.	
ГЛАВА III. ПЛОСКОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ В КАНАЛЕ	
3.1 Постановка задачи .....	126
3.2 Постановка начальных и граничных условий.....	127
3.3 Построение полуэмпирической формулы определения удельных теплоемкостей от значений температур в диапазоне $70K \leq T \leq 300K$	128
3.4 Тестовая задача.....	131
3.5 Численный анализ решения задачи взаимодействия плоского сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй в зависимости от режимных параметров.....	133
а) Исследование влияния параметра нерасчетности.....	135
б) Исследование влияния ширины струи.....	147
3.4 Выводы по главе .....	161
ГЛАВА IV. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ С МАЛЫМИ И БОЛЬШИМИ ПАРАМЕТРАМИ НЕРАСЧЕТНОСТИ	
4.1 Постановка задачи.....	165
4.2 Граничные условия.....	167
4.3 Метод решения исходных трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса	169
4.4 Анализ результатов численного решения задачи пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом струй.....	173
4.5 Выводы по главе.....	221

ГЛАВА V. ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ СТРУИ  
ГАЗА В СПУТНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ  
LES (Large Eddy Simulation) МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

5.1	Постановка задачи.....	224
5.2	Получение основных уравнений в LES (large eddy simulation).....	226
5.3	Постановка начальных и граничных условий.....	234
5.4	Метод решения .....	237
5.5	Результаты расчетов и их анализ.....	237
5.6	Выводы по главе.....	244
	<b>ВЫВОДЫ</b> .....	246
	<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> .....	248
	Приложение А.....	265
	Приложение Б.....	281

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$	- векторы потока,
$\vec{E}_v, \vec{F}_v, \vec{G}_v$	- диффузионные члены вектора потока,
$x$ и $y, z$	- продольная и поперечные координаты,
$u$ и $v, w$	- продольная и поперечные компоненты скорости,
$\rho$	- плотность,
$p$	- давление,
$E_t$	- полная энергия,
$\tau_{k,r}$	- тензор напряжения турбулентного трения,
$q_k$	- поток тепла,
$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	- показатель адиабаты,
$c_p, c_v$	- теплоемкость при постоянном давлении, объеме,
$M_0$ и $M_\infty$	- число Маха струи и спутного потока,
$L$	- длина рассматриваемой области,
$H$	- высота рассматриваемой области,
$H_x, H_z, H_y$	- длина, высота и ширина рассматриваемой области
$T$	- температура,
$A, B, Q$	- матрицы Якоби,
$\mu$	- коэффициент динамической вязкости
$\mu_t$	- коэффициент турбулентной вязкости,
$c$	- скорость звука,
$\Delta x$	- шаг по продольной координате,
$\Delta y, \Delta z$	- шаги по поперечным координатам,
$\Delta \xi$	- шаг по продольной координате в обобщенной системе,
$\Delta \eta, \Delta \zeta$	- шаги по поперечным координатам в обобщенной системе,
$l$	- путь смещения,

$\Omega$	- завихренность,
$n$	- степень нерасчетности,
$Re$	- число Рейнольдса,
$Sc$	- число Шмидта,
$Pr$	- число Прандтля,
$\chi$	- постоянная Кармана,
$z^+$	- универсальная переменная
$u_\tau$	- динамическая скорость,
$T_w$	- температура стенки,
$\delta$	- толщина турбулентного пограничного слоя,
$\tau, q$	- турбулентные напряжения трения и поток тепла,
$\tau_w, q_w$	- напряжение трения и поток тепла на стенке,
$k$	- коэффициент теплопроводности,
$J$	- вектор диффузионного потока,
$R^0$	- универсальная газовая постоянная,
$W_k$	- молярная масса $k$ -ой компоненты,
$c_{pk}$	- удельная теплоемкость $k$ -ой компоненты при постоянном давлении,
$X_k$	- молярная концентрация $k$ -ой компоненты,
$\Lambda$	- матрица собственных значений,
$R, R^{-1}$	- матрицы правых и левых собственных векторов,
$\vec{w}=R^{-1}\vec{v}$	- инварианты Римана,

Нижние индексы:

0	- струя,
$\infty$	- спутный поток или окружающая среда,
$i, j, k$	- номера узлов по координатам $x, y, z$ соответственно,
$t$	- турбулентное течение,

$w$  - параметры на стенке

Верхние индексы:

$n$  - номер временного слоя

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Струя, развивающаяся в поперечном потоке принадлежит к сложным пространственным течениям, которые возникают при управлении тяги ракетного двигателя с помощью газовых рулей и при вдуве газообразного горючего в сверхзвуковой поток. Струйное взаимодействие можно использовать для управления высокоскоростным летательным аппаратом, особенно в условиях сильного аэродинамического нагрева. Присутствие зон возвратных течений, турбулентности и, если течение сверхзвуковое, наличия ударных волн и волн разрежения, является огромной проблемой в изучении физики такого рода течения. В настоящий момент основные физические механизмы взаимодействия ударно-волновой структуры для течения вязких газов описаны в экспериментальных исследованиях Зубкова А.И., Щеца Д., Грубера М., Бен Якара А. и других. В работах Ченаулта С., Вити В., Хассана Е., Кавай С. и других представлено теоретическое исследование взаимодействия вдуваемой струи со сверхзвуковым потоком. Здесь численно решаются полные уравнения Навье-Стокса, где наряду с уравнениями газовой динамики решается большое количество уравнений переноса компонент смеси. При этом практически не изучены закономерности в областях отрыва, смешения, присоединения, образованных в результате взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем в зависимости от режимных параметров. Известно, что вихревая структура, возникающая в самой струе, аналогична истечению струи несжимаемой жидкости и является давно изученной, однако для течений с большими параметрами нерасчетности выявлено, что в процессе взаимодействия появляются дополнительные вихри. Таким образом, исследование течения с существенно большими нерасчетностями (отношение давление в струе к давлению в потоке) является новой и неизученной задачей. При турбулентном режиме течений на данный момент отсутствует надежная модель турбулентности, позволяющая точно производить расчеты



вышеописанных областей. На сегодняшний день численное моделирование является одним из самых мощных инструментов изучения физических процессов, происходящих в аэродинамике высоких скоростей, к которому, и относиться сверхзвуковое течение многокомпонентных турбулентных газов при наличии вдува струй. Несмотря на то, что достигнуты значительные успехи в численном моделировании сверхзвуковых течений, детальное изучение вышеупомянутых процессов с помощью вычислительных инструментов является трудной проблемой. Таким образом, построение адекватной математической модели, построение модели турбулентности и проблема ее замыкания, а также построение устойчивых численных схем высокого порядка точности и изучение механизмов сверхзвукового многокомпонентного течения в зависимости от режимных параметров потока является актуальной задачей.

**Целью настоящей работы является:** разработка математической модели и численное исследование взаимодействия сверхзвукового течения с вдувом струй на основе уравнений Навье-Стокса для совершенного газа; разработка методики решения уравнений Навье-Стокса для сверхзвукового течения турбулентного многокомпонентного газа, основанного на WENO схеме;

Для достижения цели сформулированы следующие **задачи исследования:**

разработать методику решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения многокомпонентной газовой смеси, основанную на WENO (Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes) схеме;

решить с помощью построенного алгоритма сверхзвуковое течение в канале с падающей ударной волной; выявить влияние скорости натекающего потока и толщины пограничного слоя на ударно-волновую структуру взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем на стенке;

построить численную модель и изучить проблему сверхзвукового турбулентного течения в канале с поперечным вдувом струи с нижней стенки, изучить взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем а также условия отрыва пограничного слоя в зависимости от параметра нерасчетности и ширины щели;

решить численным методом задачу пространственного сверхзвукового турбулентного течения в канале с поперечным вдувом круглых струй и выявить отличительные особенности образования вихревых структур для умеренных и больших параметров нерасчетности;

построить LES метод с использованием спектральных методов задания реальной турбулентности для расчета математической модели турбулентного течения совершенного газа с вдувом струй.

**Объектом исследования являются** сверхзвуковое турбулентное течение с вдувом струй в канале.

**Предметом исследования является** численное моделирование и исследование взаимодействия сверхзвукового турбулентного течения с вдувом струй.

**Научная новизна заключается в следующем:**

- предложена методика решения двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси, основанная на WENO схеме, позволяющая производить расчет сверхзвуковых турбулентных течений;

- установлено влияние числа Маха набегающего потока и толщины пограничного слоя на структуру взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем; определены предельные значения входного числа Маха набегающего потока, при которых возникает безотрывное течение; выявлены особенности взаимодействия при изменении толщины пограничного слоя а именно показана многоструктурная область отрыва при росте пограничного слоя;

- сформулирована математическая модель сверхзвукового плоского течения в канале с поперечным вдувом струй; численно изучены и найдены закономерности влияния степени нерасчетности на высоту вдуваемой струи а также ширины струи на образование бочкообразной структуры в самой струи; выявлено, что увеличение ширины щели приводит к уменьшению расширения струи, которое является следствием возникновения конфузора между вдуваемой струей и отрывной зоной на верхней стенке; установлено, что, помимо общеизвестной ударно-волновой картины, здесь за струей на нижней стенке появляется новая система скачков уплотнения, обусловленная взаимодействием отраженного скачка уплотнения от верхней стенки с пограничным слоем на нижней стенке;

- разработана численная модель и методика решения трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса на основе ENO схемы для задачи поперечного вдува круглой струи в сверхзвуковой поток для умеренных и больших параметров нерасчетности; детально изучен механизм образования вихревых структур как в самой струе так и в результате взаимодействия набегающего потока с вдуваемой струей, установлено, что при умеренных параметрах нерасчетности (меньших десяти), течение струи описывает известную вихревую структуру, но при нерасчетностях больших десяти выявлены новые системы вихрей и описан механизм их возникновения.

- предложена численная модель вдува турбулентной струи в спутный сверхзвуковой поток с применением LES метода и изучена структура смешения вдуваемой струи с набегающим потоком

#### **Научные положения, выносимые на защиту:**

- методика численного решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых  $k-\omega$  моделью турбулентности для сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси, основанная на WENO схеме, позволяющая при расчетах разрывных решений получать результаты без

схемных осцилляций и понижения точности решения на разрывах до первого;

- численная реализация граничных условий не отражения на выходной границе поперечного впрыска струи в сверхзвуковой поток;

- математическая модель сверхзвукового турбулентного течения многокомпонентного вязкого газа с поперечным вдувом струи с нижней стенки плоского канала; результаты численного анализа и полученные закономерности влияния режимных параметров на взаимодействие ударных волн с пограничными слоями; выявлены новые системы скачков уплотнения на нижней стенке канала;

- численная модель пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом круглых струй и результаты исследования влияния параметра нерасчетности на взаимодействие сильно-недорасширенных струй с набегающим потоком; выявленные новые вихревые структуры как в самой струе, так и в результате взаимодействия основного потока с вдуваемой струей;

- математическая и численная модель сверхзвукового вдува струи в спутный поток с использованием LES осреднения уравнений Навье-Стокса, позволяющая численно получить характеристики турбулентного течения.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы** определяется использованием фундаментальных законов сохранения количества движения, энергии, вещества и неразрывности при построении математических моделей; удовлетворительным согласием полученных результатов с известными экспериментальными и теоретическими данными.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Разработанная в диссертации математическая модель и метод решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса могут быть использованы для расчетов двумерного и трехмерного сверхзвукового турбулентного течения с поперечным вдувом струй в канале. Также

разработанная в диссертации трехмерная математическая и численная модели для решения задачи турбулентного течения сверхзвуковых струй в спутном потоке позволяют исследовать реальные трехмерные процессы неустойчивости и турбулентности. Данная работа выполнена в рамках проекта программы грантового финансирования фундаментальных исследований в области естественных наук «Решение краевых задач дозвуковых и сверхзвуковых турбулентных течений» (2012-2014 гг.). «Математическое моделирование и численное решение некоторых задач пространственных до- и сверхзвуковых турбулентных течений с вдувом струй. (2015-2017 гг.).

### **Апробация работы**

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на:

Второй международной научной конференции "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений" (Бишкек, Кыргызстан, 5-7 сентября 2013 г.); Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и математического моделирования» (Алматы, 1-5 июня 2015 г.); 2nd International Conference on Aerospace Engineering (ICOAE 2015) (St.-Petersburg, Russia, June 14-15, 2015) 6th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE 2015) (Rome, Italy, July 16-17, 2015); International Conference “Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education” (CITech–2015) (Almaty, September 24-27, 2015); International scientific conference “Science and Practice: New Discoveries” (Czech Republic, Karlovy Vary – Russia, Moscow, October 24-25, 2015);

**Публикации:** по теме диссертации опубликовано 25 печатных работ, которые приводятся в списке литературы.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения и списка использованных источников из 162 наименований. Работа изложена на 282 страницах, содержит 87 рисунков 3 таблицы.

Во введении показана актуальность, новизна, научное и практическое значение диссертационной работы, степень ее разработанности.

Первый раздел содержит в себе пять подразделов. В первом, отражен краткий обзор существующих на данный момент работ, посвященных теоретическому и экспериментальному исследованию взаимодействия сверхзвукового течения с поперечной газовой струей. Обсуждаются конечно-разностные методы решения уравнений Навье-Стокса, применительно к задаче сверхзвукового течения с поперечным сдувом струй предложенные разными авторами.. Во втором подразделе рассмотрена проблема взаимодействия ударной волны с пограничным слоем как структурной задачи при моделировании сверхзвуковых течений в канале ГПВРД с вдувом струй. Третий подраздел посвящен проблемам исследования взаимодействия сверхзвуковых струй в спутном потоке как системы разноскоростных сверхзвуковых параллельных потоков а четвертый освещает проблемы моделирования турбулентности для струйных течений, позволяющих получать характеристики реальной турбулентности.

Во втором разделе представлена система осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси, задано уравнение состояния совершенного газа для многокомпонентной смеси. Термодинамические свойства потока, как удельная теплоемкость при постоянном давлении, энтальпия и энтропия вычисляются согласно полиномиальной зависимости четвертого порядка по температуре. Температура вычисляется с помощью итерационной формулы Ньютона-Рафсона. Динамическая вязкость представляется в виде суммы молекулярной и турбулентной вязкостей. Молекулярная вязкость определяется по формуле Уилке, турбулентная вязкость вычисляется с помощью  $k-\omega$  модели. Для исходных уравнений разрабатывается методика решения двумерных уравнений Навье-Стокса для многокомпонентного газа, основанная на WENO схеме четвертого порядка точности. Производится сравнение расчетов с результатами других авторов, а также с экспериментальными

данными. Для задачи взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем изучено влияние числа Маха набегающего потока и толщины пограничного слоя на возникновение отрывной зоны и ударно-волновую структуру.

В третьем разделе проводится численное моделирование плоского турбулентного сверхзвукового воздушного потока в канале с перпендикулярно вдуваемой струи водорода через щель с нижней стенки канала. Для верификации численного алгоритма проводится численный расчет с инъекцией струи гелия при низких температурах, полученные результаты были сравнены с экспериментальными данными.. Найдены зависимости высоты вдуваемой водородной струи от степени нерасчетности и произведено сравнение с известной эмпирической формулой, определенной из экспериментов. Изучено влияние ширины щели на механизм возникающих ударно-волновых структур.

Четвертый раздел посвящен изучению пространственного сверхзвукового течения при наличии симметричного перпендикулярного вдува струй через круглые отверстия на стенках канала. Решение исходных осредненных по Фавру трехмерных уравнений Навье-Стокса, замкнутых  $k-\omega$  моделью турбулентности, осуществляется с помощью алгоритма, построенного на основе ENO-схемы. Исследована глубина проникновения струи в зависимости от параметра нерасчетности, Изучен механизм образования вихревых структур в результате взаимодействия набегающего потока с вдуваемой струей с умеренными и большими параметрами нерасчетности.

В пятом разделе

В заключении приводятся основные результаты и выводы, полученные в данной работе.

## ГЛАВА I. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

### 1.6 Состояние вопроса теоретического изучения взаимодействия сверхзвукового потока с вдувом струй

В большинстве систем сгорания без предварительного перемешивания необходимым требованием является быстрое и эффективное перемешивание топлива с окислителем. Повышение эффективности смешения имеет первостепенное значение и является одной из самых больших проблем проектирования прямоточных воздушно-реактивных двигателей, особенно в сверхзвуковых системах сгорания, поскольку время пребывания потока в такой камере сгорания существенно ограничено.

Поперечный вдув струи в поток (jet in cross-flow, JICF) является эффективным методом сверхзвукового перемешивания и сверхзвукового горения, так как оптимально объединяет в себе все свойства, присущие сверхзвуковым камерам сгорания. Кроме того, этот метод зарекомендовал себя как один из наиболее простых в проектировании сверхзвуковых ПВРД.

Понимание физических механизмов турбулентного смешения струи в сверхзвуковом потоке остается одним из важнейших вопросов как в экспериментальных, так и в численных исследованиях. Структура и газодинамика вдува струи в сверхзвуковой поперечный поток интенсивно разрабатываются в работах, начиная с 1950-1960-х годов [1]. Обтекание струй и препятствий достаточно хорошо изучены экспериментально [2-18]. В большинстве теоретических работ, в которых численно моделируется поперечный вдув струи в сверхзвуковой поток, применяются новые модели турбулентности [15, 19-27, 29], новые численные методы [30-34], а также адаптированные сетки [29,31-34]. Однако, несмотря на значительный прогресс, достигнутый в математическом моделировании перпендикулярного вдува струи в сверхзвуковой поток, трудности численного решения не позволяют в полной мере изучить структуру взаимодействия струи с поперечным потоком для многокомпонентных газовых смесей. В данных



работах в основном производятся тестовые расчеты, а численное исследование влияния таких важных с практической точки зрения параметров, как числа Маха струи и основного потока, отношение теплоемкостей, степень нерасчетности, и, что особенно важно, многокомпонентность газовой смеси, практически отсутствует. Это обусловлено сложной структурой течения в области вдува струи, за струей и внутри самой струи.

Существующие на данный момент экспериментальные работы дают понимание о закономерностях пространственного сверхзвукового турбулентного течения с поперечным вдувом струи. В работе Глаголева и соавт. [2], где эксперименты проводились при условиях  $M_\infty=3$ ,  $M_0=1$ ,  $Re=(1.87\div 3.74)\times 10^7$ ,  $n=1.1\div 1.30$ , отмечается, что обтекание струи имеет много общего с обтеканием цилиндра, однако картина распределения давления перед струей отличается от плоского случая и от случая обтекания цилиндра и является как бы промежуточной между этими случаями.

На рисунке 1.1 приведена структура течения, полученная в работе Сантьяго и Даттона [8], в которой экспериментально исследуется процесс поперечного вдува звуковой недорасширенной струи (параметр нерасчетности  $n=1.975$ ) перпендикулярно через круглое сопло в сверхзвуковой поток с числом Маха  $M_\infty=1.6$ . В соответствии с принятой терминологией, нерасчетность истечения характеризуется степенью нерасчетности  $n=p_0/p_\infty$ . При  $n<1$  струя называется перерасширенной, а при  $n>1$  - недорасширенной.

При натекании основного потока на струю возникает сложная система скачков. На кромках сопла струя расширяется, создавая течение Прандтля-Мейера. Характеристики волны разрежения, отражаясь от границ струи как волны сжатия, образуют висячий скачок уплотнения, который замыкается центральным скачком - диском Маха. В струе вдуваемый газ под воздействием основного потока разворачивается и в какой-то момент в струе возникает пара противоположно вращающихся вихрей, чьи оси вращения

параллельны самой струе. Авторами было выявлено, что именно это вторичное течение является основным источником вовлечения вещества основного потока во вдуваемый газ. Также в работе была определена структура подковообразной вихревой системы, которая огибает вдуваемую струю, и структура вихревого следа, появляющегося у основания струи.

Экспериментальные исследования [9-11] показывают аналогичную картину вихревых структур течения. ВанЛеберже и соавт. [12] также экспериментально изучали основные характеристики смешения не реагирующих струй. Было обнаружено, что некоторые из вихревых структур, присущие низкоскоростным течениям, наблюдаются и при сверхзвуковых течениях.

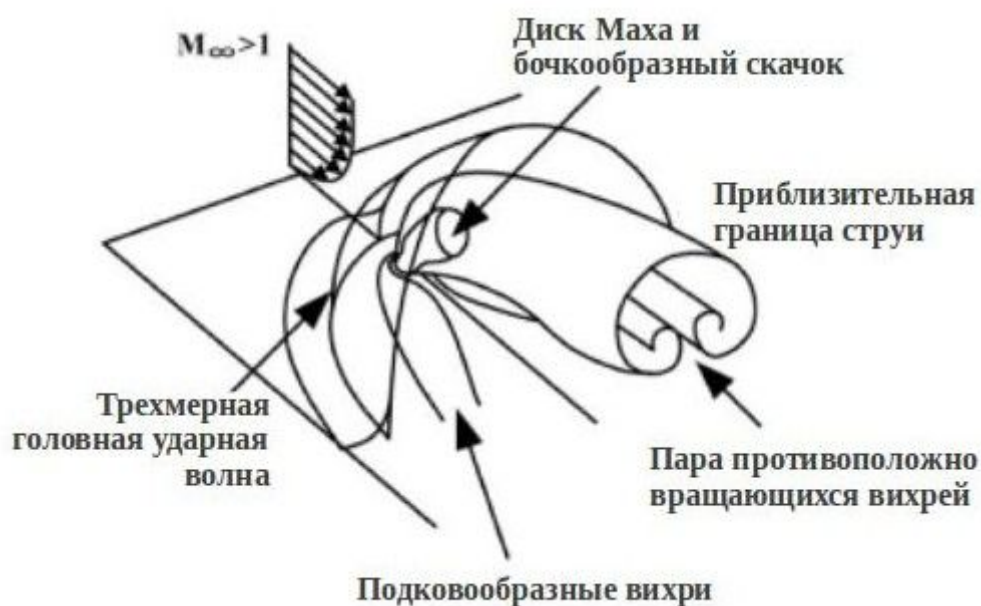


Рисунок 1.1– Схематическое изображение поперечного вдува струи в сверхзвуковой поток

Структура течения в плоскости симметрии в направлении основного потока представлена на рисунке 3.2 из работы [10]. При натекании сверхзвукового потока на струю давление перед струей увеличивается вследствие торможения потока, возникает головной скачок уплотнения, обозначенный 1 на рисунке 3.2. Вверх по потоку от него отходит косой

скачок уплотнения 2, за которым, помимо отрывной зоны, также наблюдается зона сверхзвукового течения. Последующее торможение потока сопровождается появлением второй ударной волны - замыкающего скачка уплотнения 3, параллельного оси струи. Как видно из рисунка, отошедшая ударная волна 1, косая ударная волна 2 и замыкающая ударная волна 3 пересекаются в одной точке и образуют сложную  $\lambda$  - образную структуру ударных волн 4. Давление на передней границе струи не является постоянным. Из эксперимента [7] следует, что его максимальное значение приходится на область за точкой пересечения скачков уплотнения, а именно, максимум давления находится за нижней частью замыкающего скачка уплотнения.

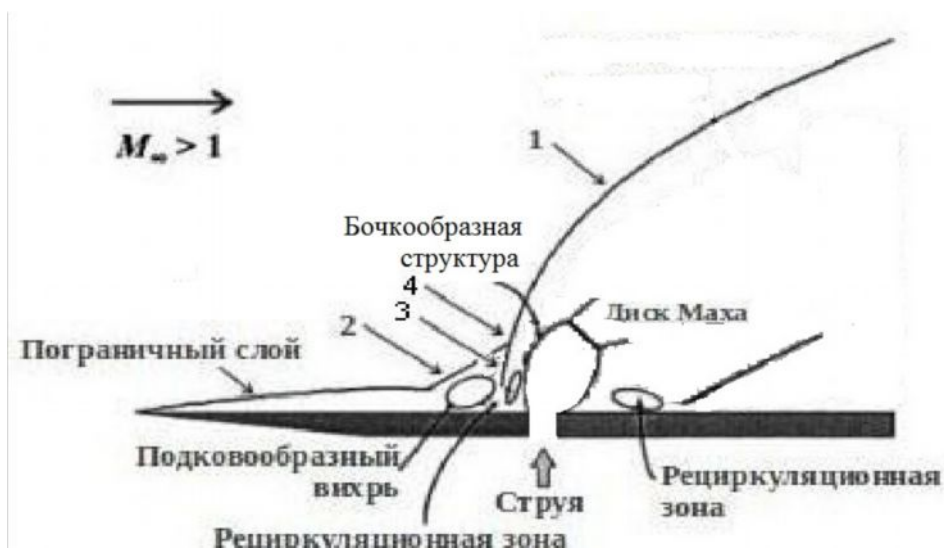


Рисунок 1.2 – Схематическое изображение поперечного вдува струи в сверхзвуковой поток в плоскости симметрии

Следует отметить тот факт, что можно достичь значительного снижения потерь давления за счет уменьшения угла, под которым вдувается струя. В экспериментах из работы Мэйса и др. [13] поперечный вдув гелия в сверхзвуковой поток воздуха (число Маха потока  $M_\infty=3$ ) осуществлялся под малыми углами через круглое сопло, имеющее угол наклона 15 и 30 градусов по направлению к набегающему потоку, со скоростью звука. Было выявлено,

что вдув струи под наклоном приводит к уменьшению степени смешения в области, близлежащей от впрыска, однако не влияет на перемешивание в отдаленных областях. Также в данной работе было получено, что вдув под меньшими углами наклона может привести к более глубокому проникновению топлива, а также иметь значительный вклад в импульс выходящего потока в продольном направлении, что является предметом изучения характеристик потока во многих работах [8, 13-15].

Анализ экспериментальных работ, в которых рассматривалось течение в различных режимах, приведен в работе [16]. Было обнаружено, что влияние форм инжектора на характер течения очень незначительно. Однако в последующем другими авторами изучались различные формы сопел при других режимах течения и была показана эффективность применения той или иной формы.

Например, поперечный вдув струи через ромбовидный звуковой инжектор в сверхзвуковой поток с числом Маха  $M_{\infty}=3$  экспериментально исследовали Томиока и соавт. [17]. Параметр нерасчетности задавался в диапазоне  $n=0.3\div 2.0$ . Было выявлено, что при малом значении параметра нерасчетности в случае вдува струи через ромбовидное сопло глубина проникновения больше, чем в случае вдува через круглое сопло при аналогичных условиях, однако при увеличении значения параметра нерасчетности глубины проникновения струи через ромбовидное сопло и через круглое становятся сопоставимыми. Помимо этого, авторы расширили проводимый анализ для параметра нерасчетности  $n=2.0$  на случаи, когда вдув струи проводился под наклоном в 0, 30 и 60 градусов относительно стенки, а также при наклоне в 60 градусов рассматривались также повороты сопла на 0, 15 и 30 градусов. Вдув струи под наклоном показал такую же эффективность относительно улучшения глубины проникновения, как и для круглых сопел, однако поворот сопла на 15 градусов при наклоне вдува в 60 градусов привел к значительно большему эффекту, чем в случае круглого инжектора.

Течение многокомпонентных газов с вдувом струй экспериментально изучалось в работе Асо и др. [18]. Была получена сложная структура течения, возникающая при поперечном вдуве звуковой струи через круглое сопло, при этом было обнаружено, что первичный и вторичный отрывы течения существенно отличаются от отрывов, возникающих при вдуве струи через сопло в виде щели. Эксперименты проводились для двух видов вдуваемого газа в струе - гелия и азота, при числе Маха набегающего потока, изменяющемся в диапазоне  $M_\infty=3.75\div 3.81$  и числе Рейнольдса набегающего потока, изменяющемся в диапазоне  $Re_\infty=(1.03\div 2.07)\times 10^7$ , степень нерасчетности  $n=0.46$ . Был сделан вывод, что поверхности течений не отличаются для гелия и азота, расположение линий отрыва вверх по потоку от круглого сопла практически одинаковы, однако небольшое различие отмечается в отдалении от центральной линии, где зона отрыва при вдуве гелия несколько меньше, чем при вдуве азота.

В работе Грубера и др. [10] экспериментально изучалось изменение схемы течения в зависимости от времени, а также основные характеристики перемешивания нереагирующих струй в поперечном потоке. Рассматривались четыре случая: вдув проводился через круглое и эллиптическое сопло, а вдуваемый газ был двух типов - воздух и гелий. Последнее обстоятельство позволило изучить режимы течения при разных конвективных числах Маха. Согласно принятой терминологии, конвективное число Маха определяется как  $M_c=(U_1-U_2)/(a_1+a_2)$ , где  $a_1, a_2$  – скорости звука в соответствующих потоках, оно является важным параметром, характеризующим влияние сжимаемости. Во всех случаях параметр нерасчетности имел значение  $n=3$ , а число Маха основного потока равнялось  $M_\infty=1.98$ . Результаты подтвердили ранее полученную картину течения. Кроме того, было получено, что потери полного давления на 20% меньше при использовании эллиптического сопла, чем при использовании сопла круглой формы. Также анализ влияния сжимаемости показал, что вдув в режиме малых конвективных чисел Маха обладает потенциально большей

эффективностью перемешивания инжектируемого газа с основным потоком независимо от формы сопла по сравнению с вдувом в режиме высоких конвективных чисел Маха.

В работе МакКанна и Бауэрсокса [14] рассматривались турбулентные характеристики обтекания струи воздуха с числом Маха  $M_0=1.8$ , вдуваемой под углом в 25 градусов при степени нерасчетности  $n=3.0$ , в сверхзвуковой поток воздуха с числом Маха  $M_\infty=2.9$ . Во всех сечениях приведена визуализация контура числа Маха, трехмерного вектора скорости, а также таких турбулентных параметров, как завихренность, кинетическая энергия турбулентности и тензор вязкого напряжения.

Сверхзвуковое течение многокомпонентных газов с поперечным вдувом струи экспериментально изучалось в работе Бен-Якара и соавт. [11]. В данной работе показаны как мгновенная картина течения и динамика сдвигового слоя струи, так и общие закономерности течения. Эксперименты проводились при следующих условиях: число Маха потока  $M_\infty=3.38$ , число Рейнольдса потока  $Re_\infty=2.2 \times 10^5$ , вдуваемый газ водород или этилен. Выявлено, что свойства сверхзвукового потока в окрестности струи значительно различаются в зависимости от вида вдуваемого газа. Более того, при одинаковых условиях глубина проникновения этилена оказалась больше, чем глубина проникновения водорода. Увеличение глубины проникновения этиленовой струи объясняется существенными различиями в развитии крупномасштабных когерентных структур, присутствующих в сдвиговом слое. А именно, в случае вдува водорода, периодически формирующиеся вихри сохраняются на достаточном расстоянии от инжектора, в то время как в случае вдува этилена такие вихри распадаются с наклоном струи.

Успешное развитие вычислительной техники позволяет разрабатывать эффективные численные методы и получать решение сложных задач. Чтобы выбрать наиболее перспективные направления экспериментальных исследований истечения струи в сверхзвуковой поток и таким образом уменьшить объем этих экспериментов, целесообразно использовать

математическое моделирование течения. В настоящее время существует множество различных численных методов, позволяющих осуществлять численное моделирование газодинамических процессов с учётом эффектов, возникающих в сверхзвуковых турбулентных потоках. Распространение поперечной струи в сверхзвуковом потоке в основном теоретически рассматривается в двумерной постановке. Это обусловлено тем, что численное интегрирование полной системы уравнений Навье-Стокса представляет собой чрезвычайно сложную и трудоёмкую задачу, решение которой находится на пределе возможностей современных компьютеров, даже в случае расчета течений однородного вязкого газа. В случае расчета внутренних течений многокомпонентных газовых смесей эта задача еще более усложняется, что связано как со значительным увеличением объема вычислений, так и с возникновением целого ряда серьезных дополнительных трудностей принципиального характера. Однако, в настоящее время для большинства типов внутренних течений уже имеются примеры расчетов на основе полной системы уравнений Навье-Стокса. Современные методы расчета вдува поперечной струи в сверхзвуковой поток можно разбить на следующие виды: методы с введением искусственной диссипации [15, 20-22] и схемы, удовлетворяющие условиям квазимонотонности [30, 18, 24-39, 41-43].

Отдельно следует выделить работы, изучающие эффекты химической кинетики. В работе [19] использовалась модель, состоящая из 24 реакций для 12 компонентов. Характеристики вдуваемой струи и основного потока были следующими: плотность вещества струи  $\rho_0=1.39741\text{kg/m}^3$ , плотность потока  $\rho_\infty=0.280555\text{kg/m}^3$ , соответственно скорость звука в струе  $a_0=1289.52\text{m/s}$ , в потоке  $a_\infty=711.161\text{m/s}$ , число Маха струи  $M_0=1$ , потока  $M_\infty=1.96$ , давление струи  $p_0=1659780\text{Pa}$ , потока  $p_\infty=101350\text{Pa}$ , параметр нерасчетности  $n=16.377$ . Решение проводилось с учетом неравновесных химических и термодинамических условий, также были использованы алгебраическая модель Болдуина-Ломакса и  $k-\varepsilon$  модель турбулентности. Результаты

демонстрируют исключительную важность правильного расчета химической кинетики и моделирования турбулентности для более точного прогнозирования свойств горения и смешения вдува водорода в поток воздуха. Однако в этой работе были изучены только общие характеристики течения, тогда как детальный анализ физики и динамики процесса вдува струи в сверхзвуковой поток не был представлен. Однако в данной работе газодинамика процесса вдува струи в сверхзвуковой поток не была представлена достаточно точно, ударно-волновая структура была сильно упрощена.

Экланд и соавт. [15] продолжили изучение методов улучшения смешения и горения в сверхзвуковых реагирующих течениях. Блок инжектора, используемый в эксперименте этой работы, состоял из 4 стреловидных рамп, из которых вдувалось топливо под углом 10 градусов по отношению к основному потоку, который представлял собой смесь водород-кислород-воздух, вдуваемую с числом Маха  $M_\infty=2.7$  через охлажденное водой сопло. В численном решении использовалась схема МакКормака 4-го порядка точности с введением искусственной вязкости и двузональная алгебраическая модель турбулентности, являющаяся комбинацией модели Болдуина-Ломакса и модели «длины смешения», а горение изучалось с помощью двух моделей химического взаимодействия водорода и воздуха: с участием 7 компонентов реакций (7-шаговый механизм) и 9 компонентов (19-шаговый механизм реакции). Было выявлено, что теплота, выделяемая в процессе химических реакций, значительно уменьшает степень перемешивания топлива и воздушного потока, а именно, эффективность перемешивания при присутствии процесса горения снизилась примерно на 25%.

В работах [20-22] численно изучались эксперименты [8] и [10] с помощью неявного метода крупных вихрей (implicit Large-eddy Simulations (ILES)). Параметры недорасширенной струи воздуха и сверхзвукового потока воздуха соответствовали экспериментам,  $M_0=1.0$ ,  $M_\infty=1.6$ ,  $Re_\infty=2.4 \times 10^4$ ,



отношение плотности вещества струи и потока  $\rho_0/\rho_\infty=5.55$  и параметр нерасчетности  $n=8.40$ . Исходная система уравнений решалась компактной схемы 6-порядка с введением искусственной вязкости. Были изучены профили скорости на разных расстояниях от вдува струи, влияние ламинарного и турбулентного пограничных слоев на структуру течения, изменение с течением времени системы скачков уплотнения и вихревых структур, а также свойства смешения. В работах [21, 23] была показана особая природа неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца в сверхзвуковом течении с поперечным вдувом струи, которые связаны с нестационарной деформацией бочкообразной ударной волны, зависящей от колебаний давления во входящем пограничном слое. В работе [21] представлен сравнительный анализ ламинарного и турбулентного режимов основного потока. Результат демонстрирует значительное влияние турбулентного пограничного слоя перед вдувом струи на процесс перемешивания, поскольку взаимодействие турбулентного пограничного слоя с главным скачком уплотнения и с передней границей струи приводит к вовлечению вещества струи в основной поток и усилению смешения на передней границе струи.

Основной трудностью численного моделирования процесса истечения струй в сверхзвуковой поток является возникновение осцилляций и разрывов в решении. Данную проблему можно преодолеть, используя схемы, удовлетворяющие условию монотонности, например, MUSCL-схема, TVD-схема, CESE-метод.

В работе Шенолта и соавт. [24] исходная система уравнений решалась MUSCL-схемой Ван Лира второго порядка точности. Здесь численно изучался эксперимент [14], в котором процесс поперечного вдува струи осуществлялся с числом Маха  $M_0=1.8$ , через эллиптическое сопло под углом 25 градусов в сверхзвуковой поток (число Маха  $M_\infty=3.0$ ). Для моделирования турбулентного течения были использованы модель рейнольдсовых напряжений второго порядка и  $k-\varepsilon$  модель турбулентности. Сравнение этих

двух моделей показало, что модель Рейнольдсовых напряжений дает лучшие результаты, нежели  $k$ - $\varepsilon$  модель, в предсказании физически правильного поведения напряжения сдвига турбулентного течения основного потока. Результаты показывают, что сложная система скачков уплотнения, возникающая за струей, является зеркальным отражением наклонной «бочки», а сама бочкообразная структура может контролироваться путем изменения угла вдува и формы и размера сопла.

В работах [25-27] численно изучался поперечный вдув струи в сверхзвуковой турбулентный поток, число Маха, используемое в расчетах, было равно  $M_\infty = 2.61$  [25],  $M_\infty = 2.0$  [26], в работе [27] оно задавалось в диапазоне  $M_\infty = 0.3 \div 2.0$ . Система полных трехмерных уравнений Навье-Стокса замыкалась  $k$ - $kl$  моделью турбулентности Смита [28]. Авторы представили достаточно подробную, более сложную структуру течения в зоне перед струей [25], были найдены критическая и седловая точки. В работе [26] уравнения, описывающие модель, были дискретизированы с помощью разностного оператора первого порядка по времени (разность вперед), вязкие члены аппроксимировались центральной разностью со вторым порядком точности, была использована схема MUSCL Ван Лира против потока. Были обнаружены новые системы вихрей у основания струи и близ стенки. В работе [27] изучалось влияние значения числа Маха набегающего потока. Был сделан вывод, что в дозвуковом режиме реактивная тяга становится крайне мала под действием вдуваемой струи, в то время как в сверхзвуковом режиме тяга, развиваемая струей, может быть увеличена почти вдвое по сравнению со случаем, когда вдув струи осуществляется в неподвижную среду.

Также MUSCL-схема была использована в работе [29], где изучалась ударно-волновая структура, возникающая при истечении струи в сверхзвуковой поток, с применением LES-методологии. Верификация метода проводилась путем сравнения с результатами работ [8] и [12], следовательно наборы параметров течения соответствовали условиям данных

экспериментов, а именно, были рассмотрены три случая: а)  $M_\infty=1.6$ ,  $n=8$ ; б)  $M_\infty=2.0$ ,  $n=13$ ; в)  $M_\infty=1.6$ ,  $n=25$ . Разработанная технология решения позволила получить как осредненное по времени решение, так и мгновенные картины течения. В работе было показано, что взаимодействие ударных волн и сдвигового слоя приводит к усилению турбулентного режима, что в свою очередь потенциально может значительно повысить скорость перемешивания и сгорания топлива в окислителе.

В работе [30] взаимодействие круглой поперечной звуковой струи и сверхзвукового потока на примере одного типа течения с числом Маха  $M_\infty=1.6$  численно моделировалось с использованием метода конечного объема для неявного метода крупных вихрей (ILES) типа Годунова. Разработанный в данной работе ILES-метод основан на явной схеме Рунге-Кутты 5 порядка по пространству и 3 порядка по времени, а также здесь применяется HLLC решение задачи Римана [31], которое предполагает трехволновую структуру решения задачи Римана. Высокий порядок точности по пространству достигается за счет применения MUSCL экстраполяции [32]. Применение ILES-метода позволило использовать шаг сетки почти в 3 раза больше по сравнению с классическим LES-методом [22], при этом все свойства течения были адекватно отображены, что подтверждает сравнительный анализ результатов с экспериментальными данными [8], [12].

TVD-схема применяется в численных расчетах работы [18]. Для моделирования турбулентности была выбрана модель Болдуина-Ломакса. Результаты показали достаточную согласованность с полученными в этой работе экспериментальными данными, описанными выше.

В работе Фостера и Энблома [29] трехмерные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса также численно решались с помощью TVD-схемы, а для расчета турбулентности использовалась модель переноса сдвиговых напряжений (Shear Stress Transport) Ментора, которая является комбинацией  $k-\omega$  модели (вблизи стенки) и  $k-\epsilon$  модели (вдали от стенки). В работе изучалось два режима протекания процесса - однокомпонентный газ и

многокомпонентный. В последнем случае рассматривался замороженный поток воздуха с числом Маха  $M_\infty=1.2$ , и состоящий из 5 компонентов, включая чистый азот  $N_2$  для, в который вдувалась замороженная струя топлива с числом Маха  $M_0=0.3$ , содержащая чистый кислород  $O_2$ , степень нерасчетности  $n=2$ . Был изучен только один тип течения, а именно, целью данной работы было выявить, при какой геометрической форме инжектора имеет место наилучшее перемешивание топлива с окислителем. Анализ проводился для круглой формы сопла, ромбовидной и квадратной, эти формы показали более глубокое проникновение топлива, чем прямоугольные формы сопел, вытянутых по направлению потока. Также было получено, что в случае ромбовидного инжектора проникновение происходит быстрее, чем в остальных случаях, однако определить, ведет ли это к улучшению перемешивания, в данном исследовании не удалось. Однако в данной работе прогнозируется, что прямоугольные формы сопел, вытянутых по направлению набегающего потока, предоставляют лучшие условия для смешения, чем остальные формы сопел.

В работе [31] истечение звуковой струи через круглое сопло в сверхзвуковой поток численно моделировалось на основе трехмерных уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу; для замыкания использовалась  $k-\omega$  модель турбулентности. Основные параметры течения приводятся следующие: основной и вдуваемые потоки воздуха представлены как идеальный газ, число Маха потока  $M_\infty=4.0$ , степень нерасчетности  $n=532$ . Решение проводилось с использованием неявной схемы, а конвективные члены вычислялись при помощи схемы расщепления Роу 3 порядка точности с применением ограничителей Min-Mod. Был рассмотрен частный случай течения, результаты показали хорошую согласованность с экспериментальными данными, ударно-волновая и вихревая структуры были описаны достаточно подробно.

Численное моделирование экспериментов [8] с условиями вдува звуковой струи и параметрами  $n=8.4$ ,  $M_\infty=1.6$  и вдува сверхзвуковой струи и

параметрами  $n=49.1$ ,  $M_\infty=0.8$ ,  $M_0=3.73$  проведено в работах [32, 33] с применением разработанной в [34] методики решения, основанной на методе конечного объема на неструктурированных сетках и метода характеристик с использованием процедуры реконструкции с помощью наименьших квадратов. Результаты тестовых расчетов показывают хорошую согласованность с результатами эксперимента, однако приводятся без учета подсеточной модели.

В работе [35] тестируется расширенный CESE-метод для решения трехмерных уравнений, описывающих взаимодействие звуковой струи воздуха, вдуваемой в сверхзвуковой воздушный поток, а также звуковой струи водорода, вдуваемой в сверхзвуковой воздушный поток. Пространственно-временной CESE-метод, первоначально разработанный в работе [36], входит в группу монотонных методов и позволяет проводить моделирование в рамках неявного метода крупных вихрей. В данной работе численно изучался эксперимент вдува струи воздуха из работы Грубера и др. [10], режимные параметры были следующими:  $P_\infty=41.8$  кПа,  $M_\infty=1.98$ ,  $P_0=476$  кПа,  $n\sim 11.388$ , а также эксперимент вдува струи водорода из работы Ортса и Фанка [36], где режимные параметры были следующими:  $M_\infty=2.72$ ,  $n\sim 2.73$ . Было установлено, что CESE-метод способен адекватно описать ударные волны и акустические волны одновременно, где величина градиента давления при переходе через скачок уплотнения может быть на несколько порядков больше, чем в акустических волнах. В работе показано, что приведенный CESE-метод удовлетворительно описывает сложные структуры течения, такие, как ударно-волновая структура, а также проведено сравнение результатов с экспериментальными данными.

Однако следует заметить, что монотонным и TVD-схемам присущ недостаток, который состоит в том, что в окрестности точек, где первая производная решения равна нулю, их порядок аппроксимации снижается до первого. Данное обстоятельство приводит к тому, что, например, TVD-схема

5-го порядка точности на гладких монотонных решениях по точности для ряда тестовых задач не превосходит TVD-схему 3-го порядка. [37]

Схемы, свободные от указанного выше недостатка, были предложены в [38] и получили название ENO-схем (essentially non-oscillatory). Основная идея построения ENO-схем состоит в использовании среднего значения функции, для нахождения которого используется некоторая полиномиальная функция. Для подавления ложных осцилляций применяется переменный, адаптирующийся к решению шаблон. Интерполяционный полином строится на том интервале, на котором решение ведет себя наиболее гладко, а мерой гладкости разностной функции на  $k+1$  точках служит ее разделенная разность  $k$ -го порядка. ENO-схемы  $m$ -го порядка не допускают понижение порядка аппроксимации на точках локальных экстремумов до первого, а точность схемы остается везде постоянной и равной  $m$ .

WENO-схемы основаны на идее построения ENO-схем, но отличаются тем, что вместо одного выбранного интерполяционного полинома используется некоторая комбинация всех полиномов, которые можно построить для рассматриваемой ячейки. Основной проблемой в построении WENO-схемы является определение веса каждого полинома, участвующего в комбинации. Так же, как и ENO-схемы, WENO-схемы требуют, чтобы комбинация полиномов удовлетворяла ENO-свойствам, а на разрывах выбирались шаблоны из условия гладкости функции. Основное преимущество WENO-схем перед ENO-схемами заключается в том, что они могут повышать порядок аппроксимации на один и более.

В работе [30] для изучения трехмерного установившегося течения, создаваемого поперечным вдувом струи в сверхзвуковой поток, применяется WENO-схема 5 порядка точности. В качестве исходных уравнений использовалась система уравнений Навье-Стокса, осредненных по Фавру, для замыкания была выбрана  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности Джонса-Лаундера. Параметры процесса были следующими: число Маха струи  $M_0=1.0$ , число Маха потока  $M_\infty=3.0$ , вдув проводился через квадратное сопло на стенке. В

данной работе проведены тестовые расчеты, которые показывают, что WENO-схема достаточно хорошо рассчитывает характеристики течения и улавливает сложные вихревые структуры.

В работе Аmano и Сана [39] используется WENO-схема 3 порядка для проведения тестовых расчетов с целью определить влияние режимных параметров на глубину проникновения и длину зоны отрыва течения. Для замыкания модели турбулентности была выбрана  $k$ - $\varepsilon$  модель Джонса-Лаундера. Численный расчет проводился при следующих условиях: в качестве основного потока и струи брался воздух, число Маха струи  $M_0=1.0$ , число Маха потока  $M_\infty=3.71$ , степень нерасчетности задавался в диапазоне  $n=0.1-0.35$ , то есть изучался режим вдува только перерасширенной струи. Авторы показали, что наибольшее влияние на структуру течения оказывает степень нерасчетности, глубина проникновения и длина зоны отрыва линейно зависят от данного параметра, в то время как влияние толщины пограничного слоя практически незаметно.

Проведенный анализ работ показывает, что на данный момент достаточно слабо изучена проблема математического моделирования сверхзвуковых течений с поперечным вдувом струи для многокомпонентных газовых смесей в канале. Кроме того, необходимы разработки численных методов высокого порядка точности, адекватно учитывающие влияние режимных параметров на характер течения. Таким условиям удовлетворяет WENO-схема. Дальнейшее исследование направлено на разработку эффективного численного алгоритма решения трехмерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса высокого порядка точности на основе ENO-схем и WENO-схем а также адаптацию данного алгоритма к поставленной задаче, а также его верификацию путем сравнения полученных результатов с экспериментальными данными и проведение численных экспериментов с целью установить влияние режимных параметров на характеристики сверхзвукового турбулентного течения с поперечным вдувом струи.

## **1.7 Исследование проблемы взаимодействия ударной волны с пограничным слоем**

Как было сказано выше большинство существующих на данный момент работ по теоретическому изучению взаимодействия струи и набегающего потока в канале в основном рассматривают область вдува струи, и при этом, как правило, на верхней границе реализуются граничные условия симметрии или свободного потока [15-22], что значительно облегчает решение поставленной задачи. В ряде работ рассматривается взаимодействие вдуваемой струи с ударной волной, генерируемой с верхней стенки канала, что также несколько упрощает постановку задачи, но позволяет детально изучать их взаимодействие. Так, в [40] численно изучено влияние размеров и расположения генератора скачка уплотнения, падающего с верхней стенки, на профили давления на нижней стенке в области вдува струи. Угол наклона генератора варьировался в пределах от  $15,784^{\circ}$  до  $35,974^{\circ}$ . Авторами показано, что область взаимодействия как перед струей, так и за ней существенно зависит как от угла наклона генератора, так и от его размера. В [41] приведены результаты исследования влияния ударных волн на область сверхзвукового горения водородной струи. Влияние падающей ударной волны на турбулентный пограничный слой также численно исследовано в [42].

Следует отметить работы, где изучается взаимодействие падающей ударной волны, но уже с пограничным слоем без вдува струй [43-52]. Задача взаимодействия ударных волн с пограничным слоем в аэродинамике высоких скоростей была предметом экспериментальных и численных исследований в течении ряда последних лет. Сегодня, с возрождением интереса к сверхзвуковым и гиперзвуковым течениям, этот вопрос приобретает все большее значение, особенно при использовании в



аэрокосмической промышленности (ракет, ракет, сверхзвуковых и гиперзвуковых летательных аппаратов ...).

Взаимодействие ударных волн с пограничными слоями имеет важное как фундаментальное значение, особенно в теории динамики жидкости, так и огромное практическое значение. Это взаимодействие может оказать существенное влияние на производительность полета самолета или ракеты с точки зрения крайне нежелательных последствий, таких как повышение сопротивления, обширного отрыва потока, ударноволновой неустойчивостью и генерации высоких температур на поверхности летательного аппарата. С фундаментальной точки зрения, эта проблема включает в себя базовую структуру ударной волны, взаимодействующую с потоками газов, которая является одним из самых простых случаев сильного вязко-невязкого взаимодействия, и поэтому идеально подходит для тестовых примеров при численном решении уравнений Навье-Стокса.

В данной проблеме существуют несколько физических структур течения вязкого газа, например пограничные слои с градиентом давления, возвратное течение, сдвиг слоев и теоретическое изучение некоторых из этих характерных особенностей можно найти у следующих авторов Dolling [45], Dolling [46], Déleury [47], Dolling и Dussauge [48]. Одним из необходимых условий, вызывающих отрыв потока от стенки является рост давления в пограничном слое в направлении потока, то есть градиент давления должен быть положительным. На рисунке 1.3 показана схематическая картина взаимодействия ударной волны (8) с пограничным слоем (1) на стенке [49]. Эта ударная волна создает положительный градиент давления, который является достаточным для отрыва потока. Рост давления расширяется дозвуковую зону в пограничном слое вверх по потоку, в результате расширения сверхзвуковая зона (2) отклоняется к наружной части пограничного слоя, а на его линии возникает система волн сжатия (9), которая в основном потоке переходит в отраженную ударную волну (7). Когда градиент давления достигает критической точки, поток вблизи стенки

не может преодолеть увеличение давления, и это приводит к отрыву потока (в точке S). Расширение потока в пограничном слое, вызванного влиянием основной ударной волны, переходит в волны разрежения (6), что прекращает рост толщины пограничного слоя. Дополнительные волны сжатия (5) появляются в месте присоединения оторвавшегося потока в пограничном слое. Возле стены, где возникает область между дозвуковым и сверхзвуковым потоками появляется ударная волна сжатия (10). В течение последних десятилетий многочисленные теоретические и экспериментальные исследования были направлены на получение более глубокого понимания ударно-волновой структуры взаимодействия. Ряд исследований был посвящен плоскому взаимодействию [50-52], которые представляют собой внутренние взаимодействия в пределах сверхзвуковых воздухозаборников.

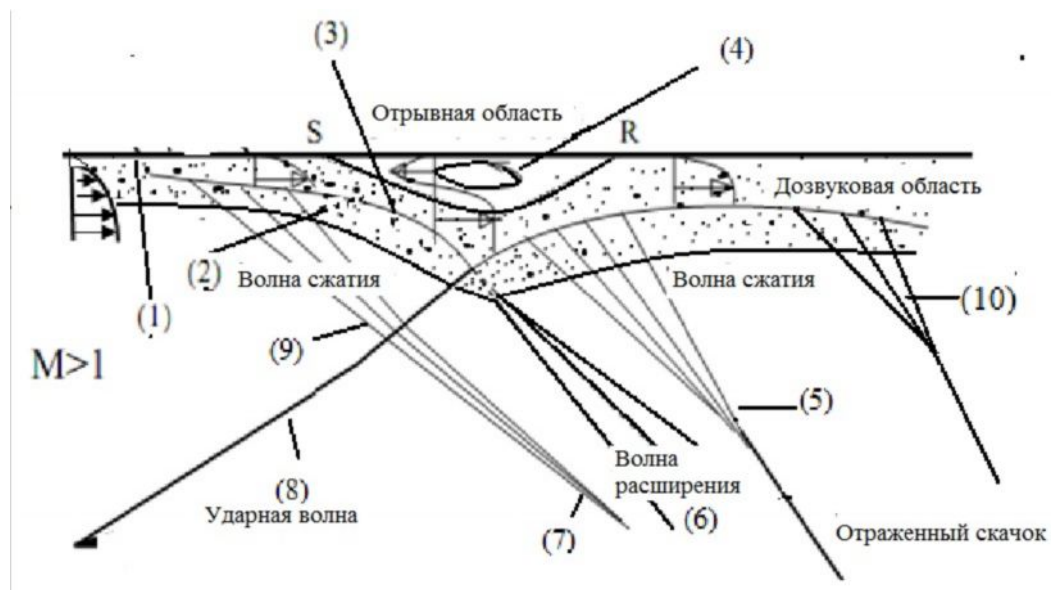


Рисунок 1.3 – Схема взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем [56].

В работе [43] основное внимание уделяется изучению структуры взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, размеров отрывной зоны, а также динамических и тепловых нагрузок, реализующихся при уменьшении или увеличении интенсивности взаимодействия. В [44]

исследованы условия, при которых угол наклона и интенсивность ударной волны приводят к отрыву пограничного слоя.

Таким образом, из вышесказанного можно сделать заключение, что, практический интерес сверхзвукового течения с вдувом струй в канале связан с возникающими нагрузками как на верхнюю, так и на нижнюю стенки канала. На сегодняшний день, проблемы взаимодействия ударной волны с вдуваемой струей и с пограничными слоями в основном рассматриваются по отдельности. Задача взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем до сих пор является не до конца изученной проблемой, особенно для различных параметров потока и интенсивности ударной волны.

### **1.3 Исследование взаимодействия сверхзвуковых струй в спутном потоке как системы разноскоростных сверхзвуковых параллельных потоков**

Для того чтобы изучить механизмы быстрого перемешивания и сжигания топливно-воздушной смеси в сверхзвуковых камерах сгорания рассматривается модельная задача сдвигового течения сверхзвуковых спутных газов. Смешение поперек сдвигового течения между двумя параллельными потоками зависит от количества массы и импульса переносимой через этот слой. Поэтому, степень смешения двух потоков может быть описана параметрами «роста» и «расширения» сдвигового течения. Известно, что сдвиговое течение между двумя сверхзвуковыми потоками растет медленнее по сравнению с дозвуковыми потоками.

Сдвиговые течения охватывают широкий спектр конфигурации, часто встречающихся в задачах инженерных и естественных наук. Это слои смешения, образованные в результате сдвига между двумя потоками различной скорости. К примеру, струи в спутном потоке а также след за плохо обтекаемым телом, пограничные слои вблизи твердой поверхности и др. Такие потоки обычно проявляют сильный сдвиг в поперечном

направлении и развиваются вдоль потока из четко определенного пространственного источника (происхождения). К примеру, выходное сечение сопла вдуваемой струи, задняя кромка разделительной пластинки, препятствие, передняя кромка пластинки и др. В невозмущенных естественно развивающихся слоях смешения, энергетический спектр, измеренный в закрученной области сразу после выходного сечения сопла, имеет широкий диапазон [53]. Максимальная частота естественного вихреобразования  $f_n$  определяется из числа Струхала  $St_n = f_n \delta_w(0) / \bar{U}$  ( $\bar{U} = (u_\infty + u_0) / 2$ ). Естественные длины волны между поперечными вихрями (толщина завихренности) равны  $\lambda_n = \bar{U} / f_n$ . Сжимаемый слой смешения, образованный между двумя параллельными газовыми потоками, направленными в одну сторону является простой и в то же время фундаментальной конфигурацией для описания многих физических процессов, таких как ударно-волновая структура течения, взаимодействие ударной волны со слоем смешения, образование неустойчивости, переход от ламинарного течения к турбулентному, смешение и горение топливно-воздушной смеси и др.

Сдвиговой слой (слой смешения) образуется на границе двух со направленных потоков разной скорости (дополнительно в случае многокомпонентной смеси - разной плотности) как показано на рисунке 1.4. Вязкая диффузия образует область (слой) сдвига или смешения между двумя потоками, характеризующейся продольной скоростью, которая имеет большие градиенты в поперечном направлении по сравнению с продольной скоростью [53].

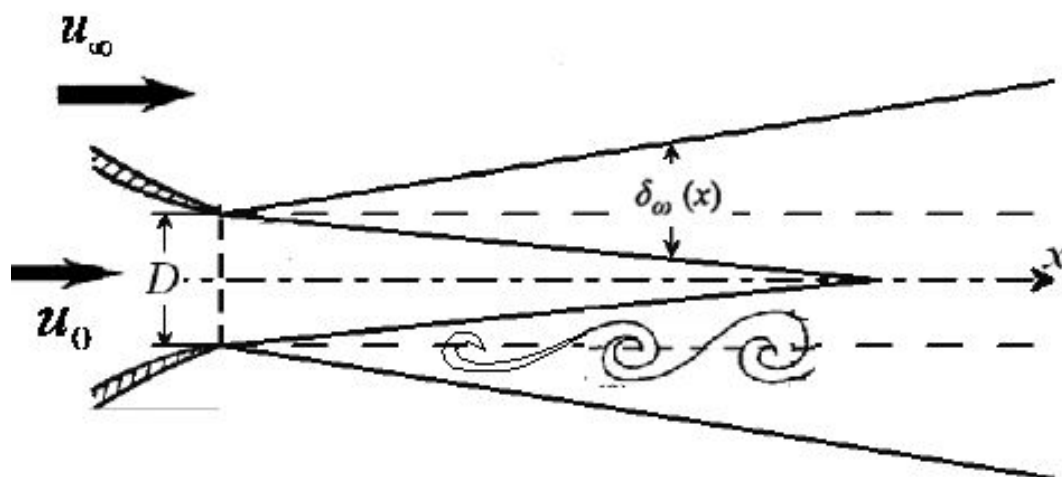


Рисунок 1.4 – Схема пространственного развития слоя смешения

Как известно, механизм роста сдвиговых течений с образованием вихревых структур различного масштаба аналогичен неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [54-56]. Газодинамическая структура смешения между двумя параллельными до и сверхзвуковыми, сверх и сверхзвуковыми, сверх и дозвуковыми потоками были изучены в полной мере многими исследователями. Экспериментальные работы по исследованию закручивания (вихрей) крупномасштабных когерентных структур и механизма их роста были проведены в работах Вайнанта и Броунда [57], Брауна и Рошко [58]. В работе Брауна и Рошко [58] были проведены серии экспериментов по изучению влияния отношения плотности, где было заключено, что скорость роста сдвигового слоя уменьшается за счет эффекта сжимаемости. Позднее Богданофф [59], Папамошчоу и Рошко [60] предложили параметр корреляции скорости роста слоя смешения с использованием числа Маха, связанного со средней волновой скоростью крупномасштабных вихрей слоя смешения. Влияние конвективного числа Маха  $M_c = (u_\infty - u_0) / a_\infty$  ( $u_c = (a_\infty u_0 + a_0 u_\infty) / (a_\infty + a_0)$ ) на скорость роста слоя смешения было продемонстрировано в трудах Тиндзая и др. [61], Папамошчоу и Рошко [60], где было показано, что с увеличением  $M_c$  скорость роста слоя смешения уменьшается. Однако, данные

экспериментальные работы были ограничены измерением средних характеристик потока и влиянием эффекта сжимаемости на скорость роста сдвигового слоя. Большое количество исследований были посвящены проблеме турбулентности и влияния турбулентных характеристик на смешение и образование вихрей. В эксперименте Остера и Вигнанский [62] было показано влияние параметров интенсивности турбулентности и Рейнольдсовых напряжений на скорость роста слоя смешения. В работе Самими и Эллиота [63-64] было экспериментально изучено эффект сжимаемости для трех различных конвективных чисел Маха ( $M_c = 0.51, 0.64, 0.86$ ), где были измерены средние характеристики потока, определены параметры скорости роста сдвигового слоя и турбулентные характеристики в двухпоточном туннеле. Из экспериментов было найдено, что параметры роста сдвигового слоя и турбулентные характеристики уменьшаются с ростом  $M_c$ . В работе Гобея и Даттона [65] экспериментально исследуются турбулентные слои смешения сжимаемых газов. В данной работе экспериментальная установка представляет собой аэродинамическую трубу, которая позволяет получить номинально плоский слой смешения на длине, в которой он становится развитым. Проведены измерения давления и скорости. Относительное число Маха  $M_r = \Delta U / \bar{a}$  ( $\Delta U = u_\infty - u_0, \bar{a} = (a_\infty + a_0) / 2$ ) варьировалось от 0.4 до 1.97. Представлены результаты по распределению средней скорости и турбулентных характеристик, таких как пульсации продольной и поперечной скоростей, Рейнольдсовы напряжения по сечениям.

Поскольку осуществление экспериментов по изучению горения в слое смешения является сложным и дорогостоящим, на сегодняшний день существует небольшое количество подобных работ. Многие исследователи с помощью математического аппарата и численных методов пытаются воспроизвести данные эксперименты и изучить их. Для более детального моделирования и понимания процесса смешения и горения топливно-воздушной смеси необходимо моделировать газодинамическую структуру,

влияние турбулентности и химические реакции горения совместно. Численные модели, достаточно точно описывающие физическую структуру течения с учетом вышеуказанных процессов, представляют собой сложную задачу. Поэтому, многие исследователи изучают данные явления по отдельности, либо предлагают усовершенствованные численные алгоритмы. В работе Чэнга и др. [66], Хадсона [67], Рэйчерта [68] была численно моделирована задача сдвигового течения однокомпонентных газов с использованием уравнений Эйлера. Например, Чэнг и др. [66] численно решали сверх – дозвуковой свободный сдвиговый слой с использованием WENO схемы высокого порядка точности для двумерной осесимметричной системы уравнений Эйлера совместно с численной моделью турбулентности, принятой в качестве SGS модели. Численный эксперимент Чэнга и др. [66] показал, что при больших конвективных числах Маха скорость турбулентного перемешивания уменьшается и рост закручивания пары вихрей замедляется. Для более точного численного моделирования процесса турбулентного смешения и горения необходимо использовать полную систему уравнений Навье-Стокса. Хотя численные эксперименты Чэнга и др. [66] показывают, что при использовании численной вязкости в качестве SGS модели получается достаточно удовлетворительное согласование с экспериментальными данными. Другие исследователи Танг и др. [69-70], Саркар и др. [71], Иксяю-Тьян Ши и др. [72] представили расчеты по исследованию сверхзвукового сдвигового течения однокомпонентных (воздух) газов с использованием системы уравнений Навье-Стокса. Иксяю-Тьян Ши и др. [72] провели численное моделирование сжимаемого слоя смешения с использованием метода Галеркина с нестационарными возмущениями для предсказания структуры течения полученных путем проведения экспериментов. Танг и др. [69-70] численно изучили параметр улучшения смешения в сверхзвуковом свободном сдвиговом течении с использованием нестационарных возмущений на основе конечно-разностной схемы Мак-Кормака второго и четвертого порядков точности. Путем

проведения численных расчетов в работе Танга и др. [69-70] было показано, что введение нормальных нестационарных возмущений скорости более эффективно описывает рост слоя смешения по сравнению с продольным возмущением. На сегодняшний день проблема плоского сдвигового течения однокомпонентного газа была изучена в полной мере многими авторами как экспериментально, так и теоретически. В то время как проблема пространственного сдвигового течения все еще требует полноценного изучения.

#### **1.4 Состояние проблемы моделирования турбулентности сверхзвуковых пространственных течений совершенного газа**

Большинство течений с вдувом струй, представляющих интерес в технических приложениях, являются турбулентными. Состояние любого течения можно охарактеризовать числом Рейнольдса, которое показывает отношение между инерционными и вязкостными силами. С увеличением числа Рейнольдса течение становится неустойчивым, возмущения разрушают упорядоченную ламинарную структуру, приводя к турбулентному течению. Поскольку турбулентные структуры потока (вихри) различаются от крупных, размером с ширину рассматриваемого канала, до очень мелких, то при моделировании турбулентности нужно учитывать все возможные размеры вихрей, задавая разные масштабы течения как для крупных, так и для мелких турбулентных структур. Крупные масштабы содержат в себе кинетическую энергию турбулентности, которая затем под действием инерционных сил переносится в более мелкие масштабы, пока в самых мелких масштабах она не рассеется под действием вязких сил. Ниже вкратце приводятся основные характеристические масштабы, используемые при моделировании турбулентности.

В работах [73-75] подробно описаны как экспериментальные, так и теоретические методы исследования турбулентных течений, а также



представлены турбулентные масштабы скорости, размеров вихрей и времени. Так, в [73] для полностью развитого турбулентного потока с характеристической скоростью  $U$ , шириной канала  $L$  и с числом Рейнольдса  $Re = UL/\nu$  вихри размером  $l$  имеют характеристическую скорость  $u(l)$  и характеристический масштаб времени  $\tau(l) = l/u(l)$ . Крупные вихри задаются длиной  $l_0$ , сопоставимой с шириной канала  $L$ , а их характеристическая скорость  $u_0 = u(l_0)$  имеет порядок среднеквадратичного значения турбулентной интенсивности  $u' = (\frac{2}{3}k)^{1/2}$  и сопоставима с характеристической скоростью  $U$ . Число Рейнольдса для таких вихрей имеет следующий вид:

$$Re_0 = u_0 l_0 / \nu .$$

Как было сказано выше, крупные вихри являются нестабильными, и, как следствие, разделяются, передавая энергию меньшим вихрям, образуя каскад энергии. В свою очередь меньшие вихри также делятся на вихри еще меньших размеров. Такой процесс повторяется до тех пор, пока число Рейнольдса не станет настолько малым, что движение вихрей стабилизируется и на них начинает воздействовать молекулярная вязкость, под действием которой рассеивается оставшаяся кинетическая энергия вихрей. Таким образом, диссипация энергии занимает конечное положение в турбулентном потоке. В соответствии с работой [73] скорость турбулентной диссипации  $\varepsilon$ , которая определяется процессом переноса энергии от крупных вихрей к малым, имеет масштаб, равный  $u_0^3/l_0$ .

Различные размеры вихрей и их диапазоны в [73] представляются следующим образом (рисунок 1.5):

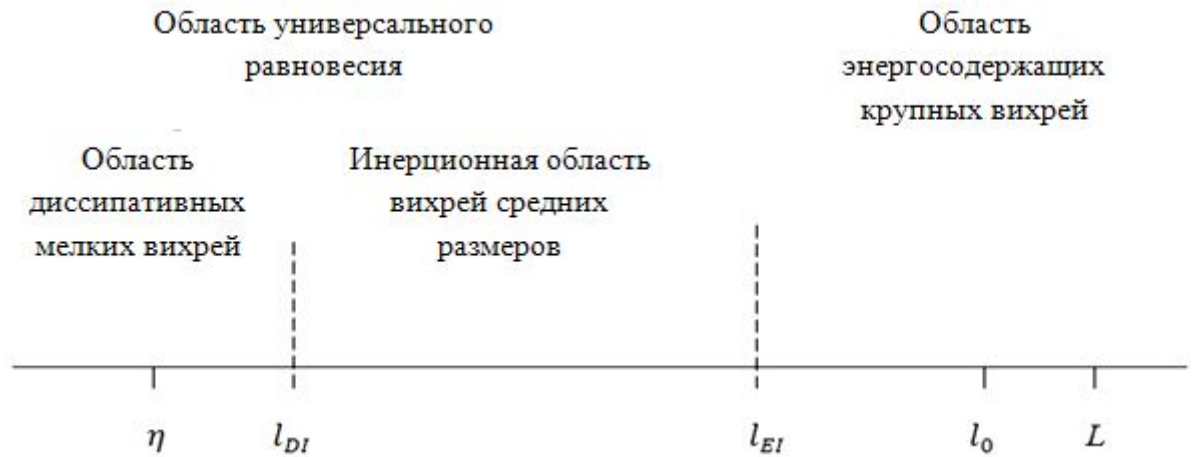


Рисунок 1.5 – Размеры вихрей при высоких числах Рейнольдса (масштабы турбулентности)

Задание определенных границ, обозначенных точками  $l_{DI}$ ,  $l_{EI}$ , позволяет описать диапазоны масштабов турбулентных характеристик. Как видно из рисунка 1.5, весь спектр размеров представлен двумя областями: область универсального равновесия и область энергосодержащих вихрей. Точка  $l_{EI}$ , где  $l_{EI} \approx \frac{1}{6}l_0$ , является границей между анизотропными крупными вихрями и изотропными малыми вихрями. В области универсального равновесия турбулентность не зависит от внешних условий, а любое изменение эффективных масштабов длины и времени может быть результатом влияния только параметров  $\varepsilon$  и  $\nu$ . Точка  $l_{DI}$  (где  $l_{DI} = 60\eta$ ) делит эту область на две подобласти: инерционную и область диссипативных вихрей. В инерционной области, как правило, пренебрегается влиянием вязких сил, таким образом, вязкая диссипация имеет сильное влияние только в области диссипативных вихрей. Диапазон энергосодержащих вихрей в этой работе представлен следующим интервалом

$$l_{EI} = \frac{1}{6}l_0 < l < 6l_0 .$$

Если известны параметры  $\varepsilon$  и  $\nu$ , то можно задать характерные колмогоровские масштабы длины, скорости и времени, которые будут являться масштабами самых мелких вихрей, находящихся под влиянием вязких сил [73-75]:

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \quad (1.1)$$

$$u_\eta = (\varepsilon\nu)^{1/4} \quad (1.2)$$

$$\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2} \quad (1.3)$$

Эти масштабы соответствуют числу Рейнольдса, равному единице:

$$Re = \frac{u_\eta * \eta}{\nu} = 1 \quad (1.4)$$

Масштабы длины, скорости и времени могут быть определены, если заданы размеры вихрей  $l$  (в инерционной подобласти) и  $\varepsilon$  как в работе [73]:

$$u(l) = (\varepsilon l)^{1/3} \quad (1.5)$$

$$\tau(l) = (l^2/\varepsilon)^{1/3} \quad (1.6)$$

Отношения малых масштабов к большим можно получить из определения Колмогоровских масштабов и из соотношения  $\varepsilon \sim u_0^3/l_0$ . Тогда получается [73-75]:

$$\eta/l_0 \sim Re^{-3/4} \quad (1.7)$$

$$u_\eta/u_0 \sim Re^{-1/4} \quad (1.8)$$

$$\tau_\eta/\tau_0 \sim Re^{-1/2} \quad (1.9)$$

Распределение турбулентной кинетической энергии по вихрям разных размеров в простейшем случае однородной турбулентности задается функцией энергетического спектра  $E(k)$ , где  $k = 2\pi/l$  называется волновым

числом, является обратной размерам турбулентных вихрей  $l$ . Ниже, на рисунке 1.6 представлена картина распределения энергетического спектра  $E(k)$  для волновых чисел  $k$  в случае однородной изотропной турбулентности, где из первой гипотезы Колмогорова о подобии следует, что в диапазоне равновесия  $k > k_{EI} \equiv 2\pi/l_{EI}$  спектр является функцией от  $\varepsilon$  и  $\nu$ . Из второй гипотезы следует, что в инерционном диапазоне  $k_{FI} < k < k_{DI} \equiv 2\pi/l_{DI}$  спектр энергии имеет следующий вид [73-74,76]:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1.10)$$

где  $C$  является константой.



Рисунок 1.6 – Форма распределения  $E(k, t)$  в различных областях волновых чисел

Энергетический спектр при  $k^{-5/3}$  был назван спектром Колмогорова.

Как видно из рисунка 1.6, большим волновым числам соответствует малое количество энергии и наоборот. Таким образом, если соотнести этот спектр к рисунку 1.5, можно увидеть, что большим волновым числам

соответствуют малые вихри и наоборот, малым волновым числам соответствуют крупные энергосодержащие вихри.

В последние годы для моделирования турбулентного слоя смешения помимо известного RANS метода, основанного на решении осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса, особое внимание уделяется подходам, базирующимся на первых принципах аэродинамики (метод прямого численного моделирования – Direct Numerical Simulation или DNS и метод моделирования крупных вихрей – Large Eddy Simulation или LES). Также широко применяются модификации этих методов, например, RANS-LES и VLES. При этом одной из проблем является задание реалистичных входных характеристик турбулентности.

Методы прямого численного моделирования (DNS) решают полные нестационарные трехмерные уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности, таким образом, не требуя какого-либо предварительного моделирования, и при этом разрешая все масштабы турбулентности. При расчетах турбулентных течений этими методами основной задачей является задание так называемой неустойчивости на входе рассматриваемого течения так, чтобы в дальнейшем эта неустойчивость привела к турбулентности. Как известно, двумерное течение невязкой жидкости, направленное вдоль одной координаты, является стабильным относительно малых волновых возмущений. Неустойчивость такого течения можно наблюдать только в том случае, если в профиле скорости появится точка перегиба, причем механизм такого процесса будет невязким, а любое присутствие вязкости только подавит всякое зарождающееся в нем возмущение. Если же рассматриваемое течение не имеет точки перегиба в профиле скорости, как, например, течение вокруг плоской пластины с пограничным слоем, то неустойчивость таких течений появляется с введением в рассмотрение вязкости. Простейшим примером течений с точкой перегиба в профиле скорости является течение двух потоков с разной постоянной скоростью, разделенных между собой поверхностью разрыва. Гельмгольтс (1868) показал, что такая поверхность

(скачок) является нестабильной, затем Рэйлей (1880) рассчитал рост скорости постепенно увеличивающихся возмущений в этой поверхности как функцию от волнового числа возмущения. Так, в работах [55,56] представлены линеаризованные решения из линейной теории устойчивости (LST), применяемые в настоящее время при моделировании турбулентности методом DNS. В них было проинтегрировано уравнение устойчивости Рэйлея в рамках теории линеаризованной невязкой устойчивости для возмущений, усиливающихся во времени и имеющих гиперболически- тангенциальный профиль скорости. Авторами были представлены результаты численного расчета собственных значений и собственных функций уравнения устойчивости Рэйлея для возмущенного гиперболически-тангенциального профиля скорости в течении со свободным пограничным слоем. Малые возмущения  $u_1(x, y, t)$  и  $v_1(x, y, t)$  были наложены на основное течение при условиях, что  $u_1 \ll U$  и  $v_1 \ll U$ . Возмущения движения при помощи функции тока  $\psi_1(x, y, t)$  были определены выражением:

$$u_1 = \partial\psi_1/\partial y, \quad v_1 = -\partial\psi_1/\partial x \quad (1.11)$$

где  $\psi_1(x, y, t)$  имела следующий вид:

$$\psi_1(x, y, t) = \Re[\phi(y)e^{i\alpha(x-ct)}] \quad (1.12)$$

где  $\phi(y)$  – амплитуда, а  $\alpha$  – волновое число возмущения,  $c = c_r + ic_i$  – комплексное,  $c_r$  – фазовая скорость, а  $c_i$  – значение роста возмущения. Добавление (1.11) и (1.12) в уравнение движения Эйлера без учета величин второго порядка привело к уравнению следующего вида:

$$[U - c][\phi'' - \alpha^2\phi] - U''\phi = 0 \quad (1.13)$$

– уравнение устойчивости Рэйлея.

Для неограниченного профиля скорости возмущения затухают на бесконечности, тогда граничные условия, накладываемые на них, имеют следующий вид:

$$\phi(-\infty) = \phi(+\infty) = 0 \quad (1.14)$$

Для того чтобы найти собственные значения  $c = c(\alpha)$ , которые являются комплексными, в работе [55] задается условие для неограниченного профиля скорости:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} U''(y) = 0 \quad (1.15)$$

Тогда для асимптотического поведения собственных функций  $\phi$  из уравнения (1.13) при выполнении условия (1.14) для  $y \rightarrow +\infty$  следует

$$\phi \sim e^{-\alpha y}, \quad \phi' \sim -\alpha\phi, \quad (1.16)$$

и для  $y \rightarrow -\infty$

$$\phi \sim e^{\alpha y}, \quad \phi' \sim \alpha\phi, \quad (1.17)$$

Для простоты представления численной оценки собственных значений  $\phi$  задается как

$$\phi \sim \exp\left(\int \Phi dy\right) \quad (1.18)$$

Так, из уравнения (1.13) было получено соответствующее уравнение Риккати в терминах  $\Phi(y)$ :

$$\Phi' = \alpha^2 - \Phi^2 + U''/(U - c) = 0 \quad (1.19)$$

Граничные условия для  $\Phi(y)$  с учетом (1.16)-(1.17) имеют следующий вид:

$$\Phi(-\infty) = -\alpha, \quad \Phi(+\infty) = +\alpha \quad (1.20)$$

Далее в этой работе задается следующий профиль скорости:

$$U(y) = 0.5[1 + \tanh y] \quad (1.21)$$

Поскольку он является несимметричным относительно точки перегиба ( $y = 0$ ), то имеет единственную неустойчивую собственную функцию, а фазовая скорость  $c_r$  является независимой от волнового числа  $\alpha$  и равна:

$$c_r = U(0) = 0.5 \quad (1.22)$$

В нейтральном случае  $c_i$  равно нулю, а уравнение (1.13) записывается в виде:

$$\Phi'' - [\alpha^2 - 2(1 - \tanh^2 y)]\Phi = 0 \quad (1.23)$$

и решение (1.23) для симметричной и несимметричной части представляется в виде:

$$\Phi_1 = \alpha \cosh \alpha y - \sinh \alpha y \tanh y \quad (1.24)$$

$$\Phi_2 = \alpha \sinh \alpha y - \cosh \alpha y \tanh y \quad (1.25)$$

Единственное собственное значение (1.24)-(1.25) в таком случае  $\alpha = 1$ , а собственная функция имеет следующий вид:



$$\phi = \phi_1 = \operatorname{sech} y \quad (1.26)$$

Для того чтобы определить собственные значения в случае  $c_i \neq 0$ , необходимо численно проинтегрировать дифференциальное уравнение (1.19). С этой целью вводится новая независимая переменная

$$z = \tan y \quad (1.27)$$

которая дает возможность уменьшить интервал интегрирования на конечный. Затем, с использованием (1.21) и (1.22), получено следующее уравнение:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{\alpha^2 - \phi^2}{1 - z^2} - \frac{2z}{z - i2c_i} \quad (1.28)$$

Записав отдельно действительную и мнимую часть числа  $\phi = \phi_r + i\phi_i$ , была задана следующая система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_r}{dz} = \frac{\alpha^2 - \phi_r^2 + \phi_i^2}{1 - z^2} - \frac{2z^2}{z^2 + (2c_i)^2} \\ \frac{d\phi_i}{dz} = -\frac{2\phi_r\phi_i}{1 - z^2} - \frac{4c_i z}{z^2 + (2c_i)^2} \end{cases} \quad (1.29)$$

с граничными условиями:

$$\phi_r(1) = -\alpha, \quad \phi_r(-1) = +\alpha \quad (1.30)$$

$$\phi_i(1) = 0, \quad \phi_i(-1) = 0 \quad (1.31)$$

Для двух тривиальных случаев  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0$  функции  $\phi(z)$  имеют вид:

$$\alpha = 1: \quad \phi_r(z) = -z, \quad \phi_i(z) = 0 \quad (1.32)$$

$$\alpha = 0: \quad \phi_r(z) = \frac{z(1-z^2)}{z^2 + (2c_i)^2}, \quad \phi_i(z) = \frac{2c_i(1-z^2)}{z^2 + (2c_i)^2} \quad (1.33)$$

При последующих вычислениях для функций удовлетворялись условия (1.30)-(1.31) для любого  $c_i$ , и решение уже не являлось единственным. Такой метод анализа неустойчивости течения имел очень большое значение при постановке начальных граничных условий для численного моделирования турбулентных течений со свободным слоем смешения в работах [55-56], где в качестве входных начальных условий накладывают возмущения из LST, которые характеризуются значением самой неустойчивой гармоники и ее нескольких субгармоник. В [55] были найдены наиболее неустойчивые значения волновых чисел  $\alpha$  (гармоники), самой неустойчивой гармоникой являлось  $\alpha = 0,4446$ . В [79] была использована такая же методика, как и в [55], а максимальное волновое число (наиболее неустойчивая гармоника) было равно  $\alpha = 0,392$ . Также, в [80] при численном моделировании методом DNS развивающегося по пространству двумерного течения свободного слоя смешения в качестве входных условий для параметров профиля скорости, заданных как

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u', \\ v &= \bar{v} + v' \end{aligned} \quad (1.34)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  – характеристики средней скорости,  $u'$ ,  $v'$  – характеристики пульсаций, приняты:

$$u(y, t) = \bar{u}(y) + \sum_{n=1}^{n_f} \varepsilon_n [\phi_r'(y) \cos(-2\pi(f_n t - \theta_n)) - \phi_i'(y) \sin(-2\pi(f_n t - \theta_n))] \quad (1.35)$$

$$v(y, t) = \bar{v}(y) + \sum_{n=1}^{n_f} \varepsilon_n [(\alpha_r \phi_i(y) + \alpha_i \phi_r(y)) \cos(-2\pi(f_n t - \theta_n)) - (\alpha_i \phi_i(y) \sin(2\pi(f_n t - \theta_n))] \quad (1.36)$$

где  $\phi_r$  и  $\phi_i$  – действительные и мнимые части собственной функции из теории линейной устойчивости [77],  $f_n$  и  $\theta_n$  частота и фаза n-ой гармоники, при которой задается возмущение, параметры  $\varepsilon_n$  были выбраны так, чтобы обеспечить расчет нужной амплитудой возмущения. В качестве гармоник  $n_f$ , которые задавались при возмущениях, были приняты фундаментальная гармоника и одна субгармоника. Наряду с численным моделированием слоя смешения в работе также моделировалось турбулентное течение плоской струи. Для него в результате анализа, проведенного в исследованиях [81,82] было обнаружено появление симметричной и ассиметричной гармоник в окрестности плоской струи. В [80] автор задал обе гармоники в начальных возмущениях, посредством представления возмущенной функции тока следующего вида:

$$\psi = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 \quad (1.37)$$

Поскольку два слоя смешения, появляющиеся у входа сопла, вдувающего струю, являются зеркально отраженными относительно друг друга, то  $\psi_2$  - отражение  $\psi_1$ . Следовательно,  $A_1 = A_2 = 1$ , что является условием для ассиметричной гармоники, а  $A_1 = 1, A_2 = -1$  – условие для симметричной гармоники. С учетом этого входные начальные условия для турбулентного течения с плоской струей заданы следующим образом:

$$\begin{aligned}
u(y, t) = \bar{u}(y) &+ \sum_{n=1}^{n_f} \varepsilon_n \left[ \left( A_1 \phi_r' \left( y - \frac{h}{2} \right) - A_2 \phi_r' \left( -y - \frac{h}{2} \right) \right) \cos(-2\pi t) \right. \\
&\left. - \left( A_1 \phi_i' \left( y - \frac{h}{2} \right) - A_2 \phi_i' \left( -y - \frac{h}{2} \right) \right) \sin(-2\pi(f_n t - \theta_i) \right] \quad (1.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(y, t) = \bar{v}(y) &+ \sum_{n=1}^{n_f} \varepsilon_n \left[ \left( \alpha_r \left( A_1 \phi_i \left( y - \frac{h}{2} \right) + A_2 \phi_i \left( -y - \frac{h}{2} \right) \right) \right. \right. \\
&\left. \left. + \alpha_i \left( A_1 \phi_r \left( y - \frac{h}{2} \right) + A_2 \phi_r \left( -y - \frac{h}{2} \right) \right) \right) \cos(-2\pi(f_n t - \theta_i)) \right. \\
&\left. - \left( \alpha_r \left( A_1 \phi_r \left( y - \frac{h}{2} \right) + A_2 \phi_r \left( -y - \frac{h}{2} \right) \right) \right. \right. \\
&\left. \left. - \alpha_i \left( A_1 \phi_i \left( y - \frac{h}{2} \right) + A_2 \phi_i \left( -y - \frac{h}{2} \right) \right) \right) \sin(-2\pi(f_n t - \theta_i)) \right] \quad (1.39)
\end{aligned}$$

где  $\phi_r$  и  $\phi_i$  - действительные и мнимые части собственной функции из пространственной теории линейной устойчивости [78] для слоя смешения,  $h$  - ширина сопла,  $\frac{h}{2}$  показывает сдвиг между источником струи, находящимся посередине и началом слоя смешения. При моделировании турбулентного течения плоской струи было рассмотрено два режима: струйное течение со скоростью спутного потока  $U_2$ , имеющей тот же порядок, что и скорость струи  $U_1$  (слабая струя), и струйное течение, где скорость струи была значительно выше скорости спутного потока (сильная струя). Результатом исследования [80] является то, что двухмерная численная модель для пространственно развивающегося слоя смешения, разработанная авторами, хорошо моделирует естественное развитие турбулентных структур потока для плоского слоя смешения и для плоской струи (слабой) и дает хорошее совпадение с экспериментами. Профили средних скоростей и рост ширины двумерного слоя смешения также хорошо согласованы с экспериментальными данными, полученными в случае пространственной задачи, несмотря на то, что при расчетах не был представлен переход течения

в трехмерный случай. Вывод, полученный после численного моделирования двухмерных течений со свободным слоем смешения, показывает, что внешние возмущения, накладываемые на течение, привели к сильному начальному увеличению слоя смешения, содержащего нужный перенос энергии в поле задаваемых флуктуаций. Однако за этим сильным увеличением следовала область уменьшения роста слоя, в которой перенос энергии совершался от поля флуктуаций обратно к полю средних скоростей. Далее уже вниз по потоку рост слоя смешения начинал больше напоминать естественный. Такой рост уже не оказывался под влиянием возмущающих сил, наложенных на течение. Двумерное моделирование течений плоской струи (сильной) не дает согласования с экспериментальными данными. Авторы работы [83] моделировали течение недорасширенной сверхзвуковой струи и плоский слой смешения. Также как и [80] здесь расчет турбулентности производился методом DNS. В качестве входных условий был задан гиперболическо-тангенциальный профиль скорости:

$$u(y) = \bar{U} \left[ 1 + \frac{1 - \lambda_u}{1 + \lambda_u} \tanh\left(\frac{y}{2\theta_0}\right) \right] \quad (1.40)$$

где  $\bar{U} = (U_1 + U_2)/2$  – средняя скорость,  $\lambda_u = U_2/U_1$  – отношение скоростей,  $\theta_0$  – толщина слоя смешения. В дополнение к заданному профилю скорости на входе было наложено возмущение с с максимальным значением гармоники из LST [42-44] :

$$v(y, t) = \Delta U G(y) \sum_{m=0}^3 A \sin(2\pi f_m t + \phi_m) \quad (1.41)$$

где  $\Delta U = (U_1 - U_2)$  – разность между двумя скоростями потока, которая показывает силу сдвига,  $G(y)$  – функция Гаусса, имеющая максимальное значение равное единице при  $y = 0$ ,  $A = 0,001$  – амплитуда возмущения,  $f_m$  – основная гармоника (частота) и первые три ее субгармоники,  $\phi_m$  – случайные

фазы. Для того, чтобы избежать осцилляций в областях ударных волн при решении исходных уравнений использовалась WENO-схема высокого порядка. Полученные результаты удовлетворительно согласовались с экспериментальными данными, а численная модель турбулентного течения вместе с WENO-схемой, представленная авторами, может хорошо описывать турбулентные параметры. В работе [84] с помощью метода DNS и теории линейной устойчивости моделируется расчет невязкого двух- и трехмерного переходного течения плоской струи в спутном потоке для чисел Маха меньше единицы. Расчет был произведен для широкого диапазона значений чисел Маха. Результаты, полученные для двумерной задачи, показывают уменьшение скоростей до нулевого значения при конвективном числе Маха равном 0.4, в то время как при трехмерном моделировании скорости также уменьшались, но не принимали значение нуля. Также двумерный расчет привел к появлению областей с очень большими значениями возмущений вниз по потоку в сравнении со скоростью в центре струи, что осложняет моделирование турбулентности. Таким образом, получено, что трехмерный расчет приводит к лучшему согласованию с экспериментальными данными.

Методы прямого численного моделирования (DNS), использованные в работах выше, являясь довольно мощным инструментом расчета турбулентных течений, однако имеют существенный недостаток - для их использования требуются огромные вычислительные ресурсы. Размер ячейки при расчете должен удовлетворять колмогоровскому масштабу длины (1.1), а временной шаг – колмогоровскому масштабу времени (1.3). Это сокращает возможности применения таких методов до расчетов течений с довольно тривиальной геометрией и малыми числами Рейнольдса.

Методы моделирования крупных вихрей (LES) основываются на гипотезе о статистической независимости крупных и мелких вихрей. В таких методах мелкомасштабные структуры исключаются из уравнений Навье-Стокса при помощи, так называемой, пространственной фильтрации. Мелкомасштабные вихри моделируются с использованием отдельных

подсеточных моделей (SGS). LES-методы разрешают крупные вихри, размер которых превышает некоторую заданную величину (эта величина характеризуется шириной фильтра). Они требуют меньших вычислительных ресурсов, в отличие от методов DNS. Также в них шаги сетки и временные интервалы могут быть намного больше колмогоровских. Однако при расчетах методами LES наблюдается уменьшение вихрей вблизи стенки настолько, что размеры энергосодержащих и диссипативных вихрей перекрываются и шаги сетки по времени начинают падать до величин, характерных для DNS моделей.

В связи с этим, в последнее время особое внимание уделяется гибридным методам RANS и LES. В таких методах область или области LES могут быть «встроены» в область RANS. Основной проблемой таких методов является постановка реалистичных характеристик турбулентности на входных границах, т.е. построение нестационарного поля гидродинамических величин. Обзор литературных данных показывает, что в настоящее время существует два способа построения нестационарного поля величин [85], где:

- а) методы рециклинга (метод предварительного моделирования);
- б) методы генерации синтетической турбулентности.

Одной из методик определения турбулентных флуктуаций при расчетах LES или DNS является метод рециклинга, суть которого состоит в проведении дополнительного (предварительного) расчета, предназначенного для того, чтобы обеспечить основной расчет точными входными условиями. Для предварительного расчета могут быть использованы периодические начальные условия в направлении осредненного течения. Тогда параметры течения из выходной плоскости используются заново уже на входе так, что он участвует в генерации новых начальных данных, которые затем применяются в основном расчете, где турбулентное течение оказывается полностью развитым на входе (как, например, в трубах, воздуховодах и

каналах). Моделирование методом рециклинга можно осуществить двумя подходами.

Первый подход: Для задания начальных условий во входной границе рассматриваемого основного расчета турбулентного течения, являющегося полностью развитым, отдельно вводится дополнительная область предварительного расчета, в которой задаются периодические граничные условия. Затем, как было указано выше, полученные из этой области данные используются в качестве начальных входных условий для основного расчета течения. Задачей такого подхода является задание длины этой области дополнительного расчета - она не должна быть слишком маленькой, поскольку в таком случае спектральные характеристики полученного поля в области низких частот не будут соответствовать характеристикам реальной турбулентности. Такой подход задания начальных входных условий применяется также при расчетах турбулентных течений с пограничным слоем. В этом случае поля скорости определяются из данных области развитого течения дополнительного расчета, стоящей на некотором расстоянии от входной границы (для того чтобы попасть в область, где пограничный слой уже достаточно развит). Затем данные перемасштабируются с учетом толщины пограничного слоя и оперируются уже в основном расчете, при этом такое перемасштабирование вносит некоторые погрешности в поля компонент скоростей во входном сечении.

Второй подход: Область рассматриваемого основного течения расширяется вниз по потоку до той части области, в которой возмущения скорости будут статистически установившимися. Затем поля скоростей из этой области переносятся на входную границу. Однако, для того чтобы получить такую область со статистически установившимся уровнем возмущений скорости, нужно производить расчет в основной области в течении всего интервала времени.

Анализ работ показывает, что в методах рециклинга на входной границе течение задается профилем средних скоростей вместе с несколькими



неустойчивыми гармониками Фурье [86, 87]. Такой метод моделирования турбулентности был представлен в работах [87, 88]. В [87] методом рециклинга были получены входные данные для течения в плоском асимметричном диффузоре. Таким же способом генерировались начальные входные условия для LES-расчета в течении со слоем смешения авторами [89], а в [90] был проведен расчет течения в канале с переменным поперечным сечением, где были получены входные данные для LES с областью с изгибом в 180 градусов. Еще один пример применения методов рециклинга был представлен в [91], где моделировалось двухпериодичное течение в коаксиальной трубе и входные данные были получены для внутренней LES-секции коаксиального сопла сгорания. Периодичные начальные условия, генерируемые в рассмотренном методе, могут быть использованы для задания начальных условий только для течений, являющихся однородными в направлении потока, что ограничивает их применение до простых полностью развитых течений.

В отличие от описанных выше методов рециклинга в методах генерации синтетической турбулентности не ведется предварительный расчет, здесь в основном задаются начальные данные с использованием генераторов случайных чисел для построения случайного сигнала скорости, схожего с турбулентностью. Они базируются на основополагающем предположении о том, что турбулентный поток может быть воспроизведен набором статистических данных, как, например, средняя скорость, турбулентная кинетическая энергия, Рейнольдсовы напряжения, двухпараметрические пространственные и временные корреляции. На данный момент разработано большое количество методов генерации синтетической турбулентности. Такие методы можно разделить на две группы: методы, работающие в физическом пространстве (алгебраические) и методы, работающие в пространстве Фурье (спектральные).

В алгебраических методах [85] для генерации синтетических флуктуаций используются независимые случайные величины  $\tau_i$ ,

соответствующие нормальному распределению  $N(0,1)$  с нулевым средним  $M = 0$  и единичной дисперсией  $\sigma = 1$ , и перемасштабированные так, что полученные флуктуации приводят к корректному значению турбулентной кинетической энергии  $k$ . Таким образом, скорость потока задается в виде:

$$u_i = U_i + r_i \sqrt{\frac{2}{3}k} \quad (1.42)$$

где  $U$  - профили средних скоростей, а  $r_i$  – вышеуказанные независимые случайные переменные каждой компоненты скорости в каждой точке и на каждом временном шаге. Операция (1.42) генерирует случайный сигнал скорости, который воспроизводит необходимые среднюю скорость и профиль кинетической энергии. Для построения такого сигнала задается тензор напряжений Рейнольдса  $R_{ij}$ , известный из экспериментов, для которого используется разложение Холецкого  $a_{ij}$ . Полученный сигнал должен соответствовать тензору напряжения  $R_{ij}$ .

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Задаваемый профиль скорости имеет вид:

$$u_i = \bar{U}_i + r_j a_{ij} \quad (1.44)$$

где

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \sqrt{u'^2} & 0 & 0 \\ \frac{v'u'}{a_{11}} & \sqrt{v'^2 - a_{21}^2} & 0 \\ \frac{w'u'}{a_{11}} & \frac{(w'v' - a_{21}a_{31})}{a_{32}} & \sqrt{w'^2 - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Такая операция позволяет получить нужные перекрестные корреляции  $R_{ij}$  между компонентами скорости  $i$  и  $j$  при условии, что случайные данные удовлетворяют необходимым условиям  $\langle r_i r_j \rangle = \delta_{ij}$  и  $\langle r_i \rangle = 0$ . Это тот случай, когда  $r_i$  являются независимыми случайными числами, взятыми из нормального распределения  $N(0, 1)$ .

Метод, описанный выше, тем не менее, может не приводить корреляций по пространству, либо по времени. Так в работе [92] было показано, что входные условия для развивающегося в пространстве пограничного слоя, сгенерированные вышеописанным способом, привели к ламинаризации течения до той точки расчета, где имел место переход, и начинала развиваться реальная турбулентность. Авторы [93] отмечают, что рассматриваемый подход приводит к тому, что результаты оказываются аналогичными полученным при задании ламинарного профиля в форсунке турбулентного сопла. Также алгебраический метод был использован в [94] для моделирования течения в форсунке круглой турбулентной струи, и авторами было показано, что случайные флуктуации были почти моментально рассеяны в направлении вниз по течению. Так турбулентная струя была обеспечена почти ламинарным профилем, что подтверждает исследования, проведенные в работе [94].

Предложенной альтернативой алгебраическим методам являются спектральные методы, основанные на разложении сигнала на гармоники Фурье. Первым, кто применил разложение Фурье для генерации синтетического поля течения, был автор [95]. Разложение сигнала в ряд Фурье:

$$\vec{u}'(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \hat{u}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (1.46)$$

где  $\vec{k}$  – трехмерное волновое число. Каждый коэффициент Фурье  $\hat{u}_{\vec{k}}$  задает определенную амплитуду, которая рассчитывается из заданного энергетического спектра  $E(|\vec{k}|)$  и случайной фазы  $\theta_{\vec{k}}$ , с единым распределением на интервале  $[0, 2\pi]$ . Синтезированное поле скоростей тогда:

$$\vec{u}'(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \sqrt{E(|\vec{k}|)} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \theta_{\vec{k}})} \quad (1.47)$$

Для этого подхода в работе [96] была использована RANS-LES-модель при изучении однородной изотропной турбулентности, затухающей со временем плоского слоя смешения. Адаптацию этого метода применительно к входным граничным условиям в моделировании пространственно развивающихся турбулентных течений с пограничным слоем можно найти в [97]. При численном моделировании авторы предполагают, что поток развивается в направлении  $x$ . Тогда сигнал, заданный на входе, является однородным в направлениях  $y$  и  $z$  и стационарен по времени. Такой сигнал можно разложить по гармоникам Фурье, как в уравнении (3.46), с коэффициентами Фурье, вычисленными из энергетического спектра, заданного в значениях частот и двух волновых чисел в направлениях  $y$  и  $z$ :

$$\hat{u}(k_y, k_z, \omega, t) = \sqrt{E(k_y, k_z, \omega)} \exp(i\phi(k_y, k_z, \omega, t)) \quad (1.48)$$

где  $\phi$  - фазы, зависимые от времени для того, чтобы избежать периодического сигнала. Трехмерный энергетический спектр  $E(|\vec{k}|)$  был задан со значением  $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ , а волновое число  $k_x$  представлено в виде  $k_x = \omega/U_0$  (где  $U_0$  средняя скорость конвекции,  $\omega$ - частота), тогда энергетический спектр становится функцией  $E(k_y, k_z, \omega)$ . В работе [98]

возмущения были сгенерированы спектральным методом для трехмерного турбулентного течения в канале с резким односторонним расширением. Для расчета использовалась модель DNS. Уравнение (1.44) было перемасштабировано так, что построенные флуктуации соответствовали заданному тензору напряжений Рейнольдса, известному из экспериментальных данных. Результат показывает, что при расчетах, несмотря на трудности моделирования трехмерного течения, восстановить правильные статистические данные пограничного слоя авторам удалось не более чем за 12 толщин пограничного слоя вниз по течению, что является неплохим показателем. Еще одним примером генерации синтетической турбулентности является работа [99], где моделировались методом RANS-LES течения в несимметричном диффузоре, вокруг трехмерной возвышенности и в нижней части впадины. Синтетические флуктуации на входе были представлены в виде:

$$u'_i(x_j) = 2 \sum_{n=1}^N \hat{u}^n \cos(k_j^n x_j + \psi^n) \sigma_i^n \quad (1.49)$$

где  $\hat{u}^n$ ,  $\psi^n$ ,  $\sigma_i^n$  – амплитуда, фаза и направление моды Фурье соответственно. Максимальное волновое число определялось на основе сеточного разрешения  $k_{max} = 2\pi/(2\Delta)$ , а минимальное определялось из соотношения  $k_1 = k_g/p$ , где  $k_g$  соответствовало энергосодержащим вихрям,  $p$  было больше единицы. В качестве амплитуды была принята динамическая скорость  $u_\tau$ , причем среднеквадратичные значения флуктуаций ( $RMS = \sqrt{\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{3}}$ ) были равны динамической скорости на входе, т.е.  $u_{rms} = v_{rms} = w_{rms} = u_{\tau,in}$ , и использовался энергетический спектр фон Кармана. Каждая реализация возмущений скорости соответствует начальным возмущениям на одном временном шаге. Поскольку все реализации были независимыми, корреляции по времени заданных входных турбулентных

возмущений оказались равными нулю, что не соответствовало физике течения. Для того чтобы получить корреляции по времени был введен так называемый ассиметричный фильтр по времени, содержащий турбулентный временной масштаб:

$$\langle u'_i \rangle^m = a \langle u'_i \rangle^{m-1} + b (u'_i)^m \quad (1.50)$$

где  $m$  – шаг по времени,  $a = \exp(-\Delta t / T)$ . Вторым коэффициентом  $b = (1 - a^2)^{0.5}$  дает  $\langle u'^2_i \rangle = \langle u'^2_{i,0} \rangle$ , где  $\langle \cdot \rangle$  - операция осреднения. Начальные граничные условия были следующие:

$$\bar{u}_i(\mathbf{0}, y, z, t) = U_{i,in}(y) + u'_{i,in}(y, z, t) \quad (1.51)$$

где  $u'_{i,in} = (u'_i)^m$ .  $U_{i,in}(y)$  - средние входные профили скорости известные из экспериментов. Такой же метод генерации синтетической турбулентности с некоторыми модификациями при построении фазовых корреляций был применен авторами исследований [100, 101] для RANS-LES модели.

При расчетах, приведенных выше, построенное поле возмущений скорости, приводит к тому, что энергия вихреобразования распределяется по всем волновым числам (т.е. вихрям), одинаково. Как в крупномасштабных, так и в мелкомасштабных вихрях содержится одинаковое количество энергии, что приводит к переизбытку ее в маленьких вихрях и очень быстрой ее диссипации. Т.е. наблюдается отсутствие каскада энергии от больших вихрей к малым и, как следствие, турбулентность затухает очень быстро, что затрудняет процесс расчета и моделирования. Для того чтобы избежать негативных последствий, авторы представленных ниже работ рассмотрели методы введения так называемой анизотропности в рассматриваемую задачу. Так, например, в работе [102] на основе гибридной модели RANS-LES были рассчитаны четыре вида течений: развитое турбулентное течение в плоском канале, течение в турбулентном пограничном слое на плоской пластине,

течение в плоском слое смешения, а также обтекание выпуклости на плоской поверхности. Скорость на границе между RANS и LES областями, где генерируется синтетическая турбулентность, задана в виде:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \bar{U}(\vec{r}) + \vec{u}'(\vec{r}, t) \quad (1.52)$$

где  $\bar{U}(\vec{r})$  - поле средних скоростей, которое является известным из RANS-расчета, а  $\vec{u}'(\vec{r}, t)$  - искомое поле синтетической турбулентности, которое строится таким образом, чтобы соответствующий тензор вторых моментов  $\langle u'_i u'_j \rangle$  был равен заданному тензору напряжений Рейнольдса  $R_{ij}$ , также известному из RANS. Для того, чтобы выполнялось это условие, к  $R_{ij}$  применяется разложение Холецкого (1.45). Тогда поле синтетической турбулентности представлено в виде:  $u'_i(\vec{r}, t) = a_{ij}(\vec{r})v'_j(\vec{r}, t)$ , где  $\vec{v}'(\vec{r}, t)$  - вспомогательное поле пульсаций, удовлетворявшее условиям  $\langle v'_i \rangle = 0$ ,  $\langle v'_i v'_j \rangle = \delta_{ij}$ , а  $a_{ij}$  - разложение Холецкого. При этом задача генерации поля  $\vec{u}'(\vec{r}, t)$  сводится к генерации вспомогательного поля  $\vec{v}'(\vec{r}, t)$ , представленного в виде:

$$v'_i(\vec{r}, t) = 2\sqrt{3/2} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} \left[ \sigma^n \cos \left( k^n \vec{d}^n \cdot \vec{r} + \varphi^n + s^n \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (1.53)$$

где  $N$  - число гармоник, определяемое в процессе расчета,  $k^n$  - модуль вектора волнового числа  $n$ -ой гармоники, определяемый ортом  $\vec{d}^n$ , равномерно распределенным по сфере,  $\sigma^n$  - орт, определяющий направление  $n$ -ой гармоники скорости и лежащий в плоскости, нормальной к вектору  $\vec{d}^n$ , направление этого орта задается углом, являющимся случайным и равномерно распределенным в интервале  $[0, 2\pi)$ ,  $\varphi^n$  - случайная фаза, также равномерно распределенная в интервале  $[0, 2\pi)$ ,  $s^n$  - случайная безразмерная круговая частота с нормальным распределением, со средним и стандартным отклонением, равными  $2\pi$ . Нормированные амплитуды  $q^n$ , равные

$$q^n = \frac{E(k^n)\Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k^n)\Delta k^n}, \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1 \quad (1.54)$$

вычислялись с использованием модифицированного безразмерного энергетического спектра фон Кармана:

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{[1 + 2.4(k/k_e)^2]^{17/6}} f_\eta f_{cut} \quad (1.55)$$

Введенные в (1.55) эмпирические функции  $f_\eta = \exp[-(12k/k_\eta)^2]$ ,  $f_{cut} = \exp\left(-\left[\frac{4\max(k-0.9k_{cut}, 0)}{k_{cut}}\right]^3\right)$  предназначались для того, чтобы учитывать изменение формы спектра при приближении к колмогоровскому волновому числу  $k_\eta = 2\pi/l_\eta = 2\pi/(v^3/\varepsilon)^{1/4}$  и для обеспечения его быстрого падения в окрестности, максимально разрешаемого на используемой сетке волнового числа

$$k_{cut} = \frac{2\pi}{l_{cut}} \quad (1.56)$$

где  $l_{cut}$  – минимальная длина волны заданна выражением:

$$l_{cut} = 2\min\{\max(h_y, h_z, 0.3h_{max}) + 0.1d_w, h_{max}\} \quad (1.57)$$

где  $h_y, h_z$  - локальные шаги сетки во входном сечении LES,  $h_{max} = \max(h_x, h_y, h_z)$ , а  $d_w$  - расстояние от рассматриваемой точки до стенки. Входящее в (1.55) число  $k_e$  соответствовало длине волны наиболее энергонесущих гармоник синтезированного поля возмущений или, по-другому, размеру наиболее энергонесущих вихрей синтетической турбулентности  $l_\varepsilon$ . Эта величина задавалась следующим образом:



$$l_e = \min(2d_w, C_l l_t) \quad (1.58)$$

где  $C_l = 3$  - эмпирическая константа, а  $l_l$  - линейный масштаб модели турбулентности, который использовался в RANS-области течения. Набор векторов волновых чисел, который использовался при генерации турбулентности, был общим для всего входного течения LES – области, а модули их были заданы по закону геометрической прогрессии:

$$k^n = k^{min} \cdot (1 + \alpha)^{n-1}, \quad n = 1 \div N, \quad \alpha = 0.01 \div 0.05 \quad (1.59)$$

где

$$k^{min} = \beta k_e^{min}, \quad \beta < 1, \quad k_e^{min} = 2\pi/l_e^{max}, \quad l_e^{max} = \max\{l_e\} \quad (1.60)$$

где  $\beta = 0.5$  - эмпирическая константа,  $N$  – число гармоник, которое определялось как максимальное целое число, для которого  $k^N$  было не больше  $k_{max} = 1.5 \max\{k_{cut}\}$ .

Для того чтобы полностью сформулировать алгоритм генерации турбулентности также необходимо определить временной масштаб  $\tau$ , входивший в (1.53):

$$\tau = \frac{C_t l_e^{max}}{\bar{U}} \quad (1.61)$$

где  $C_t = 2$  - эмпирическая константа, а  $\bar{U}$  - среднее значение скорости во входном сечении. В результате численного моделирования турбулентных течений с применением такой методики для гибридных моделей RANS-LES авторы получили близкие к реальным турбулентные структуры, хорошо согласованные с экспериментом. Также авторам удалось корректно ввести условия анизотропности в поля флуктуаций скорости. Еще один пример

использования гибридных моделей RANS-LES для генерации синтетической турбулентности на входе в LES-область с учетом анизотропности был представлен в [103], где моделировались три вида пространственных течений: течение с пограничным слоем, течение с плоским сдвигом, а также течение кильватерной струи. Авторами разработан генератор моделирования течения со случайными величинами. Изложим вкратце процедуру генерации синтетической турбулентности (придерживаясь терминологии авторов этой работы).

Задается анизотропный тензор корреляции скоростей:

$$r_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} \quad (1.62)$$

турбулентного течения  $\{\tilde{u}_i(x_j, t)\}_{i,j=1..3}$ , для которого найден тензор ортогонального преобразования  $a_{ij}$ , диагонализующий тензор  $r_{ij}$

$$a_{mi} a_{nj} r_{ij} = \delta_{mn} c_n^2 \quad (1.63)$$

$$a_{ik} a_{kj} = \delta_{ij} \quad (1.64)$$

В результате  $a_{ij}$  и  $c_n$  являются известными функциями, где коэффициенты  $c_n = \{c_1, c_2, c_3\}$  - турбулентные скорости флуктуаций  $(u', v', w')$  в новой, преобразованной посредством тензора  $a_{ij}$ , системе координат. Далее моделируется генератор синтетической турбулентности на входе LES-области:

$$v_i(\vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N [p_i^n \cos(\tilde{k}_j^n \tilde{x}_j + \omega_n \tilde{t}) + q_i^n \sin(\tilde{k}_j^n \tilde{x}_j + \omega_n \tilde{t})] \quad (1.65)$$

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad c = \frac{l}{\tau}, \quad \tilde{k}_j^n = k_j^n \frac{c}{c_{(j)}} \quad (1.66)$$

$$p_i^n = \varepsilon_{ijm} \zeta_j^n k_m^n, \quad q_i^n = \varepsilon_{ijm} \xi_j^n k_m^n \quad (1.67)$$

$$\zeta_j^n, \xi_j^n, \omega_n \in N(0, 1), \quad k_i^n \in N(0, 1/2) \quad (1.68)$$

где  $N$  - количество гармоник,  $p_i^n, q_i^n$  - амплитуды, представленные формулой (1.67), где  $\varepsilon_{ijk}$  - тензор перемещения, использованный в операции умножения вектора,  $\zeta_j^n, \xi_j^n$  - случайные величины из нормального распределения, с нулевым средним и стандартной девиацией, равной 1,  $k_j^n$  - волновое число,  $\omega_n$  - частота,  $l, \tau$  масштабы длины и времени турбулентности соответственно. Модулируемый турбулентный энергетический спектр имеет следующий вид:

$$E(k) = 16 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^4 \exp(-2k^2) \quad (1.69)$$

На поле скорости течений  $v_i$  применяется операция масштабирования и преобразования для получения нового поля  $u_i$

$$w_i = c_{(i)} v_{(i)} \quad (1.70)$$

$$u_i = a_{ik} w_k \quad (1.71)$$

где (1.70) - операция масштабирования, (1.71) - операция ортогонального преобразования. В результате применения данной методики при численном моделировании турбулентных течений гибридными моделями RANS-LES были поставлены корректные начальные входные условия для LES-области с учетом условий анизотропности, которые были протестированы авторами как для переходных течений, так и для течений с более высокими числами Маха. Авторы [104] в своем исследовании также генерируют синтетическую турбулентность для гибридных RANS-LES моделей и, наряду с ними, для моделей LES-SGS при численном моделировании зависимых от времени и неоднородных турбулентного слоя смешения и течения с пограничным слоем. В работе используется

модифицированный генератор синтетической турбулентности, представленный в [103]: для случайного вектора скорости  $u_i = u_{ik} v_k$ , где  $u_{ik}$  - разложение Холецкого, поле синтетических турбулентных скоростей задается в виде:

$$v_i(x_j, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N \left[ p_i^n \cos \left( 2\pi \left[ \frac{\hat{d}_j^n x_j}{L} + \omega^n t / \tau \right] \right) + q_i^n \sin \left( 2\pi \left[ \frac{\hat{d}_j^n x_j}{L} + \omega^n t / \tau \right] \right) \right] \quad (1.72)$$

где амплитуды  $p_i^n$ ,  $q_i^n$  определяются с помощью (1.68)-(1.69), случайные частоты  $\omega^n = N(1, 1)$  имеют нормальное распределение  $N(\mu, \sigma^2)$  с единичным средним  $\mu = 1$  и единичной вариацией  $\sigma^2 = 1$ , а  $\hat{d}_j^n$  - модифицированные волновые числа, полученные путем умножения отношения масштаба скорости к  $c^n$ :

$$\hat{d}_j^n = d_j^n \frac{V}{c^n}, \quad V = L/t \quad (1.73)$$

Где

$$c^n = \sqrt{\frac{3u'_i u'_m d_i^n d_m^n}{2d_k^n d_k^n}} \quad (1.74)$$

для  $d_i^n$  - волновых чисел задано условие

$$d_i^n = N(0, 1/2) \quad (1.75)$$

Построенная таким образом модель была названа авторами как улучшенная модель неоднородной синтетической турбулентности и является моделью синтетической турбулентности с анизотропным и неоднородным полем скоростей.

Таким образом, спектральные методы или методы разложения сигнала скорости по гармоникам Фурье могут быть применимы при постановке

начальных входных условий различных видов турбулентных течений. Наряду с расчетом уже известной в практике изотропной однородной турбулентности, эти методы также могут быть модифицированы для случая неизотропного неоднородного турбулентного потока, давая возможность моделировать более реальное поведение турбулентности.

### **1.5 Выводы по главе**

Выше проведенный анализ позволяет сделать следующее заключение, что несмотря на то что закономерности сверхзвуковых турбулентных течений с вдувом струй в каналах являются предметом интенсивного изучения основными проблемами остаются :

- численные методы решения уравнений Навье-Стокса;
- многокомпонентность смеси;
- вдува поперечной струи водорода и гелия в канале;
- пространственный характер вдува поперечной струи;
- турбулентность течения

Вышеуказанные проблемы определили основные задачи диссертационной работы:

разработать методику решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения многокомпонентной газовой смеси, основанную на WENO (Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes) схеме;

решить с помощью разработанного численного метода задачу сверхзвукового течения в канале с падающей ударной волной с верхней стенки канала;

установить влияние основных параметров на взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем в условиях отрывного и безотрывного течения;

численно изучить задачу сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с поперечным вдувом струи водорода и гелия в диапазоне от низких до высоких температур;

определить влияние основных параметров на ударно-волновую структуру течения, возникающую при взаимодействии вдуваемой струи со стенками канала и смешение водорода с воздухом;

решить численным методом задачу сверхзвукового течения совершенного газа в канале с поперечным вдувом круглых струй с умеренными и большими параметрами нерасчетности;

исследовать структуру пространственного течения перед и за вдуваемой струей в зависимости от нерасчетности;

построить математическую модель турбулентного течения струи совершенного газа в спутном потоке на основе LES (Large Eddy Simulation) модели турбулентности и спектральных методов задания реальной турбулентности.

установить влияние основных режимных параметров на механизм взаимодействия струи с натекающим сверхзвуковым потоком;

## **ГЛАВА II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

Как было указано в состоянии проблемы большинство существующих на данный момент работ по теоретическому изучению взаимодействия струи и набегающего потока в канале в основном рассматривают область вдува струи, и при этом, как правило, на верхней границе реализуются граничные условия симметрии или свободного потока, что значительно облегчает решение поставленной задачи. Однако практический интерес сверхзвукового течения с вдувом струй в канале связан с возникающими нагрузками как на верхнюю, так и на нижнюю стенки канала. Ввиду чрезвычайной сложности взаимодействия ударных волн с пограничными слоями данная задача

рассматривается в двух постановках. В одной из постановок изучается взаимодействие ударной волны, с пограничным слоем на стенке [44-46]. Из литературы [49] известно формирование физических механизмов взаимодействия пограничного слоя с падающей ударной волной, которые состоят в следующем: в основании ударной волны, достигшей пограничного слоя на стенке формируется сложная  $\lambda$ -образная структура и происходит отрыв пограничного слоя. Схематическая картина взаимодействия ударной волны с пограничным слоем на стенке приведена на рисунке 2.1. Здесь 1 – головной скачок уплотнения, падающий на стенку, 2 – волна сжатия, 3 – отраженный скачок уплотнения, 4- веер волн разряжения, 5 – волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока, S- точка отрыва потока, R- точка присоединения потока. Из рисунка следует, что головной скачок 1, достигая верхней границы, создает положительный градиент давления, который оказывается достаточным для отрыва погранслоя на верхней стенке. При этом сверхзвуковая область пограничного слоя отклоняется и порождает волну сжатия 4, которая распространяется в виде отраженного скачка 5.

Механизм же взаимодействия вдуваемой струи с натекающим потоком рассматривается, как правило, в упрощенной постановке, то есть с граничными условиями симметрии на верхней границе. На сегодняшний день эта проблема в плоском случае достаточно хорошо изучена и подробно изложена в литературе, особенно для одноатомного газа. Однако для многокомпонентного газа проблема не изучена до конца. Это связано не только со сложностью численной реализации характера течения и многокомпонентностью рассматриваемого газа, но и с наличием верхней стенки, что требует надежных численных методов расчета.

Основной целью глав 2 и 3 является численное моделирование взаимодействия поперечной струи, вдуваемой с нижней стенки плоского канала с сверхзвуковым турбулентным потоком многокомпонентной газовой смеси и изучение влияния таких параметров потока как ширина щели,

отношение давления в потоке и струе на механизмы взаимодействия ударно-волновой структуры с пограничными слоями как на нижней так и на верхней стенках и на глубину проникновения струи в набегающий поток. Для этого предварительно в главе 2 для тестирования предлагаемой методики численного решения исходных уравнений Навье-Стокса рассматривается взаимодействие падающего скачка уплотнения с пограничным слоем. Здесь для поставленной задачи разрабатывается методика решения исходных уравнений, основанная на WENO-схеме четвертого порядка точности а также изучение влияния числа Маха набегающего потока и угла генератора скачка уплотнения на ударно-волновую структуру.

## 2.1 Постановка задачи

Рассматривается плоское сверхзвуковое течение воздуха в канале при наличии падающей ударной волны с верхней стенки. Схема картины течения представлена на рисунке 2.1.

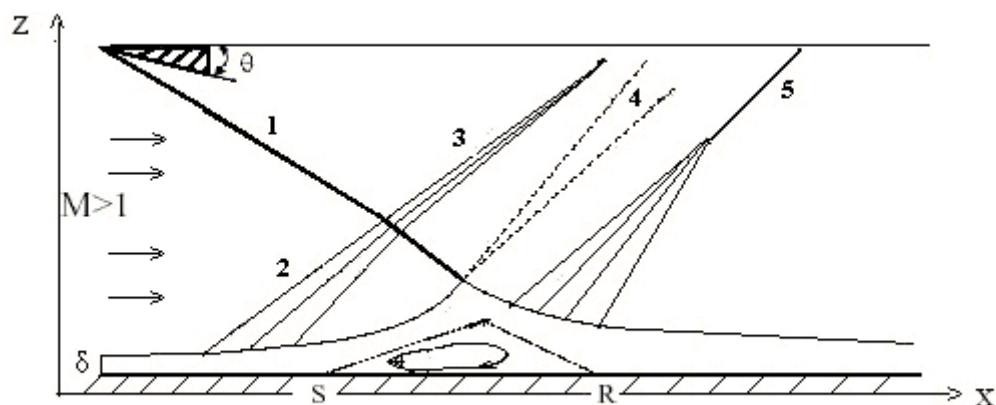


Рисунок 2.1 – Схема течения

Исходной является система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:



$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

здесь векторы  $\vec{U}, \vec{E}, \vec{F}$  имеют следующий вид:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \\ \rho Y_k \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u w \\ (E_t + p)u \\ \rho u Y_k \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)w \\ \rho w Y_k \end{pmatrix},$$

а  $\vec{E}_v, \vec{F}_v$  содержат диссипативные члены вида

$$\vec{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + u\tau_{xz} - q_x \\ J_{kx} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \\ w\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z \\ J_{kz} \end{pmatrix},$$

$Y_k$  - массовая концентрация  $k$ -ой компоненты,  $k=1\dots N$ , где  $N$  - число компонент смеси газов.

Уравнение состояния смеси совершенных газов имеет вид:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} \quad (2.2)$$

где  $W = \left( \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1}$  молярный вес смеси всех газов, причем

$$\sum_{k=1}^N Y_k = 1.$$

## Уравнения для полной энергии

$$E_t = \frac{\rho h}{\gamma_\infty M_\infty^2} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \quad (2.3)$$

где  $h = \sum_{k=1}^N Y_k h_k$  удельная энтальпия смеси,

(2.4)

$$h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT - \text{удельная энтальпия } k\text{-ой компоненты.}$$

Удельные теплоемкости при постоянном давлении для каждой компоненты  $c_{pk}$  вычисляются через молярные удельные теплоемкости  $C_{pk}$  по формуле:

$$c_{pk} = C_{pk} / W$$

где  $C_{pk}$  определяются по экспериментальным данным при помощи полиномиальной интерполяции четвертого порядка по температуре:

$$C_{pk} = \sum_{i=1}^5 \bar{a}_{ki} T^{(i-1)} \quad \text{где} \quad \bar{a}_{jk} = a_{jk} T_\infty^{j-1}$$

Численные значения эмпирических констант  $a_{jk}$  взяты из таблицы JANAF [105, с.35] при нормальном давлении ( $p = 1$  атм) и стандартной температуре  $T^0 = 293$  К и приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 - Значения эмпирических констант  $a_{jk}$

$300K \leq T \leq 1000K$		$O_2$	$N_2$	$OH$
$T > 1000K$				
$a_{1k}$	0.30667095E+01	0.36122139E+01	0.28532899E+01	0.28897814E+01
	0.33553514E+01	0.37837135E+01	0.37044177E+01	0.38737300E+01
$a_{2k}$	0.57473755E-03	0.74853166E-03	0.16022128E-02	0.10005879E-02
	0.50136144E-03	0.30233634E-02	0.14218753E-02	0.13393772E-02
$a_{3k}$	0.13938319E-07	0.19820647E-06	0.62936893E-06	0.22048807E-06
	0.23006908E-06	0.99492751E-05	0.28670392E-05	0.16348351E-05
$a_{4k}$	0.25483518E-10	0.33749008E-10	0.11441022E-09	0.20191288E-10
	0.47905324E-09	0.98189101E-08	0.12028885E-08	0.52133639E-09
$a_{5k}$	0.29098574E-14	0.23907374E-14	0.78057465E-14	0.39409831E-15
	0.48522585E-12	0.33031825E-11	0.13954677E-13	0.41826974E-13
$a_{6k}$	0.86547412E+03	0.11978151E+04	0.89008093E+03	0.38857042E+04
	0.10191626E+04	0.10638107E+04	0.10640795E+04	0.35802348E+04
$a_{7k}$	0.17798424E+01	0.36703307E+01	0.63964897E+01	0.55566427E+01
	0.35477228E+01	0.36416345E+01	0.22336285E+01	0.34202406E+00

Тензоры вязких напряжений и потоки тепла принимают следующий вид:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left( 2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{zz} = \frac{\mu}{Re} \left( 2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left( \frac{\mu}{PrRe} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{xk}, \quad q_z = \left( \frac{\mu}{PrRe} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{zk}.$$

Диффузионные скорости описываются законом Фика [106, с.24]:

$$J_{kx} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{kz} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Исходная система уравнений (2.1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе

$(u_\infty, \rho_\infty, T_\infty, W_\infty)$ , давление и полная энергия отнесены к значению  $\rho_\infty u_\infty^2$ , удельная энтальпия отнесена к  $R^0 T_\infty / W_\infty$ , молярные удельные теплоемкости к  $R^0$ , характерным параметром длины является ширина щели.

## 2.2 Определение коэффициента динамической вязкости

Коэффициент динамической вязкости представляется в виде суммы  $\mu_\Lambda$  - молекулярной вязкости и  $\mu_t$  - турбулентной вязкости:

$$\mu = \mu_\Lambda + \mu_t . \quad (2.5)$$

Молекулярная вязкость смеси находится из формулы Уилке [106, с.18]:

$$\mu_\Lambda = \sum_{i=1}^N \frac{X_i \mu_i}{\Phi_i} ,$$

где функция  $\Phi_i$  задается следующим образом:

$$\Phi_i = \sum_{r=1}^N X_r \left[ 1 + \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_r}} \left( \frac{W_r}{W_i} \right)^{1/4} \right]^2 \left[ \sqrt{8} \sqrt{1 + \frac{W_i}{W_r}} \right]^{-1}$$

$\mu_i$  - молекулярная вязкость,  $i$  - ой компоненты , которая вычисляется по следующею формуле [106, с.16]:

$$\mu_i = \frac{\mu_{i\infty}}{\mu_{\Lambda\infty}} \sqrt{W_i T_\infty}$$

где 
$$\mu_{i\infty} = 2.6693 * 10^{-7} \frac{\sqrt{W_{i\infty} T_\infty}}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2.2)*} (T_i^*)} , \mu_{\Lambda\infty} = \sum_{i=1}^N \frac{X_i \mu_{i\infty}}{\Phi_i} . \quad (2.6)$$

В выражении (2.6)  $\sigma_i$  - диаметр столкновения  $i$ -ой компоненты, значения которых приведены в [107]:

$$\sigma_1 = 2.63 ; \quad \sigma_2 = 3.30 ; \quad \sigma_3 = 3.5 ; \quad \sigma_4 = 3.050 ; \quad \sigma_5 = 0.50 ; \\ \sigma_6 = 0.560 ; \quad \sigma_7 = 3.50.$$

$\Omega_i^{(2.2)*}$  -интеграл соударений для переноса импульса,

$T_i^*$  -  $kT/\varepsilon_i$  - характеристическая температура,

$\frac{\varepsilon_i}{k}$  - параметр потенциальной функции межмолекулярного

взаимодействия. В соответствии с работой [106, с.17]  $\Omega_i^{(2.2)*}(T_i^*)=1$ .

### 2.3 Определение коэффициента турбулентной вязкости

Для замыкания системы уравнений (2.1) математическая модель должна правильно описывать турбулентные характеристики. На данный момент существует достаточное количество моделей турбулентности (осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса RANS, метод крупных вихрей LES, прямое численное моделирование DNS) которые замыкают исходную систему уравнений - от модели пути смешения Прандтля до более сложных моделей. Как известно, многие из них основаны на понятиях турбулентной вязкости  $\mu_t$ . Модель для описания турбулентной вязкости впервые была предложена Прандтлем [108]. Эта модель известна как гипотеза пути смешения. Доказано, что во многих случаях она хорошо воспроизводит тонкие вязкие слои. Рассматривая осредненные течения с единственным ненулевым градиентом скорости  $\frac{\partial U}{\partial y}$ , Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости  $l_m$  равен градиенту скорости осредненного течения, умноженному на характерный масштаб длины:

$$v_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Длина пути смешения должна определяться эмпирически. Успех этой модели объясняется тем, что для многих простых случаев со сдвигом эта величина может быть задана относительно несложными формулами. Например, для свободных слоев со сдвигом  $l_m$  можно полагать константой, пропорциональной толщине слоя:

$$l_m = \chi y$$

где  $\chi$  - постоянная Кармана, равная 0.4.

На сегодняшний день существуют различные достаточно популярные алгебраические модели турбулентности. Например, двухслойная модель Себеси-Смита. В этой модели содержатся величины, определенные исключительно для течений типа пограничного слоя, и поэтому не может быть без существенных изменений применена к более сложным турбулентным течениям. Модель Болдуина-Ломакса (1978) была сформулирована для использования в расчетах, где такие характеристики турбулентного пограничного слоя (ТПС), как толщина пограничного слоя и скорость на границе, с трудом поддаются определению. Такая ситуация возникает при численном моделировании отрывных течений, в особенности для течений со скачками уплотнения. Вблизи стенки коэффициент турбулентной вязкости задавался следующим образом:

$$\mu_t = \rho l^2 |\Omega|,$$

где  $\Omega$  - завихренность,  $l = \chi z \left[ 1 - e^{-z^+ / A} \right]$  - длина пути перемешивания,  $\chi = 0,41$ ,  $A = 26$ .

Вдали от стенки было принято:

$$\mu_t = 0,0168\rho V_0 L_0$$

$$\text{где } L_0 = 1,6 z_{\max} I^k, V_0 = \min[F_{\max}; 0,25 q_{dif}^2 / F_{\max}],$$

$$q_{dif} = \max(\vec{V}) - \min(\vec{V}), \vec{V} = \sqrt{u^2 + w^2},$$

$$I^k = \left[1 + 5,5(0,3z/z_{\max})^6\right]^{-1} - \text{ограничивающий множитель Клебанава,}$$

$$F_{\max} = \max(|\Omega|l/\chi), \text{ где } z_{\max} \text{ соответствует } F_{\max}.$$

Модель Болдуина-Ломакса, как и модель Себеси–Смита, двухслойная. Но так же, как и в модели пути смешения, ограниченность моделей такого типа заключается в их природе – в локальном равновесии моделируемой турбулентности. Наибольшую популярность на сегодняшний день получили двухпараметрические модели турбулентности, такие как  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  модели турбулентности. Эти модели применяются при моделировании течений, для которых трудно получить эмпирические распределения линейных масштабов турбулентности. Примерами таких течений являются сложные сдвиговые течения, которые образуются в процессе взаимодействия отдельных свободных или пристеночных слоев. Однако, как показывает численный анализ [108], для расчета пристенной турбулентности оказывается предпочтительней использование  $k-\omega$  модели турбулентности Вилкокса, где  $\omega$  - это скорость диссипации на единицу турбулентной энергии. Предложенная Вилкоксом модель представляется более точной для расчета сложных типов течений с большими градиентами давления, поскольку она точнее отображает их составные, характерные элементы (пограничные слои, вихри, струи). Рассматриваемая задача обтекания струи сверхзвуковым потоком характеризуется обширными областями отрывных

зон, и на основе вышесказанного для замыкания системы (2.1) приемлемым является  $k-\omega$  модель турбулентности Вилкокса [109] где турбулентная вязкость определяется по формуле :

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}.$$

С учетом этого компоненты векторов  $\vec{U}, \vec{E}, \vec{F}$  примут следующий вид:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \\ \rho Y_k \\ \rho k \\ \rho \omega \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u w \\ (E_t + P)u \\ \rho u Y_k \\ \rho u k \\ \rho u \omega \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P)w \\ \rho w Y_k \\ \rho w k \\ \rho w \omega \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

а компоненты  $\vec{E}_v, \vec{F}_v, \vec{G}_v$  связаны с вязкими напряжениями:

$$\vec{E}_v = \left( 0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + u\tau_{xz} - q_x, J_{kx}, \frac{1}{Re} (\mu_l + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x}, \frac{1}{Re} (\mu_l + \sigma_\omega \mu) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^T$$

$$\vec{F}_v = \left( 0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, w\tau_{zz} + w\tau_{xz} - q_z, J_{kz}, \frac{1}{Re} (\mu_l + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial z}, \frac{1}{Re} (\mu_l + \sigma_\omega \mu) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^T$$

Вектор дополнительных членов имеет следующий вид:

$$\vec{S} = (0, 0, 0, 0, 0, (P_k - \beta^* \rho \omega k), (\gamma \rho P_k / \mu_t - \beta \rho \omega^2))^T$$

где

$$P_k = \mu_t \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad \text{где } i, j, k=1, 2, 3$$



Константы принимают следующие значения:

$$\sigma_k=0.5, \sigma_\omega=0.5, \beta^*=0.09, \beta=0.075, \gamma=5/9.$$

здесь  $k, \omega$  - кинетическая энергия турбулентности и удельная скорость диссипации на единицу кинетической энергии турбулентности.  $P_k$  - член генерации турбулентности.

## 2.4 Постановка начальных и граничных условий:

На входе задаются параметры потока

$$W=W_{k\infty}, p=p_\infty, T=T_\infty, u=M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}}, w=0, Y=Y_{k\infty},$$

$$x=0, 0 \leq z \leq H;$$

Начальные данные для  $k, \omega$  определяются, исходя из предположения равенства порождения турбулентности и ее диссипации

$$P_k = \beta^* \rho \omega k$$

тогда

$$k=k_\infty, \text{ где } k_\infty = \frac{\mu_{tB-L}}{\rho \text{Re} \sqrt{\beta^*}} \sqrt{\frac{P_k}{\mu_{tB-L}}}, \quad \omega=\omega_\infty,$$

$$\text{где } \omega_\infty = \frac{\rho k}{\mu_{tB-L} \text{Re}}, \quad P_k = \frac{\mu_t}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right).$$

Здесь для определения значения коэффициента турбулентной вязкости используется алгебраическая модель Болдуина-Ломакса [42]. Вблизи стенки ( $0 \leq z \leq \delta_1$ ) коэффициент турбулентной вязкости имеет вид

$$\mu_t = \rho l^2 |\Omega|,$$

где  $|\Omega|$  – завихренность,  $l = \kappa z \left[ 1 - e^{-z^+ / A} \right]$  – длина пути перемешивания,  $\kappa = 0.41$  – постоянная Кармана,  $A = 26$ . Вдали от стенки ( $z > \delta_1$ ) принято

$$\mu_t = 0.0168 \rho V_0 L_0,$$

где  $V_0 = (F_{max}, 0.25 q_{dif}^2 / F_{max})$ ,  $L_0 = 1.6 z_{max} I^k$ ,  $F_{max} = \max(|\Omega| l / \kappa)$ ,  $z_{max}$  соответствует  $F_{max}$ ,  $q_{dif} = \max(|\vec{V}|) - \min(|\vec{V}|)$ ,  $\vec{V} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ,  $I^k = \left[ 1 + 5.5 (0.3z / z_{max})^6 \right]^1$  – ограничивающий множитель Клебанава.

На нижней стенке задается условие прилипания и теплоизоляции а для параметров  $k-\omega$  модели турбулентности на стенке задавались следующие граничные условия

$$k=0; \quad \omega = \frac{6\mu}{0.075\rho(\Delta y_1)^2}$$

Во входном сечении вблизи стенок канала задается пограничный слой, толщина которого определяется по формуле  $\delta_1 = 0.37x(\text{Re})^{0.2}$  [110]. Также задается пристенный слой (10% от пограничного слоя)  $\delta_2 = 0.1\delta_1$ . Продольная составляющая скорости  $u$  принимает следующий вид:

$$u = 0.1 \left( \frac{z}{\delta_2} \right) + 0.9 \left( \frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad x=0, \quad 0 \leq z \leq \delta_2,$$

в развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задается степенным законом:

$$u = \left( \frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7}, \quad x=0, \quad \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

в зависимости от распределения скорости значения температуры и плотности примут вид:

$$T = T_w + u(1 - T_w), \quad \rho = \frac{1}{T},$$

где  $T_w = \left(1 + r \frac{(\gamma - 1)}{2} M_\infty^2\right)$  - температура на стенке,  $r = 0,88$ .

При задании падающей ударной волны во входном сечении вблизи верхней границы для газодинамических параметров ставились условия из решения задачи о косом скачке уплотнения:

$$u = \sqrt{\frac{(\cos\beta)^2}{\cos(\beta - \theta)^2}} \cos\theta \quad v = \sqrt{\frac{(\cos\beta)^2}{\cos(\beta - \theta)^2}} \sin\theta$$

$$P = P_\infty \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_\infty^2 (\sin\beta)^2 \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \rho = \frac{\frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 (\sin\beta)^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (\sin\beta)^2}$$

где  $\theta$  - угол наклона генератора скачка уплотнения,  $\beta$  - угол, образованный линией скачка с направлением набегающего потока (найден из зависимости  $\theta$  от  $\beta$  для семейства линий с различными значениями Маха потока [111]). На верхней границе - условие симметрии, на и выходной границе задаются условия неотражения [112]. Остановимся подробнее на условии неотражения.

## 2.5 Построение граничных условий неотражения.

При решении поставленной задачи, ударная волна может пересекать верхнюю и выходную границы рассматриваемой области, следовательно, необходимо задать условие так называемого «Свободного полета», которое исключает нежелательное влияние отраженных от вычислительной границы

волн. Необходимо учесть все детали течения вниз по потоку и при этом обеспечить получение реального решения в вычислительной области.

Проблема выходных границ особенно актуальна для сверхзвуковых течений, где обычно применяется экстраполяция для искомых переменных. Однако в [113] обнаружено, что при расчете течения вязкого газа около обратного уступа использование простого граничного условия  $U_N=U_{N-1}$  приводит к монотонной расходимости решения даже при полностью сверхзвуковом потоке на выходе. В работе [114] в случае пересечения ударной волны выходной границы применение линейной экстраполяции приводит к неустойчивости. Также в случае пересечения хвостовой волной выходную границу использование экстраполяции может привести к серьезным ошибкам [115, с.415]. Один из методов определения неизвестных переменных на выходной границе состоит в решении исходных уравнений на искомой границе. Таким образом, не используется процедура экстраполяции и тем самым исключается произвольность в построении численных граничных условий. Довольно часто на границах используют характеристическую форму исходных уравнений [116-120]. Решение характеристических уравнений на границе позволяет учитывать развитие и распространение возмущений как из внешней среды, так и в нее. Так Моретти [116, с.42] использовал условия совместности на характеристиках для исходных уравнений при решении задачи о течении газа в канале конечной длины и переменного сечения вдоль  $x$ . В работе [120, с.3] Томпсон предлагает способ постановки граничных условий не отражения, основанных на применении характеристической формы системы уравнений Эйлера. Представленный метод учитывает распространение характеристических волн, пересекающих выходную границу, а на границе решается характеристическое уравнение.

Для построения граничных условий неотражения на выходной границе, в соответствии с работой Poinsot & Lele [112, с.108], необходимо учитывать

характеристический вид системы уравнений (2.7) на границе в следующей форме:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u d_1 + \rho d_2 + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + w d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) d_1 + \frac{d_4}{\gamma} + \rho u d_2 + \rho w d_3 + \frac{\partial(E_t + p)w}{\partial x} = \\ = \frac{\partial(u \tau_{xx} + w \tau_{xz} q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(w \tau_{xz} + w \tau_{zz} q_z)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Где вектор

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \left( Z_2 + \frac{1}{2}(Z_4 + Z_1) \right) \\ \frac{1}{2\rho c} (Z_4 - Z_1) \\ Z_3 \\ \frac{1}{2}(Z_4 + Z_1) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Здесь  $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$  - функции изменения характеристических волн, которые дают временную скорость изменения амплитуд различных волн, пересекающих выходную границу и имеют вид:

$$Z_1 = \lambda_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad Z_2 = \lambda_2 \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad Z_3 = \lambda_3 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad Z_4 = \lambda_4 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.13)$$

Собственные значения исходной системы:

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u, \quad \lambda_4 = u + c. \quad (2.14)$$

В соответствии с [112, с.108] для сверхзвукового течения на выходной границе требуется, чтобы касательные напряжения и нормальный поток тепла имели нулевые пространственные производные вдоль границы.

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0. \quad (2.15)$$

Для дозвуковой части потока на выходе задается одно граничное условие: давление на бесконечности, и следующие условия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

Как видно из (2.14) следует, что для зоны сверхзвукового течения, все собственные значения положительны, таким образом, изменение амплитуды характеристической волны может быть аппроксимирована из внутренних точек с применением конечно-разностной схемы назад для уравнений (2.12). Система (2.8-2.11) с учетом условий (2.15) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{(u-c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] &= 0 \quad (2.17) \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} + \frac{u}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{(u-c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] &= \frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} + \frac{w}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \right. & \\ \left. + \frac{(u-c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E_t}{\partial t_x} + \frac{\partial(w(E_t + p))}{\partial z} + \frac{u^2 + w^2}{2c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(u-c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{u}{2c} \left[ (u+c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - (u-c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \rho u w \frac{\partial w}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{2(\gamma-1)} \left[ (u+c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (u-c) \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial(u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z)}{\partial z}
\end{aligned}$$

Условие (2.17) может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{U}_{N_j}^{n+1} = \bar{U}_{N_j}^n - \Delta t \left\{ \frac{3\bar{E}_{N_j}^n - 4\bar{E}_{N-1j}^n + \bar{E}_{N-2j}^n}{2\Delta x} + \frac{\bar{F}_{Nj+1}^n - \bar{F}_{Nj-1}^n}{2\Delta z} - \frac{\partial \bar{F}_v^n}{\partial z} \Big|_{N_j} \right\}. \quad (2.18)$$

Здесь используется явная конечно-разностная аппроксимация производных в направлении  $x$  со вторым порядком точности, для аппроксимации производных по  $z$  используется центрально-разностная схема.

Для дозвуковой зоны ( $0 \leq u \leq c$ ) на правой границе области, все волны будут выходящими, кроме одной  $Z_1$  ( $\lambda_1 \leq 0$ ), которая будет входящей. Таким образом,  $Z_2$ ,  $Z_3$  и  $Z_4$  аппроксимируются по формуле (2.13) с использованием разности назад. В работе [112, p115] рекомендуется для  $Z_1$  использовать следующее условие:  $Z_1 = K(p - p_\infty)$ , где  $K = \sigma(1 - M^2)c/L$ ,  $M$  - максимальное число Маха на границе,  $p_\infty$  - заданное давление,  $L$  - длина расчетной области. Подставляя  $Z_i$   $i = 1, 2, 3, 4$  в уравнение (2.17) получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] = 0 \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} + \frac{u}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] = \frac{\partial(\tau_{xz})}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} + \frac{w}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] \\
& + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial(\tau_{zz})}{\partial z} \\
& \frac{\partial E_t}{\partial t_x} + \frac{\partial(w(E_t + p))}{\partial z} + \frac{u^2 + w^2}{2c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] + \\
& + \frac{u}{c} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] + \rho u w \frac{\partial w}{\partial x} + \\
& + \frac{1}{(\gamma-1)} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] = \frac{\partial(u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z)}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Система (2.19) является постановкой численных граничных условий на выходной границе для дозвукового потока; эта система может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} + SUB - \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial x} - \frac{\partial \vec{F}_v}{\partial z} = 0 \quad (2.20)$$

где

$$SUB = \left[ \begin{aligned}
& \frac{1}{c^2} \left[ \frac{(u+c)}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{K}{2} (p - p_\infty) \right] \\
& \frac{(u+c)^2}{2c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{u^2}{c^2} \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{(u-c)K}{2c^2} (p - p_\infty) \\
& \frac{(u+c)w}{2c^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{uw}{c^2} \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{wK}{2c^2} (p - p_\infty) \\
& (u+c) \left( \frac{u^2 + w^2 + uc}{2c^2} + \frac{1}{2(\gamma-1)} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( \frac{u^2 + w^2}{c^2} \right) \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \\
& + \rho u w \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{u^2 + w^2 + uc}{2c^2} - \frac{1}{2(\gamma-1)} \right) \frac{K}{2c^2} (p - p_\infty)
\end{aligned} \right]$$

Аналогично (2.18) уравнение (2.20) может быть представлено в виде:

$$\vec{U}_{N_j}^{n+1} = \vec{U}_{N_j}^n - \Delta t \left\{ SUB \Big|_{N_j}^n + \frac{\vec{F}_{N_{j+1}}^n - \vec{F}_{N_{j-1}}^n}{2\Delta z} - \frac{\partial \vec{E}_v}{\partial x} \Big|_{N_j} - \frac{\partial \vec{F}_v}{\partial z} \Big|_{N_j} \right\} \quad (2.21)$$



Где для аппроксимации диффузионных членов используется центрально-разностная схема:

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi \frac{\partial}{\partial x} f \Big|_{N_j} = \frac{\varphi_{N_{j+1}}(f_{N_{j+1}} - f_{N-1j+1}) - \varphi_{N_{j-1}}(f_{N_{j-1}} - f_{N-1j-1})}{2\Delta z \Delta x} + o\left(\frac{1}{2}\Delta z^2; \frac{1}{2}\Delta x^2\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi \frac{\partial}{\partial z} f \Big|_{N_j} = \frac{(\varphi_{N_{j+1}} + \varphi_{N_j})(f_{N_{j+1}} - f_{N_j}) - (\varphi_{N_j} + \varphi_{N_{j-1}})(f_{N_j} - f_{N_{j-1}})}{2\Delta z^2} + o\left(\frac{1}{2}\Delta z^2\right).$$

(2.22)

## 2.6 Построение WENO схемы

Решение системы (2.7) выполняется численно на основе WENO схемы, способ построения, которого будет показан на примере одномерного невязкого случая. Для двумерной задачи схема строится аналогично. Основная идея построения весовых существенно неосциллирующих схем или WENO схем является такой же, как и у ENO схем (существенно неосциллирующих схем), но с одним отличием. В ENO схемах рост нефизических осцилляций в численном решении устраняется с помощью адаптивного сеточного шаблона, в котором для каждой расчетной ячейки выбирается интерполяционный полином с гладким решением исходного уравнения. Таким образом, расчетная сетка вблизи разрыва выбирается из гладкости решения. В WENO схеме выбор расчетной сетки для построения аппроксимирующего полинома осуществляется с помощью выпуклой комбинации всех соответствующих интерполяционных полиномов. Для выпуклой комбинации интерполяционных полиномов производится выбор так называемых весовых коэффициентов.

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (2.23)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0$$

Где  $\bar{u}$  - вектор независимых переменных и  $f(\bar{u})$  - вектор потока.

Вводится вычислительная область  $I_j \times [t_n, t_{n+1}]$ , где  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$

$x_\alpha = \alpha h$ ,  $t_n = n\tau$ ,  $h$  - шаг сетки.

Пусть  $\bar{u}(x, t)$  среднее значение функции  $u(x, t)$  то есть

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t) dx \quad (2.24)$$

Интегрирование уравнения (2.23) по  $x$  от  $x - \frac{h}{2}$  до  $x + \frac{h}{2}$  и по времени от  $t$  до  $t + \tau$  приводит к следующей задаче:

$$\bar{\bar{u}}(x, t + \tau) = \bar{\bar{u}}(x, t) - \frac{\tau}{h} \left[ \hat{f}\left(x + \frac{h}{2}, t, \bar{u}\right) - \hat{f}\left(x - \frac{h}{2}, t, \bar{u}\right) \right] \quad (2.25)$$

Выражение (2.25) для  $x = x_j$ ,  $t = t_n$  будет иметь вид:

$$\bar{\bar{u}}_j^{n+1} = \bar{\bar{u}}_j^n - \frac{\tau}{h} \left[ \hat{f}(x_{j+1/2}, t_n, \bar{u}) - \hat{f}(x_{j-1/2}, t_n, \bar{u}) \right] \quad (2.26)$$

где  $\bar{\bar{u}}_j^n = \bar{\bar{u}}(x_j, t_n) = \frac{1}{h} \int_{I_j} \bar{u}(x, t_n) dx$

Согласно работе [121] класс численных схем, являющихся обобщением схемы Годунова в стандартной консервативной форме можно записать в виде:

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_j^n - \frac{\tau}{h} (\bar{f}_{j+1/2} - \bar{f}_{j-1/2}) \equiv (\bar{E}_h(\tau) \cdot \vec{v}^n) \quad (2.27)$$

где  $\bar{E}_h(\tau)$  - оператор численного решения, поток  $\bar{f}_{j+1/2}$  определяется функцией  $2m$  переменных:

$$\bar{f}_{j+1/2} = \bar{f}(\vec{v}_{j-m+1}, \dots, \vec{v}_{j+m})$$

Дискретные значения  $v_j^n$ , аппроксимируют функцию  $\bar{u}_j^n$  с  $m$ -ым порядком точности. Глобальное действие этой схемы включает поточечную аппроксимацию  $\bar{u}(x,t)$  с тем же порядком точности, которая обозначается через  $\vec{v}_h(x,t)$ . Далее рассматривается следующая задача Коши

$$\frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + \frac{\partial f(\vec{v}_h)}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial x} = 0 \quad (2.28)$$

С начальными условиями :  $\vec{v}_h(x, t_n) = R(x; \vec{v}^n)$ , где  $A = \frac{\partial f(\vec{v}_h)}{\partial \vec{v}_h}$  матрица

Якоби.

Точное решение задачи (2.28) для достаточно малого  $\tau$ , будет иметь вид:

$$\vec{v}_h(\cdot, t) = E(t - t_n) \cdot \vec{v}_h(\cdot, t_n + 0)$$

где  $E(t)$  - оператор точного решения (2.28). Тогда  $\vec{v}_j^{n+1}$  определяется следующим образом:

$$\vec{v}_j^{n+1} = \vec{v}_h(x, t_{n+1}) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \vec{v}_h(x, t_{n+1}) dx. \quad (2.29)$$

где  $v_h$  точное решение задачи (2.28) в полосе  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . Представляя матрицу  $A$  в виде  $A = R \Lambda R^{-1}$  где  $R$  и  $R^{-1}$  правые и левые собственные вектора матрицы  $A$  и  $\Lambda$  диагональная матрица, состоящая из собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $A$  ( $i=1 \dots n$ ). (2.28) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

Здесь  $\bar{w} = R^{-1} v_h$  - характеристическая переменная (инвариант Римана), которая удовлетворяет свойству:

$$d\bar{w} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda_i \quad i = 1, \dots, n$$

Далее индекс  $i$  опускаем и рассматриваем скалярную задачу.

Точное решение (2.30) в полосе  $t_n \leq t < t_{n+1}$  будет иметь вид:

$$w(x, t) = R(x - \lambda t; \bar{w}^n).$$

Кусочно-полиномиальная функция  $R(x; \bar{w})$  степени  $m$  задается через средние  $\bar{w}_j = \bar{w}(x_j)$  кусочно-гладкой функции  $w(x)$ , и удовлетворяет следующим условиям [121, с.234]:

$$1) R(x; \bar{w}) = w(x) + e(x)h^m + O(h^{m+1})$$

$$2) \bar{R}(x_j; \bar{w}) = \bar{w}_j$$

$$(2.31)$$

$$3) TV(R(\cdot; \bar{w})) \leq TV(w) + O(h^m)$$

Третье неравенство подразумевает, что функция  $R(x; \bar{w})$  является существенно неосциллирующей в том смысле, что она не имеет и не генерирует ложные осцилляции порядка  $O(1)$  в точках разрыва решения.

Среднее решение задачи (2.30) примет вид:

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(x - \lambda t; \bar{w}^n) dx \quad (2.32)$$

Таким образом, для нахождения решения необходимо знание функции  $R(\cdot; \bar{w}^n)$ . Следует отметить для построения этой функции использовался метод RP (Reconstruction via Primitive Function), предложенный в работе [121, с.243] и приведен в приложении А, то есть

$$R(x; \bar{w}) = \frac{d}{dx} H_m(x; W) \quad (2.33)$$

где  $H_m(x; W)$  является выпуклой комбинацией кусочно-полиномиальной функции степени  $m$ .

Подстановка (2.33) в (2.32) позволяет записать решение в виде

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(x - \lambda t; \bar{w}^n) dx = \frac{1}{h} \left( H_m(x_{j+1/2} - \lambda t; W) - H_m(x_{j-1/2} - \lambda t; W) \right) \quad (2.34)$$

## 2.7 Построения функции $H_m(x; W)$

Для задачи о распаде произвольного разрыва скорости распространения волн вправо и влево вдоль характеристик определяются отрицательными и положительными собственными значениями матрицы Якоби  $A$ . Поэтому, при построении полинома  $H_m(x; W)$  на грани  $j+1/2$ , выбор точки, с которой начинается построение, будет зависеть от возмущений, распространяющихся влево, следовательно, влияющих на решение в ячейке  $j$  и с другой стороны связан с возмущениями,

распространяющимися вправо, и, соответственно, влияющими на решение на грани  $j+1$ .

Скорости распространения волн вправо и влево определяются отрицательными и положительными значениями матрица  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{если } \lambda > 0, \text{ то предполагается } k_{\min}^1 &= j \\ \text{если } \lambda < 0, \quad k_{\min}^1 &= j + 1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В качестве полинома для  $m=0$  принимается

$$H_0(x;W) = W \left[ x_{k_{\min}^1 + 1/2} \right] \quad (2.36)$$

затем для  $m=1$  имеем:

$$H_1(x;W) = H_0(x;W) + W \left[ x_{k_{\min}^1 - 1/2}, x_{k_{\min}^1 + 1/2} \right] (x - x_{k_{\min}^1 + 1/2}) \quad (2.37)$$

Последовательность построения полинома  $H_l(x;W)$  степени  $l$  будет следующий: пусть определены  $k_{\min}^{l-1}$  и  $H_{l-1}(x;W)$ , тогда  $a^l$  и  $b^l$  примут вид

$$a^l = W \left[ x_{k_{\min}^{l-1} - 1/2}, \dots, x_{k_{\min}^{l-1} + 1/2} \right] \quad (2.38)$$

$$b^l = W \left[ x_{k_{\min}^{l-1} - 1/2 - 1}, \dots, x_{k_{\min}^{l-1} + 1/2 - 1} \right]$$

а значение  $c^l$  и  $k_{\min}^l$  :

$$c^l = \begin{cases} b^l & \text{если } |a^l| \geq |b^l| \\ a^l & \text{если } |a^l| < |b^l| \end{cases}, \quad k_{\min}^l = \begin{cases} k_{\min}^{l-1} - 1 & \text{если } |a^l| \geq |b^l| \\ k_{\min}^{l-1} & \text{если } |a^l| < |b^l| \end{cases} \quad (2.39)$$

После чего вычисляется Ньютоновская форма полинома  $H_l(x;W)$  по формуле

$$H_l(x;W) = H_{l-1}(x;W) + c^l \prod_{k=k_{\min}^{l-1}}^{k_{\min}^{l-1}+l-1} (x - x_{k-1/2}).$$

Подробное описание построения полинома приведено в приложении А.

Для построения WENO схем при определении многочлена  $H_m(x;W)$  в интервале  $I_j$  необходимо использовать все  $m$  полиномов  $\{H_m^k(x;W)\}_{k=1}^m$  на всех шаблонах  $\{S_{j+k}\}_{k=0}^{m-1}$  в которых  $S_{j+k}$  охватывают  $I_j$ . Таким образом полином  $H_m(x;W)$  будет равен линейной комбинацией всех  $\{H_m^k(x;W)\}_{k=1}^m$  с весом, который определяется с помощью соответствующего индикатора  $\{IS_{j+k}\}_{k=0}^{m-1}$  являющимся суммой всех средних квадратичных значений разделенных разностей [122, Р.202].

Полином третьей степени для  $\lambda > 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} H_3(x_{j+1/2} - \lambda t, W) = & W_{j+1/2} - \sigma \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2} \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} (\Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2}) + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \right] - \\ & - \frac{\sigma}{6} (1-\sigma)(2-\sigma) \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \right] - \\ & - \frac{\sigma}{6} (1-\sigma)(1+\sigma) \left[ \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Где  $\sigma = \frac{\lambda t}{h}$  - число Куранта.

Решение (2.34) может быть получено с использованием двух полиномов  $H_3(x_{j+1/2} - \lambda t, W)$  и  $H_3(x_{j-1/2} - \lambda t, W)$  и примет вид:

$$\begin{aligned}
w_j^{n+1} = & \frac{W_{j+1/2} - W_{j-1/2}}{h} - \sigma \Delta_- \frac{W_{j+1/2} - W_{j-1/2}}{h} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2h} \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\alpha_{0j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} \Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} (\Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2}) - \frac{\alpha_{1j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} (\Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2}) \right) + \\
& \left. + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\alpha_{2j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} \right] \\
& - \frac{\sigma(1-\sigma)(2-\sigma)}{6h} \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\alpha_{0j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} \Delta_- \Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\alpha_{1j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} \right) \right] \\
& - \frac{\sigma(1-\sigma)(1+\sigma)}{6h} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\alpha_{1j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\alpha_{2j-1}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj-1}} \Delta_- \Delta_+ \Delta_+ W_{j-1/2} \right]
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Как видно из (2.41) функция  $W$  соответствует полущелым узлам, заменяя ее через функцию  $\bar{w}$ , определенную в целых узлах следующим образом

$$w_j^n = \frac{W_{j+1/2} - W_{j-1/2}}{h} = \frac{\Delta_- W_{j+1/2}}{h}, \text{ получим:}$$

$$w_j^{n+1} - w_j^n = -\sigma \Delta_- w_j^n - \frac{\sigma \Delta_-}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \left\{ \frac{(1-\sigma)}{2} (\alpha_{0j} \Delta_- w_j^n + \frac{\alpha_{1j}}{2} (\Delta_- w_j^n + \Delta_+ w_j^n)) + \right. \tag{2.42}$$



$$\begin{aligned}
& + \alpha_{2j} \Delta_+ w_j^n) + \frac{(\sigma^2 - 1)}{6} \left( \frac{\alpha_{1j}}{2} \Delta_- \Delta_+ w_j^n + \alpha_{2j} \Delta_+ \Delta_+ w_j^n \right) + \\
& + \frac{(2 - 3\sigma + \sigma^2)}{6} \left( \alpha_{0j} \Delta_- \Delta_- w_j^n + \frac{\alpha_{1j}}{2} \Delta_- \Delta_+ w_j^n \right) \Big\}
\end{aligned}$$

Общее решение для  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$  примет вид:

$$\begin{aligned}
w_j^{n+1} - w_j^n = & -\sigma^+ \Delta_- w_j^n - \frac{\sigma^+}{\sum_{l=0}^2 \alpha_{lj}} \Delta_- \left\{ \frac{(1 - \sigma^+)}{2} (\alpha_{0j} \Delta_- w_j^n + \right. \tag{2.43} \\
& + \frac{1}{2} \alpha_{1j} (\Delta_- w_j^n + \Delta_+ w_j^n) + \alpha_{2j} \Delta_+ w_j^n) + \frac{(1 - (\sigma^+)^2)}{6} \left( \frac{1}{2} \alpha_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n + \alpha_{2j} \Delta_+ \Delta_+ w_j^n \right) + \\
& \left. + \frac{(2 - 3\sigma^+ + (\sigma^+)^2)}{6} \left( \alpha_{0j} \Delta_- \Delta_- w_j^n + \frac{1}{2} \alpha_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n \right) \right\} - \\
& - \sigma^- \Delta_+ w_j^n + \frac{\sigma^-}{\sum_{l=0}^2 \bar{\alpha}_{lj}} \Delta_+ \left\{ \frac{(1 + \sigma^-)}{2} (\bar{\alpha}_{0j} \Delta_- w_j^n + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} (\Delta_- w_j^n + \Delta_+ w_j^n) + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ w_j^n) - \right. \\
& - \frac{((\sigma^-)^2 - 1)}{6} \left( \bar{\alpha}_{0j} \Delta_- \Delta_- w_j^n + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n \right) - \\
& \left. - \frac{(2 + 3\sigma^- + (\sigma^-)^2)}{6} \left( \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ \Delta_+ w_j^n \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{где } \sigma^+ = \frac{\lambda^+ t}{h}, \quad \sigma^- = \frac{\lambda^- t}{h}, \quad \lambda^+ = \frac{\lambda + |\lambda|}{2}, \quad \lambda^- = \frac{\lambda - |\lambda|}{2}$$

Численное решение (2.43) представлено в переменных инвариантов Римана  $w_j^n$ , используя его выражение  $w_j^n = R^{-1} v_j^n$  перепишем (2.43) в виде

$$\begin{aligned}
R^{-1} v_j^{n+1} = & R^{-1} v_j^n - \sigma^+ \Delta_- R^{-1} v_j^n - \frac{\sigma^+ \Delta_-}{\sum_{l=0}^2 \alpha_{lj}} \left\{ \frac{(1 - \sigma^+)}{2} (\alpha_{0j} \Delta_- R^{-1} v_j^n + \right. \tag{2.44} \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{2} (\Delta_- R^{-1} v_j^n + \Delta_+ R^{-1} v_j^n) + \alpha_{2j} \Delta_+ R^{-1} v_j^n) + \\
& + \frac{(1 - (\sigma^+)^2)}{6} \left( \frac{\alpha_{1j}}{2} \Delta_- \Delta_+ R^{-1} v_j^n + \alpha_{2j} \Delta_+ \Delta_+ R^{-1} v_j^n \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2-3\sigma^+ + (\sigma^+)^2)}{6} \left( \alpha_{0j} \Delta_- \Delta_- R^{-1} v_j^n + \frac{\alpha_{1j}}{2} \Delta_- \Delta_+ R^{-1} v_j^n \right) \Big\} \\
& - \sigma^- \Delta_+ R^{-1} v_j^n + \frac{\sigma^- \Delta_+}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \left\{ \frac{(1+\sigma^-)}{2} \left( \bar{\alpha}_{0j} \Delta_- R^{-1} v_j^n + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{2} (\Delta_- R^{-1} v_j^n + \Delta_+ R^{-1} v_j^n) + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ R^{-1} v_j^n \right) \right. \\
& \left. - \frac{((\sigma^-)^2 - 1)}{6} \left( \bar{\alpha}_{0j} \Delta_- \Delta_- R^{-1} v_j^n + \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{2} \Delta_- \Delta_+ R^{-1} v_j^n \right) - \right. \\
& \left. - \frac{(2+3\sigma^- + (\sigma^-)^2)}{6} \left( \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{2} \Delta_- \Delta_+ R^{-1} v_j^n + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ \Delta_+ R^{-1} v_j^n \right) \right\}
\end{aligned}$$

Умножая (2.44) на матрицу  $R$  и используя следующие соотношения

$f^n = Av^n$ ,  $A_{j+1/2}^- = R\lambda^- R^{-1}$  и  $A_{j-1/2}^+ = R\lambda^+ R^{-1}$  запишем:

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \Delta_- f_j^n - & (2.45) \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{A_{j-1/2}^+}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \left\{ \alpha_{0j} \left( \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right] \Delta_- f_j^n \right) + \right. \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{2} \left( \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right] \Delta_- f_j^n + \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right] \Delta_+ f_j^n \right) + \alpha_{2j} \left( \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right] \Delta_+ f_j^n \right) + \\
& + \frac{\alpha_{0j}}{3} \Delta_- \left[ \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right]^2 \right) \Delta_- f_j^n \right] + \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{6} \left( \Delta_- \left[ \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right]^2 \right) \Delta_+ f_j^n \right] + \Delta_+ \left[ \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right]^2 - I \right) \Delta_- f_j^n \right] \right) + \\
& + \frac{\alpha_{2j}}{3} \Delta_+ \left[ \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j-1/2}^+ \right]^2 - I \right) \Delta_+ f_j^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \Delta_+ f_j^n + \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{A_{j+1/2}^-}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \left\{ \bar{\alpha}_{0j} \left( I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right) \Delta_- f_j^n + \right. \\
& \left. + \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{2} \left[ \left( I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right) \Delta_- f_j^n + \left( I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right) \Delta_+ f_j^n \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\alpha}_{2j} \left( I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right) \Delta_+ f_j^n - \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{3} \Delta_- \left[ \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right]^2 - I \right) \Delta_- f_j^n \right] - \\
& - \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{6} \left[ \Delta_- \left[ \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right]^2 - I \right) \Delta_+ f_j^n \right] + \Delta_+ \left[ \left( 2I + 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right]^2 \right) \Delta_- f_j^n \right] \right] - \\
& - \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{3} \Delta_+ \left[ \left( 2I + 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{j+1/2}^- \right]^2 \right) \Delta_+ f_j^n \right] \}
\end{aligned}$$

where  $A^+ + A^- = I$  and  $A_{\pm} = R \Lambda^{\pm} R^{-1} = R \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda)}{2} \right) R^{-1}$ .

Далее для того, чтобы записать схему в форме, удобной для численного решения, заменим  $A^+$  and  $A^-$  на  $|A|$  с выделением  $\text{sign}(A)$  в членах в квадратных скобках:

$$\begin{aligned}
v_j^{n+1} = & v_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{A}_{j-1/2}^+ \Delta_- f_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\hat{A}_{j-1/2}^+}{\sum_{l=0}^2 \alpha_{lj}} \Delta_- \left\{ \alpha_{0j} \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right) \Delta_- f_j^n + \right. & (2.46) \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{2} \left[ \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right) \Delta_- f_j^n + \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right) \Delta_+ f_j^n \right] + \\
& + \alpha_{2j} \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right) \Delta_+ f_j^n + \\
& + \frac{\alpha_{0j}}{3} \Delta_- \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right]^2 \right) \Delta_- f_j^n + \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{6} \left[ \Delta_- \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right]^2 \right) \Delta_+ f_j^n + \Delta_+ \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right]^2 - I \right) \Delta_- f_j^n \right] + \\
& + \frac{\alpha_{2j}}{3} \Delta_+ \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right]^2 - I \right) \Delta_+ f_j^n \} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \hat{A}_{j+1/2}^- \Delta_+ f_j^n + \\
& + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\hat{A}_{j+1/2}^-}{\sum_{l=0}^2 \bar{\alpha}_{lj}} \Delta_+ \left\{ \bar{\alpha}_{0j} \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right) \Delta_- f_j^n + \right. \\
& + \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{2} \left[ \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right) \Delta_- f_j^n + \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right) \Delta_+ f_j^n \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\alpha}_{2j} \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right) \Delta_+ f_j^n - \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{3} \Delta \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right]^2 - I \right) \Delta_- f_j^n - \\
& - \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{6} \left[ \Delta \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right]^2 - I \right) \Delta_+ f_j^n + \Delta_+ \text{sign}(A)_{j-1/2} \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j-1/2} \right]^2 \right) \Delta_- f_j^n \right] - \\
& - \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{6} \Delta_+ \text{sign}(A)_{j+1/2} \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{j+1/2} \right]^2 \right) \Delta_+ f_j^n \}
\end{aligned}$$

Это выражение представляет WENO схему 4<sup>th</sup> порядка аппроксимации для следующего модифицированного уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial \tilde{f}_j^m}{\partial x} = 0 \quad (2.47)$$

Где  $\tilde{f}_j^m = \tilde{f}_j + \tilde{E}_j + \tilde{D}_j$ , здесь  $\tilde{f}_j$  конвективные члены,  $\{\tilde{E}_j, \tilde{D}_j\}$  добавочные члены высокого порядка аппроксимации определяются в соответствии с собственными значениями матрицы A следующим образом.

Для  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_j &= \frac{1}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \left[ \alpha_{0j} \bar{E}_{j-1/2} + \frac{1}{2} \alpha_{1j} (\bar{E}_{j-1/2} + \bar{E}_{j+1/2}) + \alpha_{2j} \bar{E}_{j+1/2} \right] \\
\tilde{D}_j &= \frac{1}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \left[ \alpha_{0j} \Delta_- \bar{D}_{j-1/2} + \frac{1}{2} \alpha_{1j} (\Delta_+ \bar{D}_{j-1/2} + \Delta_- \bar{D}_{j+1/2}) + \alpha_{2j} \Delta_+ \bar{D}_{j+1/2} \right]
\end{aligned} \quad (2.48)$$

Для  $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_j &= \frac{1}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \left[ \bar{\alpha}_{0j} \bar{E}_{j-1/2} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} (\bar{E}_{j-1/2} + \bar{E}_{j+1/2}) + \bar{\alpha}_{2j} \bar{E}_{j+1/2} \right] \\
\tilde{D}_j &= \frac{1}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \left[ \bar{\alpha}_{0j} \Delta_- \bar{D}_{j-1/2} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} (\Delta_+ \bar{D}_{j-1/2} + \Delta_- \bar{D}_{j+1/2}) + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ \bar{D}_{j+1/2} \right]
\end{aligned} \quad (2.49)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{E}_{j+1/2} &= \text{sign}(A_{j+1/2}) \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A_{j+1/2}| \right) \left( \frac{\Delta_+ f_j^n}{2} \right) \\ \bar{D}_{j+1/2} &= \text{sign}(A_{j+1/2}) \left( \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} |A_{j+1/2}| \right)^2 - I \right) \left( \frac{\Delta_+ f_j^n}{6} \right)\end{aligned}\tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_{j+1/2} &= \text{sign}(A_{j+1/2}) \left( 2I - 3 \frac{\Delta t}{\Delta x} |A_{j+1/2}| + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} |A_{j+1/2}| \right)^2 \right) \left( \frac{\Delta_+ f_j^n}{6} \right) = \\ &= \bar{E}_{j+1/2} + \bar{D}_{j+1/2}\end{aligned}$$

## 2.8 Метод решения

Для удобства решения исходной системы уравнений (2.7) его можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} - \frac{\partial (\bar{E}_{v2} + \bar{E}_{vm})}{\partial x} - \frac{\partial (\bar{F}_{v2} + \bar{F}_{vm})}{\partial z} = 0\tag{2.51}$$

Где  $\bar{E}_v = \bar{E}_{v2} + \bar{E}_{vm}$  и  $\bar{F}_v = \bar{F}_{v2} + \bar{F}_{vm}$

Здесь диффузионные члены  $\bar{E}_{v2}, \bar{F}_{v2}$  состоят из производных второго порядка а  $\bar{E}_{vm}, \bar{F}_{vm}$  состоят из смешанных производных. На нижней и верхней стенках в пограничном слое, а также на уровне щели, вводится сгущение сетки для более точного численного решения. В обобщенной системе координат 2.51 переписется :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta}\tag{2.52}$$

где  $\tilde{U} = \frac{1}{J} \bar{U}$ ,  $\tilde{E} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) \bar{E}$ ,  $\tilde{F} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) \bar{F}$ ,  $\tilde{E}_{v2} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) \bar{E}_{v2}$ ,  $\tilde{E}_{vm} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) \bar{E}_{vm}$ ,  $\tilde{F}_{v2} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) \bar{F}_{v2}$

$$\tilde{F}_{vm} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) \bar{F}_{vm}$$

Применение WENO схемы для системы уравнений (2.52) будет аналогично одномерному случаю (2.47), то есть

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial \tilde{E}^m}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial \tilde{F}^m}{\partial \eta} - \left[ \frac{\partial(\tilde{E}_{v2} + \tilde{E}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F}_{v2} + \tilde{F}_{vm})}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (2.53)$$

здесь  $\tilde{E}^m = \tilde{E} + \tilde{E}_\xi + \tilde{D}_\xi$  и  $\tilde{F}^m = \tilde{F} + \tilde{E}_\eta + \tilde{D}_\eta$  - модифицированные потоки, состоящие из конвективных потоков  $(\tilde{E}, \tilde{F})$  добавочных членов высокого порядка аппроксимации  $(\tilde{E}_\xi, \tilde{E}_\eta, \tilde{D}_\xi, \tilde{D}_\eta)$ .

Одношаговая конечно-разностная схема для интегрирования по времени будет иметь следующий вид:

$$\Delta \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left[ (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial \tilde{E}^{n+1} + (\tilde{E}_\xi + \tilde{D}_\xi)^n}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial \tilde{F}^{n+1} + (\tilde{E}_\eta + \tilde{D}_\eta)^n}{\partial \eta} - \left[ \frac{\partial(\tilde{E}_{v2} + \tilde{E}_{vm})^{n+1}}{\partial \xi} - \frac{\partial(\tilde{F}_{v2} + \tilde{F}_{vm})^{n+1}}{\partial \eta} \right] \right] = O\left(\frac{1}{2} \Delta t^2\right). \quad (2.54)$$

Далее используется линеаризация векторов потоков в виде :

$$\tilde{E}^{n+1} \approx A_\xi^n \tilde{U}^{n+1}, \quad \tilde{F}^{n+1} \approx B_\eta^n \tilde{U}^{n+1}, \quad (2.55)$$

$$A_\xi = \xi_x A \quad \text{и} \quad B_\eta = \eta B, \quad A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{U}}, \quad B = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{U}} \quad - \text{матрицы Якоби, приведены в}$$

приложении Б.

Члены содержащие вторые производные разлагаются на составляющие:

$$\tilde{E}_{v2}^{n+1} = \tilde{E}_{v11}^{n+1} + \tilde{E}_{v12}^n, \quad \tilde{F}_{v2}^{n+1} = \tilde{F}_{v21}^{n+1} + \tilde{F}_{v22}^n, \quad (2.56)$$

Где вектора  $\tilde{E}_{v11}^{n+1}$  и  $\tilde{F}_{v21}^{n+1}$  имеют следующий вид:

$$\tilde{E}_{v11}^{n+1} = \frac{\mu_t \xi_x}{\text{Re}J} \left[ 0, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

$$\tilde{F}_{v21}^{n+1} = \frac{\mu_t \eta_z}{\text{Re}J} \left[ 0, \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{w\rho}{\rho} \right)^{n+1}, \frac{\gamma}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{E_t}{\rho} \right)^{n+1} \right]^T,$$

А вектора  $\tilde{E}_{v12}^n$  и  $\tilde{F}_{v22}^n$  состоят из диссипативных функций вида:

$$\tilde{E}_{v12}^n = \frac{\xi_x^2}{\text{Re}J} \left[ 0, 0, 0, \left[ \left( \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) \left( w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \left( \frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]^n \right]^T,$$

$$\tilde{E}_{v12}^n = \frac{\eta_z^2}{\text{Re}J} \left[ 0, 0, 0, \left[ \left( \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) \left( u \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{4}{3} \mu_t - \frac{\gamma \mu_t}{\text{Pr}} \right) w \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]^n \right]^T.$$

Для векторов со смешанными производными используется явная схема с равномерным шагом по времени:

$$\tilde{E}_{vm}^{n+1} = 2\tilde{E}_{vm}^n - \tilde{E}_{vm}^{n-1} + o(\Delta t^2), \quad \tilde{F}_{vm}^{n+1} = 2\tilde{F}_{vm}^n - \tilde{F}_{vm}^{n-1} + o(\Delta t^2). \quad (2.57)$$

где

$$\tilde{E}_{vm}^n = \frac{\xi_x \mu_t}{\text{Re}J} \left[ 0, -\frac{2}{3} \left( \eta_z \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^n, \left( \eta_z \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^n, -\frac{2}{3} \left( \eta_z u \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta_z w \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^n \right]^T,$$

$$\tilde{F}_{vm}^n = \frac{\eta_z \mu_t}{\text{Re}J} \left[ 0, \left( \xi_x \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^n, -\frac{2}{3} \left( \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^n, \left( \xi_x u \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \xi_x w \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^n \right]^T.$$

С учетом (2.55-2.57), система (2.54) может быть записана:

$$\tilde{U}_t^{n+1} + \Delta t \left[ (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi^n \tilde{U}^{n+1}) - \frac{\partial \tilde{E}_{v21}^{n+1}}{\partial \xi} + \right. \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \widehat{B}^+ + \widehat{B}^- \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left( B_\eta^n \widetilde{U}^{n+1} \right) - \frac{\partial \widetilde{F}_{v21}^{n+1}}{\partial \eta} \Bigg] = \\
& = \widetilde{U}^n + \Delta t \left[ \frac{\partial \widetilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \widetilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (2\widetilde{E}_{vm}^n - \widetilde{E}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2\widetilde{F}_{vm}^n - \widetilde{F}_{vm}^{n-1}) \right] - \\
& - \Delta t \left[ \widehat{A}^- \frac{\partial}{\partial \xi} (\widetilde{E}_\xi + \widetilde{D}_\xi) + \widehat{A}^+ \frac{\partial}{\partial \xi} (\widetilde{E}_\xi + \widetilde{D}_\xi) + \widehat{B}^- \frac{\partial}{\partial \eta} (\widetilde{E}_\eta + \widetilde{D}_\eta) + \widehat{B}^+ \frac{\partial}{\partial \eta} (\widetilde{E}_\eta + \widetilde{D}_\eta) \right]
\end{aligned}$$

где  $\widehat{A}^\pm = R \widehat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1}$ ,  $\widehat{B}^\pm = T \widehat{\Lambda}_\eta T^{-1} = T \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\eta)}{2} \right) T^{-1}$ .

Матрицы собственных значений, правых и левых собственных векторов матриц Якоби приведены в приложении Б.

После факторизации уравнения (2.58) имеем:

$$\left\{ I + \Delta t \left[ (\widehat{A}^+ + \widehat{A}^-)^n \frac{\partial}{\partial \xi} A_\xi^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \xi} \widetilde{\mu}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\widetilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times \tag{2.59}$$

$$x \left\{ I + \Delta t \left[ (\widehat{B}^+ + \widehat{B}^-)^n \frac{\partial}{\partial \xi} B_\xi^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \eta} \widetilde{\mu}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\widetilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \widetilde{U}^{n+1} = RHS$$

здесь  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} A_\xi^n \bullet \right\} \widetilde{U}^{n+1} = \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi^n \widetilde{U}^{n+1})$ ,  $\widetilde{\mu}_\xi = \frac{\mu \xi^2}{\text{Re} J}$ ,  $\widetilde{\mu}_\eta = \frac{\mu \eta^2}{\text{Re} J}$ ,  $RHS$  - правая часть (2.58).

Аппроксимация конвективных членов осуществлялась следующим образом:

$$\left( \widehat{A}^- + \widehat{A}^+ \right) \frac{\partial}{\partial \xi} f \Bigg|_{ij} = \frac{\widehat{A}_{i+1/2j}^- (f_{i+1j} - f_{ij}) + \widehat{A}_{i-1/2j}^+ (f_{ij} - f_{i-1j})}{\Delta \xi}$$

При аппроксимации диффузионных членов использовалась конечно-разностная схема.



$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right|_{ij} = \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{2\Delta\xi^2} + o(\Delta\xi^2),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} f \right|_{ij} = \frac{\varphi_{i+1j}(f_{i+1j+1} - f_{i-1j+1}) - \varphi_{i-1j}(f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1})}{4\Delta\xi\Delta\eta} + o(\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2),$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} f \right|_{ij} = \frac{(\varphi_{ij+1} + \varphi_{ij})(f_{ij+1} - f_{ij}) - (\varphi_{ij} + \varphi_{ij-1})(f_{ij} - f_{ij-1})}{2\Delta\eta^2} + o\left(\frac{1}{2}\Delta\eta^2\right).$$

Решение системы (2.59), осуществляется методом расщепления относительно вектора  $\tilde{U}$  матричной прогонкой:

1 шаг

$$\begin{aligned} & \Delta t \left\{ - \frac{(R \widehat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j} (A_{\xi x}^n)_{i+1j}}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{\mu}_{\xi ij} + \tilde{\mu}_{\xi i+1j}}{2\Delta\xi^2 \tilde{U}_{1i+1j}^n} \right\} U_{i+1j}^* - \\ & - \left\{ I + \Delta t \left[ \frac{(R \widehat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j} (A_{\xi x}^n)_{ij} - (R \widehat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j} (A_{\xi x}^n)_{ij}}{\Delta\xi} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\tilde{\mu}_{\xi i-1j} + 2\tilde{\mu}_{\xi ij} + \tilde{\mu}_{\xi i+1j}}{2\Delta\xi^2 \tilde{U}_{1ij}^n} \right] \right\} U_{ij}^* + \\ & + \Delta t \left\{ \frac{(R \widehat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j} (A_{\xi x}^n)_{i-1j}}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{\mu}_{\xi ij} + \tilde{\mu}_{\xi i-1j}}{2\Delta\xi^2 \tilde{U}_{1i-1j}^n} \right\} U_{i-1j}^* = \\ & = - \left\{ \tilde{U}_{ij}^n + \Delta t \left[ \frac{\partial \tilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (2\tilde{E}_{vm}^n - \tilde{E}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2\tilde{F}_{vm}^n - \tilde{F}_{vm}^{n-1}) \right] \right\} - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta\xi} \left[ \hat{A}_{i+1/2j}^- (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i+1j}^n - \hat{A}_{i+1/2j}^- (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij}^n + \hat{A}_{i-1/2j}^+ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij}^n - \hat{A}_{i-1/2j}^+ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i-1j}^n \right] - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta\eta} \left[ \hat{B}_{ij+1/2}^- (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{ij+1}^n - \hat{B}_{ij+1/2}^- (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{ij}^n + \hat{B}_{ij-1/2}^+ (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{ij}^n - \hat{B}_{ij-1/2}^+ (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{i-1j}^n \right] \} \end{aligned} \quad (2.60)$$

2 шаг

$$\begin{aligned}
& \Delta t \left\{ -\frac{(T \hat{\Lambda}_\eta^- T^{-1})_{i,j+1/2} (B_{\eta z}^n)_{i,j+1}}{\Delta \eta} + \frac{\tilde{\mu}_{\eta i j} + \tilde{\mu}_{\eta i j+1}}{2\Delta \eta^2 \tilde{U}_{1 i j+1}^n} \right\} \tilde{U}_{i j+1}^{n+1} - \\
& - \left\{ I + \Delta t \left[ \frac{(T \hat{\Lambda}_\eta^+ T^{-1})_{i,j-1/2} (B_{\eta z}^n)_{i,j} - (T \hat{\Lambda}_\eta^- T^{-1})_{i,j+1/2} (B_{\eta z}^n)_{i,j}}{\Delta \eta} + \frac{\tilde{\mu}_{\eta i j-1} + 2\tilde{\mu}_{\eta i j} + \tilde{\mu}_{\eta i j+1}}{2\Delta \eta^2 \tilde{U}_{1 i j}^n} \right] \right\} \tilde{U}_{i j}^{n+1} + \\
& + \Delta t \left\{ \left[ \frac{(T \hat{\Lambda}_\eta^+ T^{-1})_{i,j-1/2} (B_{\eta z}^n)_{i,j-1}}{\Delta \eta} + \frac{\tilde{\mu}_{\eta i j} + \tilde{\mu}_{\eta i j-1}}{2\Delta \eta^2 \tilde{U}_{1 i j-1}^n} \right] \tilde{U}_{i j-1}^{n+1} = -\tilde{U}_{i j}^* \right.
\end{aligned}$$

Где

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_{i+1/2j}^- \left[ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i+1j} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i,j} \right] + \hat{A}_{i-1/2j}^+ \left[ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i,j} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i-1j} \right] = \\
& = (R \hat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j} \left\{ \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\bar{\alpha}_L)_{i+1j}} \left[ (\bar{\alpha}_2)_{i+1j} \bar{E}_{i+3/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{i+1j} (\bar{E}_{i+3/2j} + \bar{E}_{i+1/2j}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\bar{\alpha}_0)_{i+1j} \bar{E}_{i+1/2j} + (\bar{\alpha}_2)_{i+1j} \Delta_+ \hat{D}_{i+3/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{i+1j} (\Delta_- \hat{D}_{i+3/2j} + \Delta_+ \bar{D}_{i+1/2j}) \right] + \right. \\
& \quad \left. + (\bar{\alpha}_0)_{i+1j} \Delta_- \bar{D}_{i+1/2j} \right] - \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\bar{\alpha}_L)_{ij}} \left[ (\bar{\alpha}_2)_{ij} \bar{E}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{ij} (\bar{E}_{i+1/2j} + \bar{E}_{i-1/2j}) + (\bar{\alpha}_0)_{ij} \bar{E}_{i-1/2j} + \right. \\
& \quad \left. + (\bar{\alpha}_2)_{ij} \Delta_+ \hat{D}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{ij} (\Delta_- \hat{D}_{i+1/2j} + \Delta_+ \bar{D}_{i-1/2j}) + (\bar{\alpha}_0)_{ij} \Delta_- \bar{D}_{i-1/2j} \right] \left. \right\} + \\
& + (R \hat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j} \left\{ \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\alpha_L)_{ij}} \left[ (\alpha_2)_{ij} \bar{E}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{ij} (\bar{E}_{i+1/2j} + \bar{E}_{i-1/2j}) + (\alpha_0)_{ij} \bar{E}_{i-1/2j} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\alpha_2)_{ij} \Delta_+ \bar{D}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{ij} (\Delta_- \bar{D}_{i+1/2j} + \Delta_+ \hat{D}_{i-1/2j}) + (\alpha_0)_{ij} \Delta_- \hat{D}_{i-1/2j} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\alpha_L)_{i-1j}} \left[ (\alpha_2)_{i-1j} \bar{E}_{i-1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{i-1j} (\bar{E}_{i-1/2j} + \bar{E}_{i-3/2j}) + (\alpha_0)_{i-1j} \bar{E}_{i-3/2j} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\alpha_2)_{i-1j} \Delta_+ \bar{D}_{i-1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{i-1j} (\Delta_- \bar{D}_{i-1/2j} + \Delta_+ \hat{D}_{i-3/2j}) + (\alpha_0)_{i-1j} \Delta_- \hat{D}_{i-3/2j} \right] \right\}
\end{aligned}$$

здесь

$$\bar{E}_{\xi_{i+1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{2} \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right] \Delta_+ \tilde{E}_i,$$

$$\bar{E}_{\xi_{i-1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{2} \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right] \Delta_- \tilde{E}_i,$$

$$\bar{D}_{\xi_{i+1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{6} \left[ \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right] \Delta_+ \tilde{E}_i,$$

$$\bar{D}_{\xi_{i-1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{6} \left[ \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right] \Delta_- \tilde{E}_i,$$

$$\hat{D}_{\xi_{i+1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right) + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right) \right] \Delta_+ \tilde{E}_i$$

$$\hat{D}_{\xi_{i-1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right) + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right) \right] \Delta_- \tilde{E}_i,$$

весовые коэффициенты

$$(\alpha_0)_{ij} = \frac{1}{12(\delta + Is_{ij})^3}, (\alpha_1)_{ij} = \frac{1}{2(\delta + Is_{i+1j})^3}, (\alpha_2)_{ij} = \frac{1}{4(\delta + Is_{i+2j})^3},$$

$$(\bar{\alpha}_0)_{ij} = \frac{1}{4(\delta + Is_{ij})^3}, (\bar{\alpha}_1)_{ij} = \frac{1}{2(\delta + Is_{i+1j})^3} \text{ and } (\bar{\alpha}_2)_{ij} = \frac{1}{12(\delta + Is_{i+2j})^3}$$

Параметр  $Is_{ij}$  является показателем гладкости решения и определяется путем суммирования всех средне- квадратичных значений [122, Р. 202] следующим образом:

$$Is_{ij} = \frac{1}{2} \left[ (\Delta \tilde{U}_{i-2j})^2 + (\Delta \tilde{U}_{i-1j})^2 \right] + [\Delta^2 \tilde{U}_{i-2j}]^2, \quad \text{где} \quad \Delta \tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{i+1j} - \tilde{U}_{ij} \quad \text{и} \\ \Delta^2 \tilde{U}_{ij} = \Delta \tilde{U}_{i+1j} - \Delta \tilde{U}_{ij}.$$

Второе слагаемое правой части системы (2.60) определяется аналогично

## 2.9 Вычисление поля температуры

По известным значениям переменных  $u$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $E_t$  и  $Y_k$  ( $k=1,\dots,7$ ) вычисляется поле температуры. Для этого уравнение для полной энергии (2.3) записывается в виде:

$$E_t = \frac{\rho h}{\gamma_\infty M_\infty^2} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} \frac{\tilde{H}}{W} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \quad (2.61)$$

где  $\tilde{H}$  - молярная энтальпия смеси газов, которая имеет вид:

$$\tilde{H}(T) = \sum_{k=1}^N X_k \tilde{H}_k(T)$$

$\tilde{H}_k(T)$  - молярная энтальпия  $k$ -ой компоненты смеси определяется из таблицы JANAF [105, с.35]:

$$\tilde{H}_k(T) = \sum_{j=1}^N \bar{a}_{jk} \frac{T^j}{j} + \bar{a}_{N+1,k} \quad \text{где} \quad \bar{a}_{jk} = a_{jk} T_\infty^{j-1}, \quad \bar{a}_{N+1,k} = \frac{a_{N+1,k}}{T_\infty}$$

где  $a_{jk}$  - эмпирическая константа, приведенная в приложении А.

Исключая давление из (2.61) с помощью (2.2) уравнение для температуры представиться в виде:

$$E_t = \rho \frac{\tilde{H}(T)}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} - \frac{\rho R T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \quad (2.62)$$

или

$$f(T) = E_t - \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} (\tilde{H}(T) - RT) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = 0 \quad (2.63)$$

Решение алгебраического уравнения (2.63) осуществляется методом Ньютона-Рафсона [123, с.69], обладающим квадратичной скоростью сходимости, итерационная формула которого имеет вид:

$$T^{n+1} = T^n - \frac{f(T^n)}{\partial f(T^n) / \partial T} \quad (2.64)$$

где верхний индекс  $n$  – номер итерации. Итерация продолжается до тех пор, пока абсолютное значение разности между двумя последовательными значениями температуры не станет меньше заранее заданной малой величины, т.е.:

$$|T^{n+1} - T^n| < \varepsilon$$

Производные в (2.64) имеют следующий вид

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \frac{\rho}{W} \left( \frac{\partial \tilde{H}(T)}{\partial T} - 1 \right). \quad (2.65)$$

Далее с учетом того, что

$$\frac{\partial \tilde{H}(T)}{\partial T} = \sum_{j=1}^N \bar{a}_{jk} T^{j-1} = \sum_{k=1}^N X_k C_{pk}(T) = C_p(T)$$

окончательное значение производных запишется следующим образом

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T} = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \frac{\rho}{W} (C_p(T) - 1)$$

## 2.10 Результаты расчетов и численный анализ решения задачи взаимодействия ударной волны с пограничным слоем.

Параметры вычислительной области были приняты следующими: высота и ширина  $H=20\text{ см}$  и  $L=120\text{ см}$ . При численном расчете во входном сечении задается толщина пограничного слоя  $\delta_1=3.5\text{ см}$ , вычисленная для  $x=300\text{ см}$ . Сгущение сетки вблизи стенки осуществляется таким образом, что для первого от стенки узла сетки выполняется условие  $z^+=4.5$ , для пристенного слоя приходится 5-8 узловых точек по направлению оси  $z$ , а расчет пограничного слоя выполняется с использованием 35-40 узлов расчетной сетки. Для расчета рассматриваемой области используется сетка с узлами  $301 \times 281$ .

Рассматривается сверхзвуковое течение вдоль тонкой пластины с генератором скачка уплотнения на верхней границе с параметрами задачи, соответствующими экспериментам работы [44], где число Маха набегающего потока  $M_\infty=5$ , число Рейнольдса  $Re=40 \cdot 10^6$ , температура стенки  $T_w=300\text{ K}$ . Эксперимент проводился для угла генератора скачка  $\alpha=14^\circ$ , который соответствовал отрывному течению пограничного слоя. На рисунке 2.2 представлены результаты сравнения с экспериментами коэффициента трения (рис. 2.2а) и давления (рис. 2.2б) на стенке, здесь «◆◆◆» – эксперимент и «---» – расчет работы [44], «—» – WENO схема. Из графиков можно отметить удовлетворительное согласие экспериментов [44] и численных расчетов.

Также на фигуре 2.3 показаны шлирен фотографии и распределения плотности для углов генератора скачка  $\alpha=10^\circ$  и  $\alpha=14^\circ$ . Так при безотрывном течении для  $\alpha=10^\circ$  видно падение ударной волны 1 на стенку и ее отражение. При  $\alpha=14^\circ$  для отрывного течения наблюдается формирование сложной  $\lambda$ -образная структура отрыва пограничного слоя. Здесь 1 – головной скачок уплотнения, падающий на стенку, 2 – волна сжатия, 3 – отраженный

скачок уплотнения, 5 – волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока.

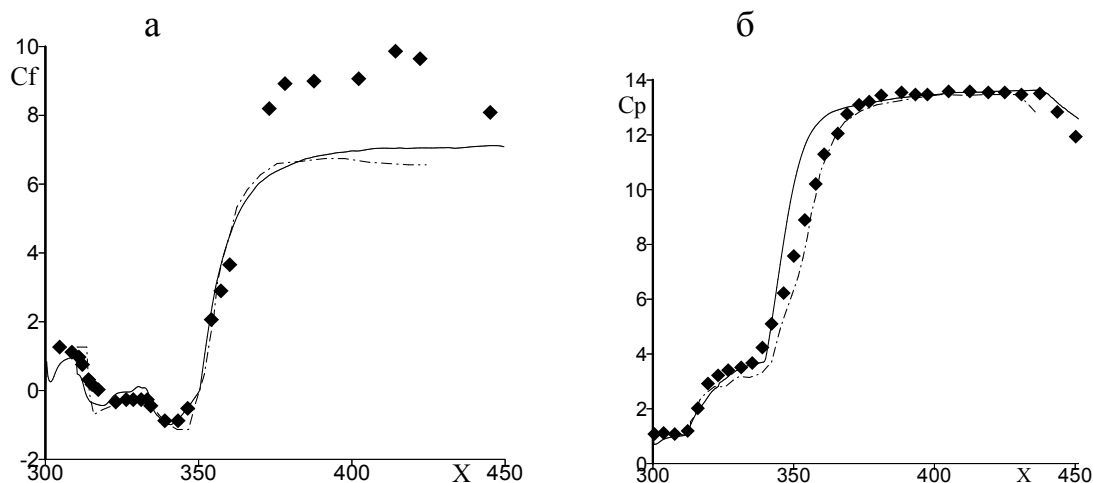
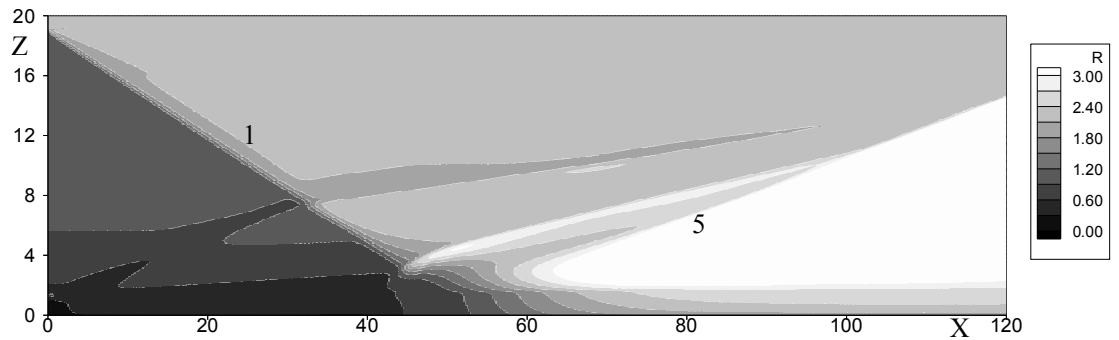


Рисунок 2.2 Распределение коэффициента трения (а) и давления (б) на стенке «◆◆◆» – эксперимент и «---» – расчет работы[44], «—» – WENO схема.

Из графиков следует качественное согласование расчетных и экспериментальных данных.

Далее производилось изучение взаимодействия скачка уплотнения (угол генератора  $\alpha=10^\circ$ ) с пограничным слоем на стенке при различных числах Маха набегающего потока. Влияние числа Маха потока отражено на картине поля вектора скорости представлено на рисунке 2.4 (2.4а-  $M_\infty=5$ , 2.4б-  $M_\infty=4,5$ , 2.4в-  $M_\infty=4$ , 2.4г-  $M_\infty=3,5$ ). Результаты показывают, что при числах Маха равных 5 и 4.5 происходит безотрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем (фигуры 2.4а и 2.4б) . При числах Маха потока равных четырем и ниже уже можно наблюдать возвратное течение на стенке (рис. 2.4а и 2.4б). Таким образом, рост числа Маха потока заметно сокращает дозвуковую область вблизи стенки и очевидно интенсивности скачка уплотнения для этих случаев не является достаточным для формирования отрывной зоны.

а



б

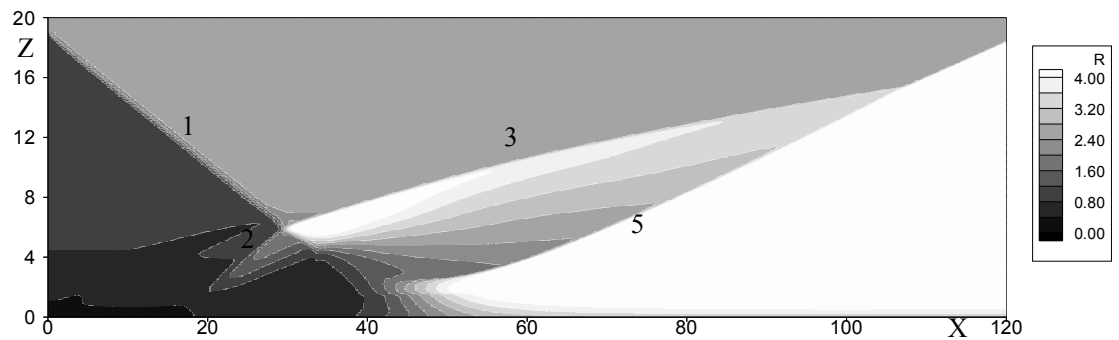


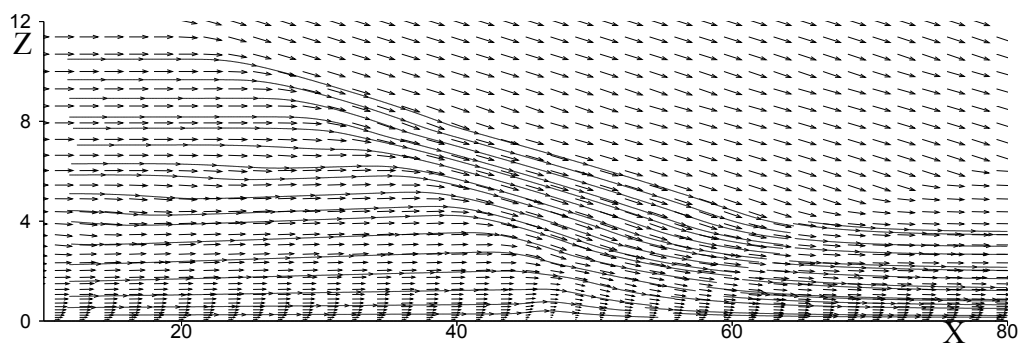
Рисунок 2.3 - Шлирен фотографии и распределения плотности для углов генератора скачка а)  $\alpha=10^\circ$  и б)  $\alpha=14^\circ$ .



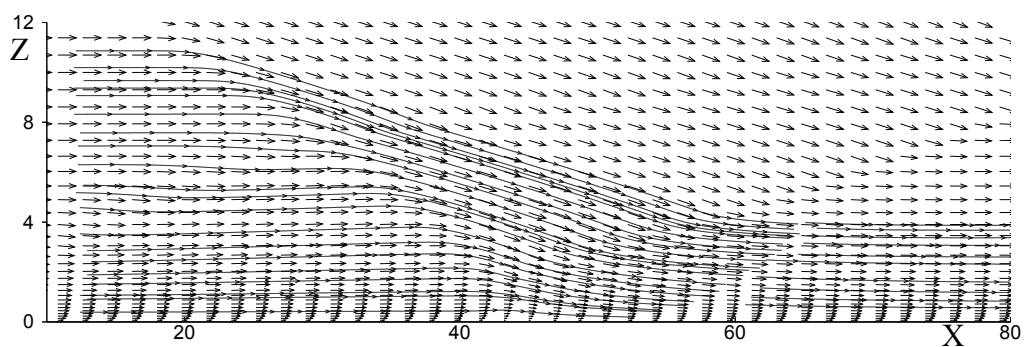
Уменьшение Маха потока с 4 до 3,5 приводит к увеличению зоны отрыва потока на стенке, что можно наблюдать из распределения линий тока и местного числа Маха, представленных на графике 2.5 (2.5а-  $M_\infty=4$ , 2.5б-  $M_\infty=3,5$ ). Из картины изомах видно, что дозвуковая область в зоне падения скачка уплотнения для больших значений числа Маха потока маленькая, она не успевает сформироваться и практически отсутствует. Это является следствием того, что при возрастании скорости основного потока угол наклона косоугольного скачка уплотнения уменьшается, что в свою очередь влечет менее интенсивное взаимодействие ударной волны с пограничным слоем.

Картина распределения изобар, представленная на рисунке 2.6 (2.6а-  $M_\infty=5$ , 2.6б-  $M_\infty=4,5$ , 2.6в-  $M_\infty=4$ , 2.6г-  $M_\infty=3,5$ ) демонстрирует ударно-волновую структуру течения. Здесь видно, что при  $M_\infty=5$  и  $M_\infty=4,5$  происходит падение и отражение скачка уплотнения от стенки (1 и 5 на графиках 2.6а и 2.6б). Тогда как для случаев  $M_\infty=4$  и  $M_\infty=3,5$  (фигуры 2.6в и 2.6г) еще возникает  $\lambda$ -образная ударно-волновая структура течения, и которая достаточно хорошо просматривается.

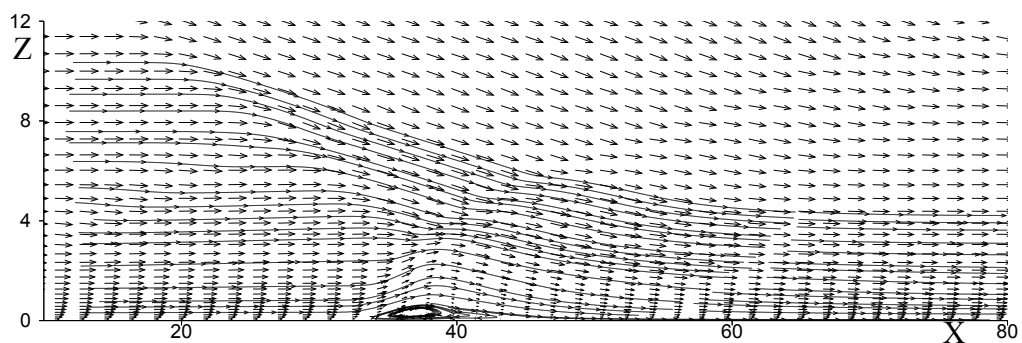
Из картины распределения давления на стенке, представленной на рисунке 2.7 (линия 1—  $M_\infty=5$ , линия 2 — —  $M_\infty=4,5$ , линия 3 - · -  $M_\infty=4$ , и линия 4 - -  $M_\infty=3,5$ ) можно наблюдать существенное возрастание значений давления в области падения скачка уплотнения 1 на стенке с увеличением числа Маха потока. Эти результаты подтверждают тот факт, что при возрастании скорости течения разница между давлением за скачком и давлением в потоке растет. Для отрывных случаев течения ( $M_\infty=4$  и  $M_\infty=3,5$ ) происходит дополнительное повышение давления за счет возникновения волны сжатия 2 и как следствие отрыва пограничного слоя на стенке, причем для  $M_\infty=3,5$  избыточное давление, шире в 1.55 раз, чем для  $M_\infty=4$ .



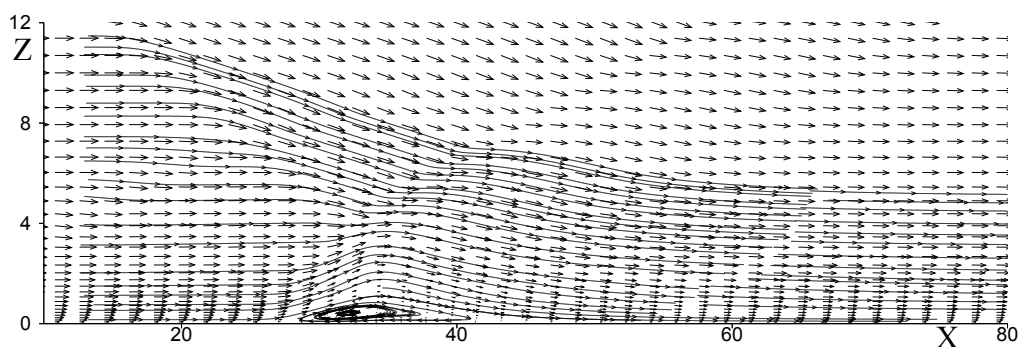
а



б



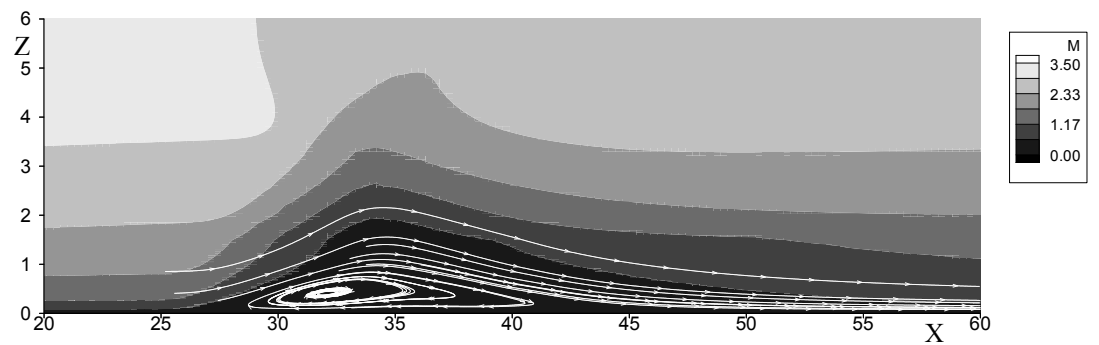
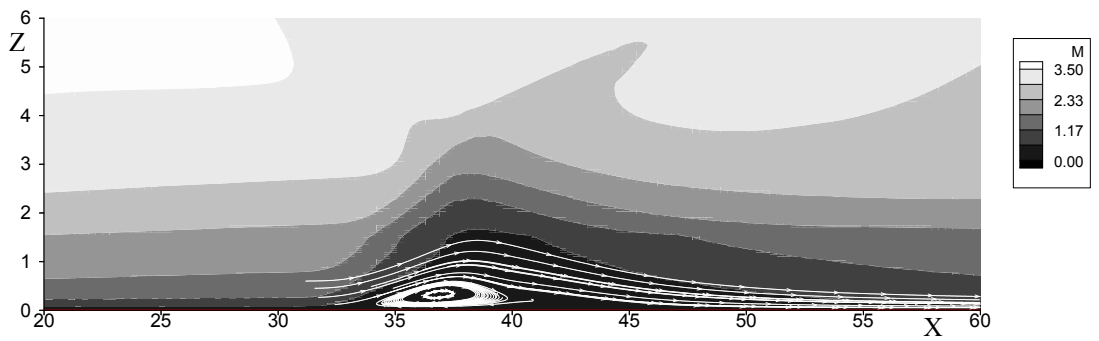
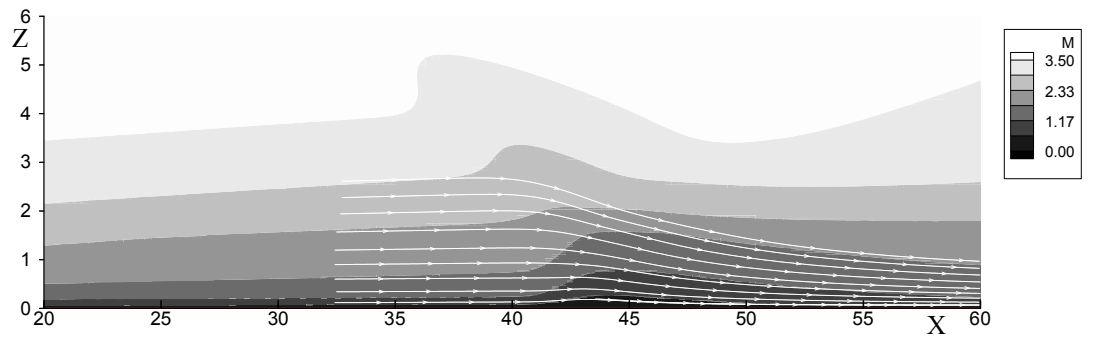
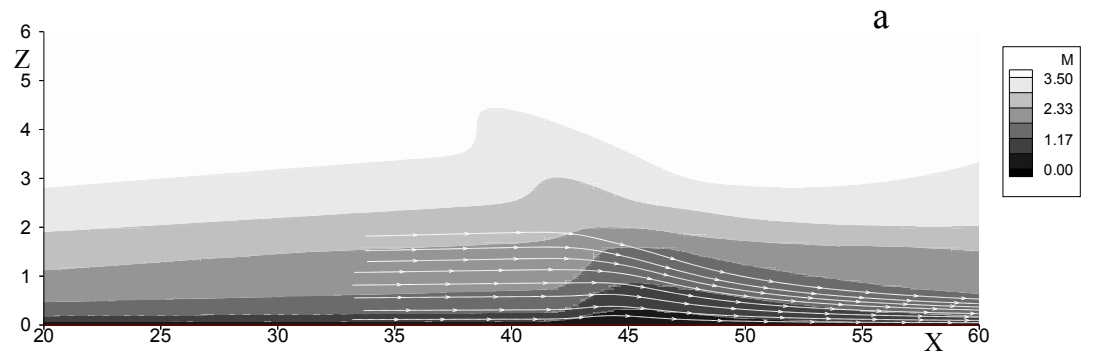
в



г

Рисунок 2.4 - Поле вектора скорости

а-  $M_\infty=5$ , б-  $M_\infty=4,5$ , в-  $M_\infty=4$ , г-  $M_\infty=3,5$



б

Рисунок 2.5 - Распределение местного числа Маха и Линии тока

а-  $M_\infty=5$ , б-  $M_\infty=4,5$ , в-  $M_\infty=4$ , г-  $M_\infty=3,5$

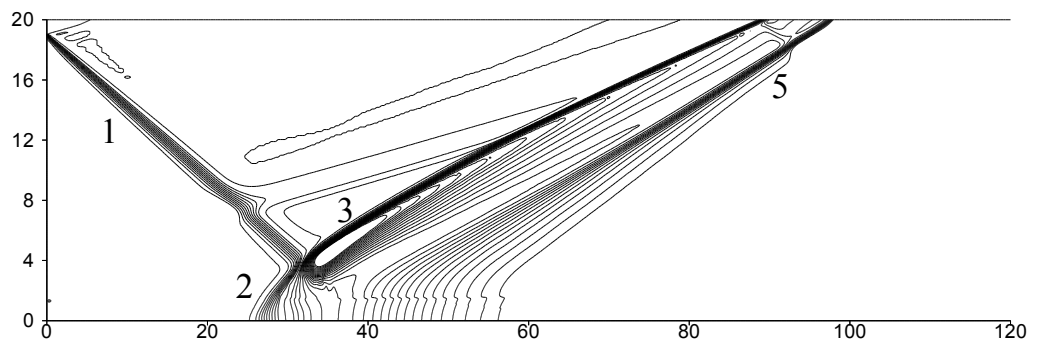
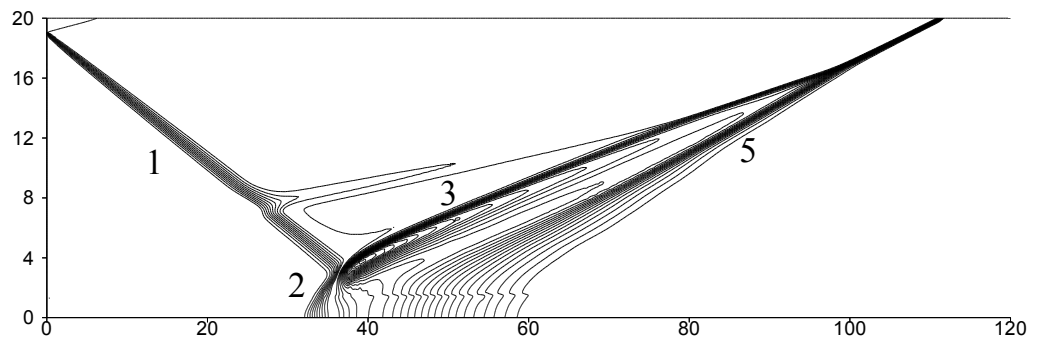
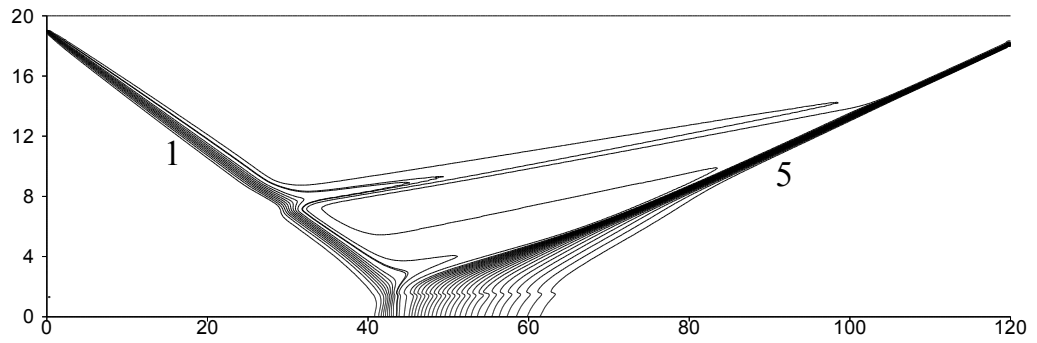
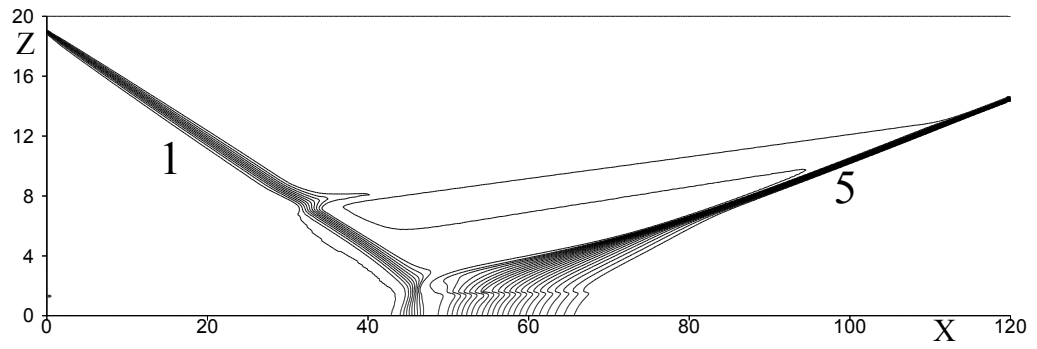


Рисунок 2.6 - Распределение изобар  
 а-  $M_{\infty}=5$ , б-  $M_{\infty}=4,5$ , в-  $M_{\infty}=4$ , г-  $M_{\infty}=3,5$

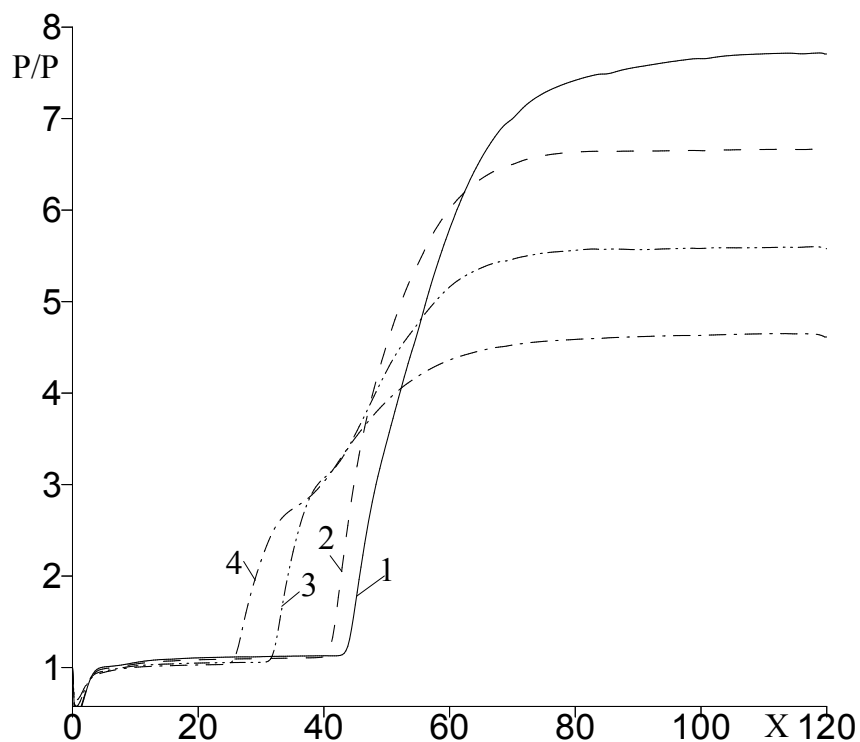


Рисунок 2.7 - Распределение давления на стенке

1-  $M_{\infty}=5$ , 2-  $M_{\infty}=4,5$ , 3-  $M_{\infty}=4$ , 4-  $M_{\infty}=3,5$

Как было сказано выше, при угле генератора  $\alpha=14^{\circ}$ , Махе потока  $M=5$  и  $Re=40 \cdot 10^6$  имеет место отрывной характер течения, возникает вопрос: сохранится ли этот отрыв для других значений числа Рейнольдса. Ниже приведены результаты численного эксперимента по изучению взаимодействия скачка уплотнения (угол генератора  $\alpha=14^{\circ}$ ) с пограничным слоем на стенке при различных значениях числа Рейнольдса. Во входном сечении толщина пограничного слоя и толщина пристенного слоя, содержащего вязкий подслой, вычисленная по формуле (2.1) для  $x=100$  при разных значения чисел  $Re$  представлены в таблице 2.2:

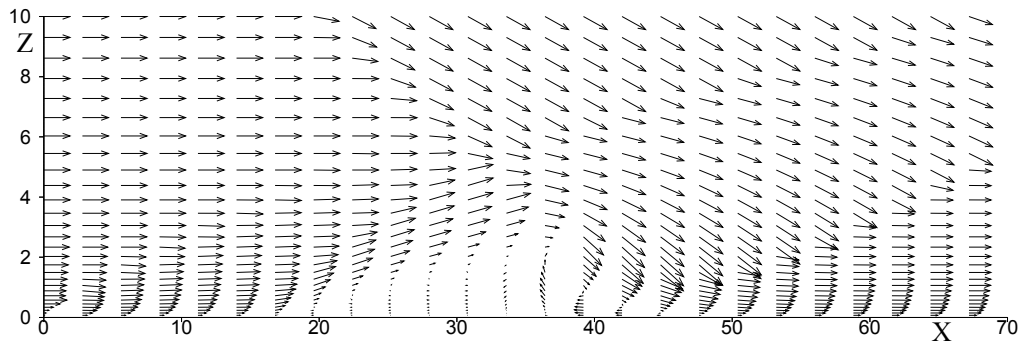
Таблица 2.2 Толщина пограничного слоя при различных числах Re.

	$\delta_1$	$\delta_2$
$Re=10^6$	0,73	0,14
$Re=10^5$	1,16	0,23
$Re=10^4$	1,82	0,36
$Re=10^3$	2,86	0,57

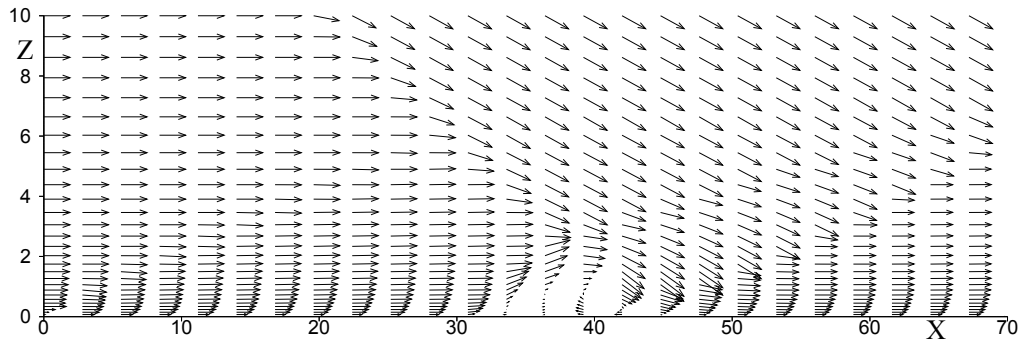
Анализ влияния толщины пограничного слоя на поле вектора скорости показан на рисунке 2.8 (2.8а-  $Re=10^3$ , 2.8б-  $Re=10^4$ , 2.8в-  $Re=10^5$ , 2.8г-  $Re=10^6$ ). Результаты демонстрируют, что при всех исследуемых режимах течения происходит отрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем, однако размеры и структура области отрыва отличаются. Данный факт подтверждается картиной местного числа Маха и линий тока, представленных на графике 2.9 (а-  $Re=10^3$ , б-  $Re=10^4$ , в-  $Re=10^5$ , г-  $Re=10^6$ ). Из представленных результатов наблюдается рост зоны отрыва в зависимости от уменьшения числа Re. Это связано с возрастанием толщины вязкого подслоя пограничного слоя и как следствие приводящее к большему ее отрыву. Из рисунка 2.9, где видны структуры отрывных областей, можно увидеть что при  $Re=10^3$  (рисунок 2.9а) просматривается сложная многовихревая структура отрыва, виден вихрь непосредственно возле стенке и два вихря выше стенки. Аналогичные результаты были получены в ряде теоретических исследований [130-131]. Для  $Re=10^4$  (рисунок 2.9б) область отрыва уже состоит из двух вихрей, а для  $Re=10^5$  и  $Re=10^6$  на графиках просматриваются только по одному вихрю. Из фигуры 2.10, где можно наблюдать поле изобар в области возникновения отрывных зон, для случаев  $Re=10^3$  и  $Re=10^4$ , то есть где имеет место многоструктурная отрывная область, видно, что ударно-волновая картина также имеет сложную форму,

что и может являться причиной возникновения множественных вихревых структур.

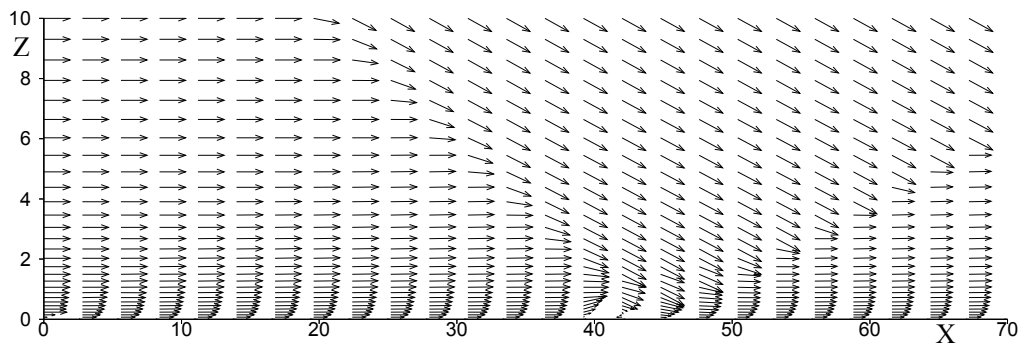
Картина распределения изобар, представленная на рисунке 2.11 (2.11а-  $Re = 10^3$ , 2.11б-  $Re = 10^4$ , 2.11в-  $Re = 10^5$ , 2.11г-  $Re = 10^6$ ) демонстрирует ударно-волновую структуру течения. Из рисунков следует, что скачок уплотнения (1), достигая нижней стенки, создает положительный градиент давления, который оказывается достаточным для отрыва пограничного слоя. При этом сверхзвуковая область пограничного слоя отклоняется и порождает волну сжатия (2), которая распространяется в виде отраженного скачка (3), (5) – волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока. Здесь видно, что при  $Re = 10^6$  (рисунок 2.11г) происходит падение и отражение скачка уплотнения от стенки (1 и 5 на графиках) т.е. картина соответствует почти безотрывному режиму течения. Тогда как для случаев  $Re = 10^5$  и  $Re = 10^4$  и  $Re = 10^3$  уже возникает  $\lambda$ -образная ударно-волновая структура течения. На рисунке 2.12 представлена зависимость высоты отрывной области от числа Рейнольдса. Видно что кривая на графике аналогична экспоненциально убывающей зависимости.



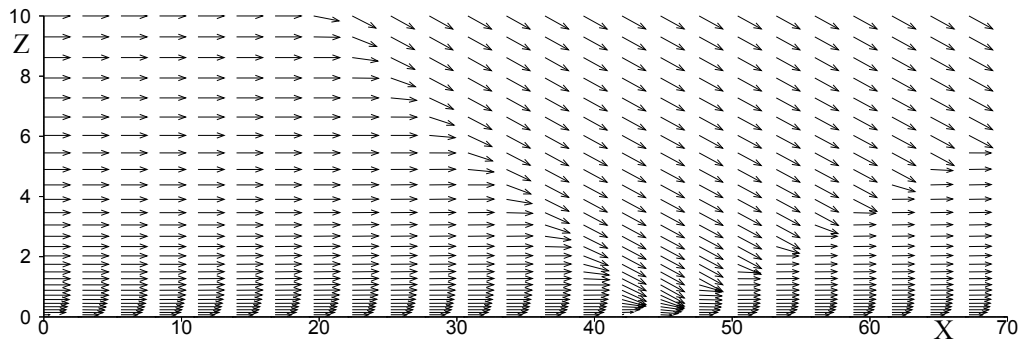
а



б



в



г

Рисунок 2.8. Поле вектора скорости

а-  $Re = 10^3$ , б-  $Re = 10^4$ , в-  $Re = 10^5$ , г-  $Re = 10^6$ .



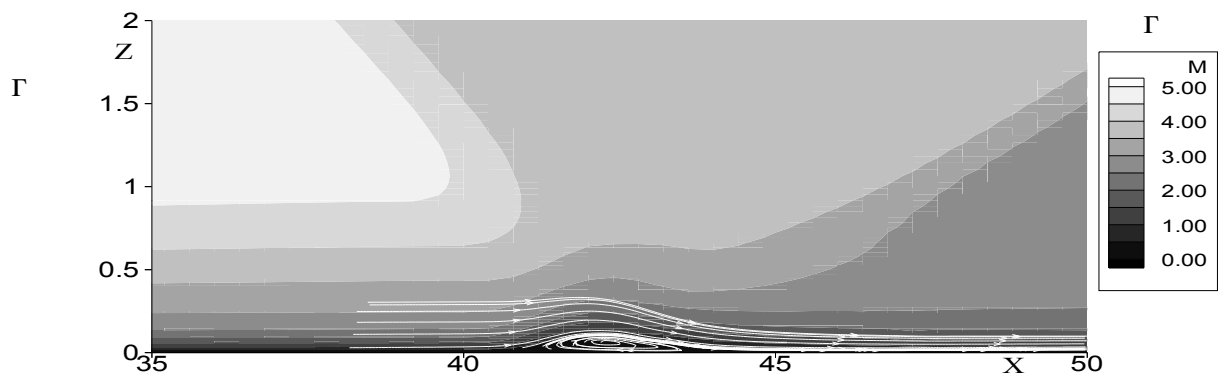
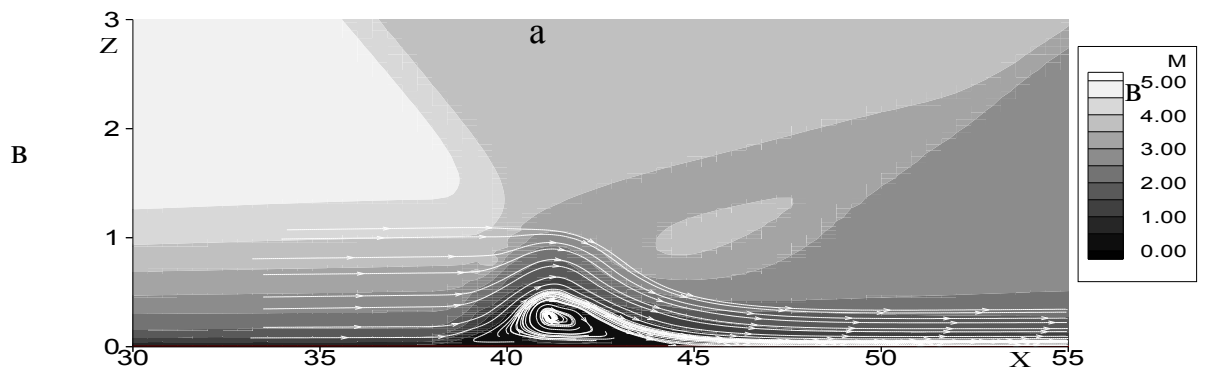
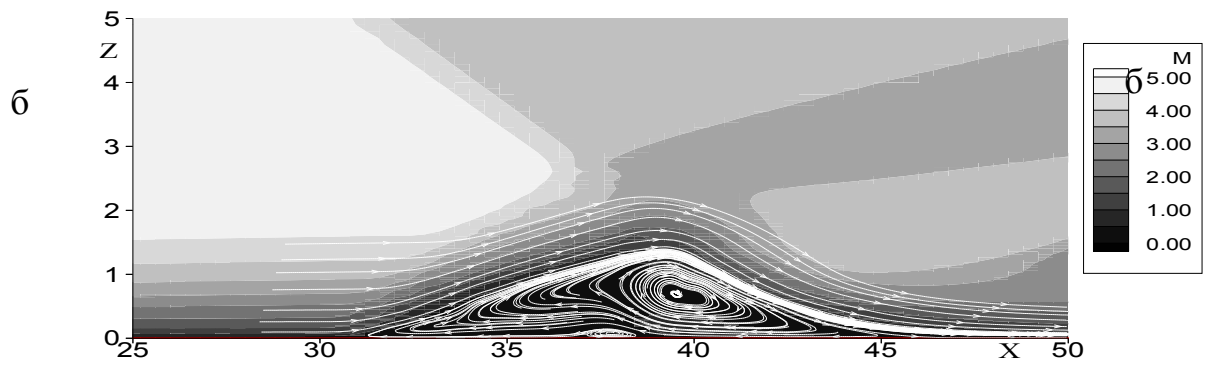
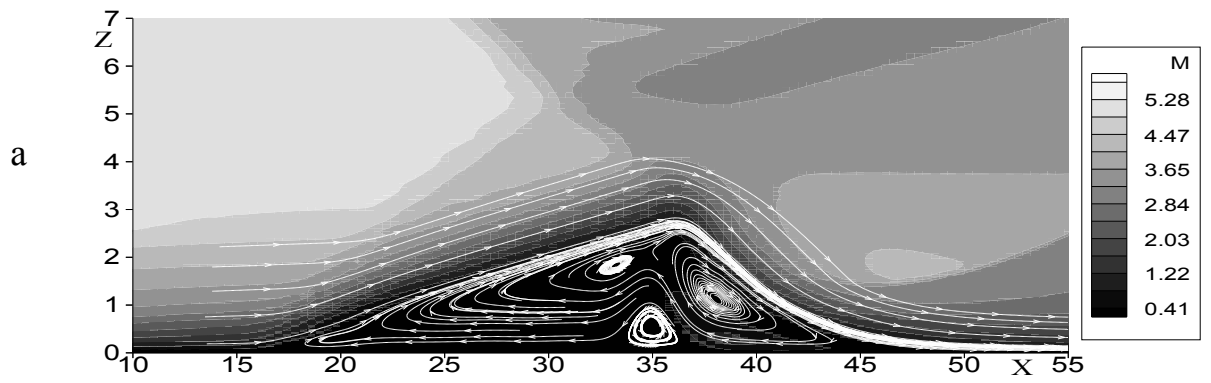


Рисунок 2.9. Распределение линий тока и местного числа Маха

а-  $Re=10^3$ , б-  $Re=10^4$ , в-  $Re=10^5$ , г-  $Re=10^6$ .

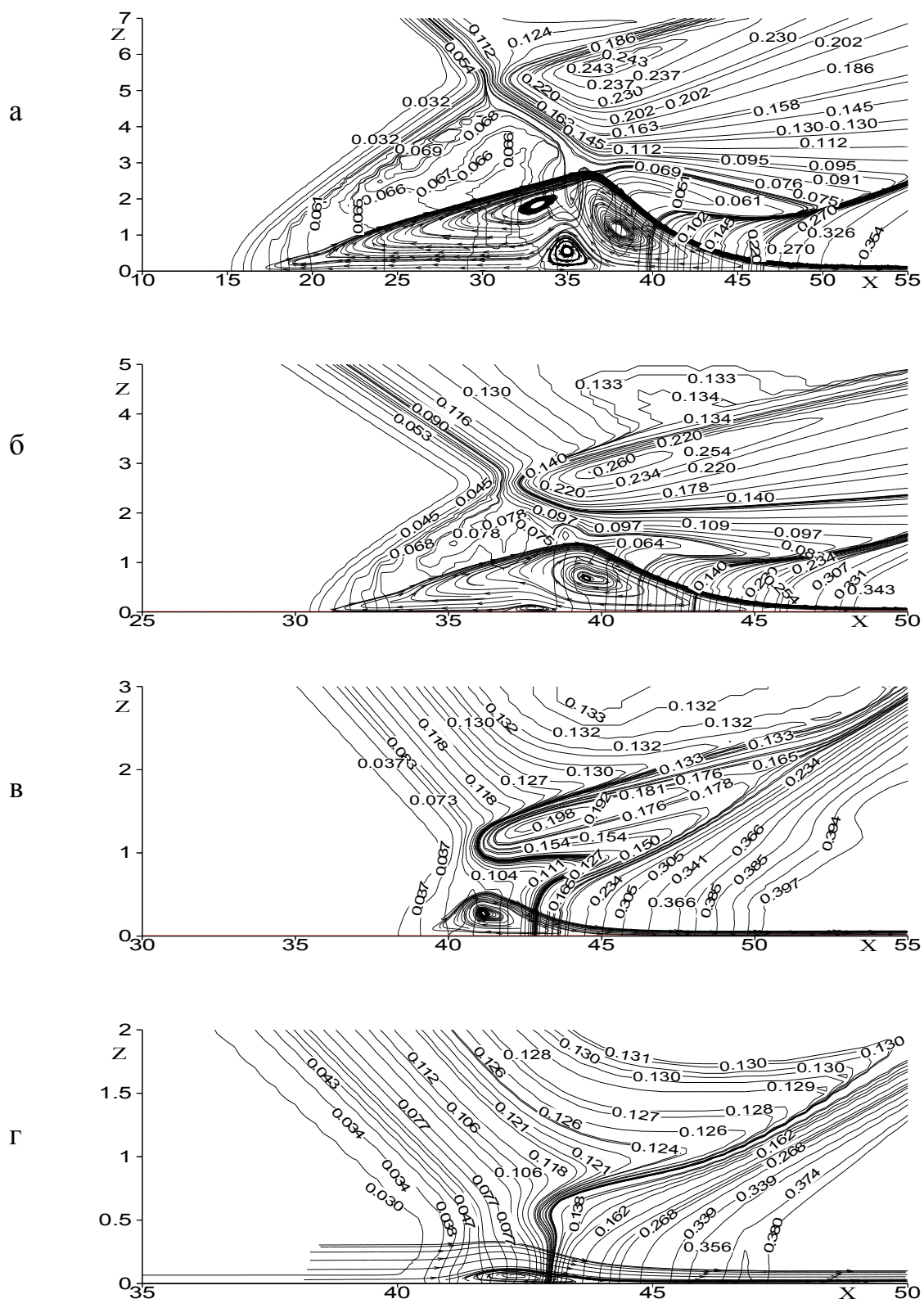


Рисунок 2.10. Распределение изобар и линий тока

а-  $Re=10^3$ , б-  $Re=10^4$ , в-  $Re=10^5$ , г-  $Re=10^6$ .

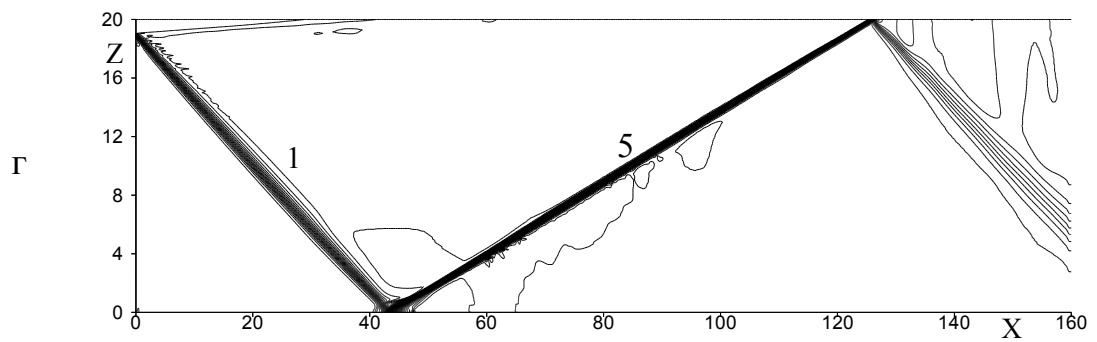
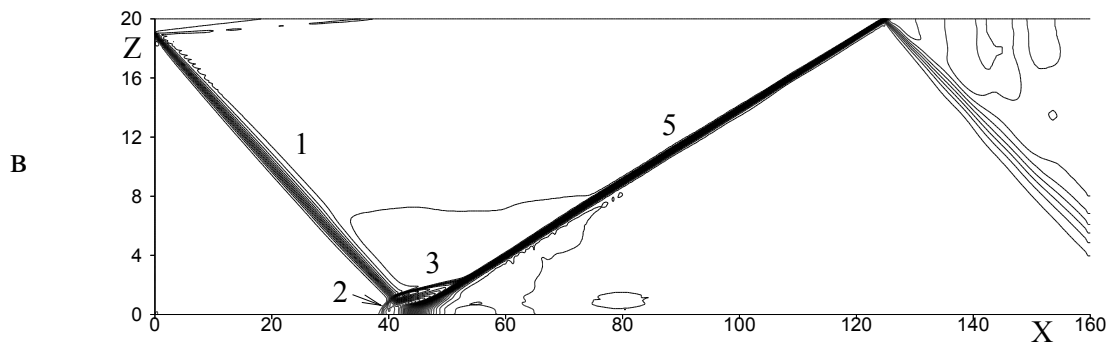
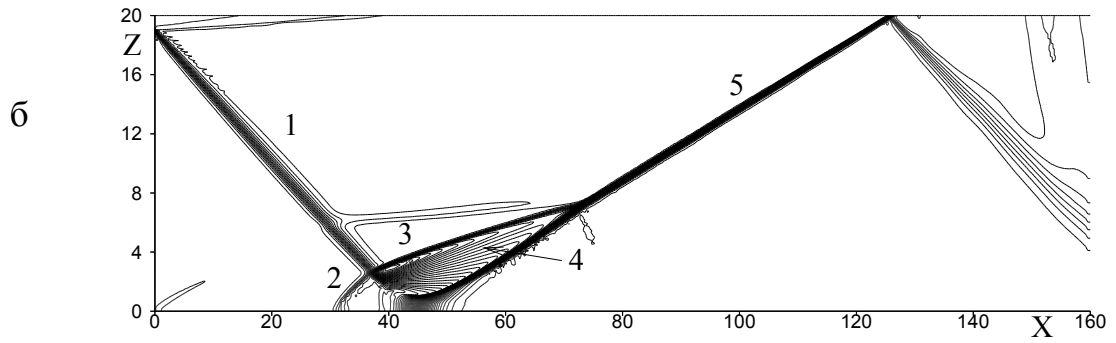
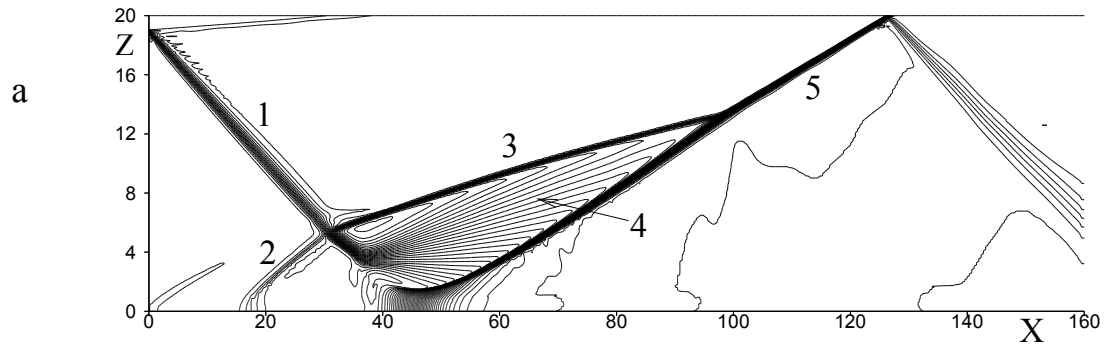


Рисунок 2.11. Распределение изобар

а-  $Re = 10^3$ , б-  $Re = 10^4$ , в-  $Re = 10^5$ , г-  $Re = 10^6$ .

$Re = 10^6$ .

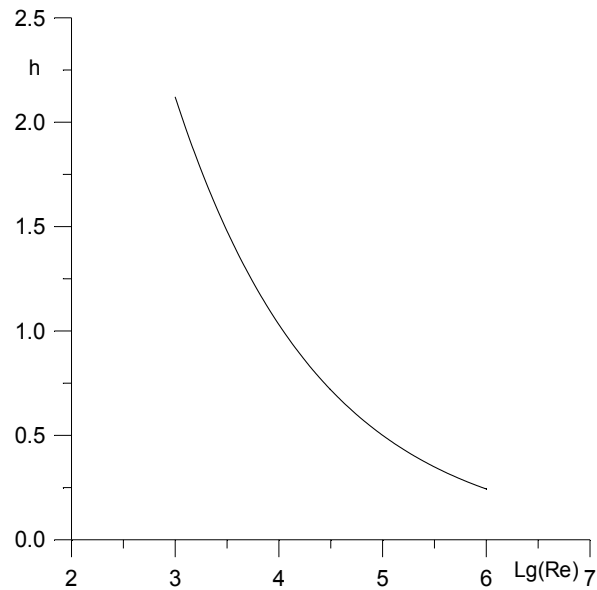


Рисунок 2.12. Зависимость высоты отрывной области от числа Рейнольдса.

## 2.10 Выводы по главе

Разработана методика решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения многокомпонентной газовой смеси, основанная на WENO схеме четвертого порядка точности. Проверка метода осуществлялась на примере расчета задачи взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем. Сопоставление расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование результатов. С помощью проведенных численных экспериментов выявлено, что с увеличением числа Маха потока с  $M_\infty=4,5$  и выше формируется безотрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем вследствие уменьшения пограничного слоя вблизи стенки в результате чего интенсивности скачка уплотнения не достаточно для формирования области отрыва. Изучена динамика образования зоны отрыва в зависимости от увеличения скорости набегающего потока а также проведен анализ избыточного давления на стенке в зависимости от числа Маха

сверхзвукового течения. С помощью проведенных численных экспериментов выявлено, что с увеличением числа Рейнольдса потока отрывная область существенно уменьшается вследствие уменьшения пограничного слоя у стенки. Уменьшение числа Рейнольдса приводит к многовихревой структуре отрыва потока, вследствие возрастания толщины вязкого подслоя пограничного слоя, приводящее к большему ее отрыву

### **ГЛАВА III. ПЛОСКОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ В КАНАЛЕ**

Во второй главе диссертации осуществлено построение весовой существенно-неосциллирующей WENO схемы для численного решения уравнений Навье-Стокса и в качестве тестовой рассмотрена задача взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем на стенке. Было получено согласование численных результатов с экспериментальными данными а также получена ударно-волновая картина течения и изучено влияние угла падения ударной волны и скорости потока на отрывную структуру на взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем. В данной главе рассматривается полная постановка искомой задачи, а именно взаимодействие поперечной струи с сверхзвуковым набегающим потоком в плоском канале. Здесь, как известно из экспериментов, помимо взаимодействия головной ударной волны, возникающей перед струей, с пограничным слоем на нижней стенке осуществляется взаимодействие

скачка уплотнения с верхней стенкой канала, в результате которого также формируется ударно-волновая структура. При этом после отражения ударной волны от верхней стенки может произойти вторичное взаимодействие с нижней стенкой вниз по потоку от вдуваемой струи. Немногочисленные исследования показывают очень сложную схематическую картину течения, представленную на рисунке 3.1. Здесь (1) – головной скачок уплотнения, возникающий вследствие торможения набегающего потока перед струей, (2) и (3) – косой и замыкающий скачки уплотнения, соответственно. Головной, косой и замыкающий скачки уплотнения, пересекаясь в одной точке, образуют  $\lambda$ -образную структуру. На схеме перед струей изображены вихри, образующиеся в результате первичного и вторичного отрывов потока от стенки. Также на рисунке схематически показано, что головной скачок (1), достигая верхней границы, создает положительный градиент давления, который оказывается достаточным для отрыва пограничного слоя на верхней стенке. При этом сверхзвуковая область пограничного слоя отклоняется и порождает волну сжатия (4), которая распространяется в виде отраженного скачка (5); (6) – волна сжатия, возникающая в месте присоединения отрывного потока.

Как было отмечено в главе 1 большинство существующих на данный момент работ по теоретическому изучению взаимодействия струи и набегающего потока в канале в основном рассматривают область вдува струи, и при этом, как правило, на верхней границе реализуются граничные условия симметрии или свободного потока [1-13], что значительно облегчает решение поставленной задачи. Практический интерес сверхзвукового течения с вдувом струй в канале связан с возникающими нагрузками как на верхнюю, так и на нижнюю стенки канала. При этом очевидно, что структура взаимодействия будет существенно зависеть от параметров вдуваемой струи, а также от высоты самого канала.

Цель данной главы является численное моделирование сверхзвукового течения в плоском канале с поперечным вдувом многокомпонентной струи с

нижней стенки канала и изучение взаимодействия головного скачка уплотнения, возникающей перед вдуваемой струей, с пограничным слоем как на нижней, так и на верхней стенках; численное изучение условий отрыва пограничного слоя на стенках, а также влияния параметра нерасчетности и ширины струи на возникновение отрыва. Схема течения показана на рисунке 3.1.

### 3.1 Постановка задачи

Математическая формулировка рассматриваемой задачи основывается на двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой, описанных в главе 2 (раздел 2.1 уравнения(2.1-2.7)).

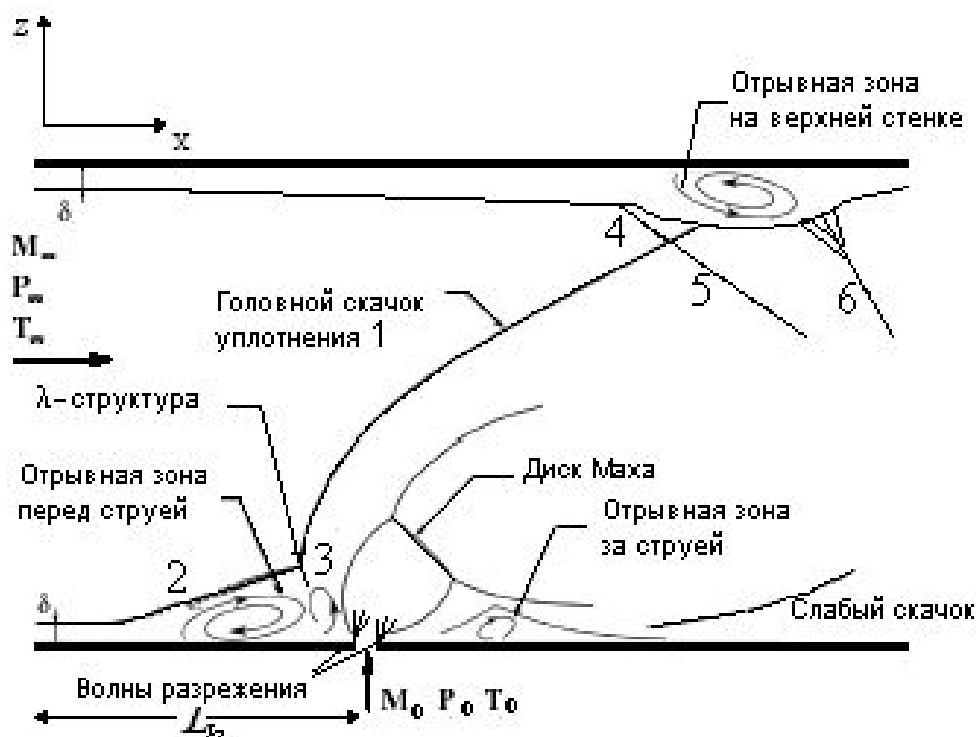


Рисунок 3.1 – Схема течения

### 3.2 Постановка начальных и граничных условий:

на входе задаются параметры потока

$$W=W_{k\infty}, p=p_{\infty}, T=T_{\infty}, u=M_{\infty}\sqrt{\frac{\gamma_{\infty}R_0T_{\infty}}{W_{\infty}}}, w=0, Y=Y_{k\infty}, x=0, 0\leq z\leq H;$$

во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой продольная составляющая скорости  $u$  аппроксимируются степенным законом;

на нижней стенке

$$u=w=0, \frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial Y_k}{\partial z}=0, z=0, 0\leq x\leq L;$$

в струе:

$$W=W_{k0}, p=np_{\infty}, T=T_0, w=M_0\sqrt{\frac{\gamma_0R_0T_0}{W_0}}, u=0, Y=Y_{k0}, z=0,$$

$$L_b\leq x\leq L_b+h;$$

НА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ УСЛОВИЕ СИММЕТРИИ:

$$w=0, \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial Y_k}{\partial z}=0, \rho_N=\rho_{N-1}, z=H, 0\leq x\leq L;$$

на выходе задаются условия неотражения, описанные в главе 2:

для сверхзвуковой области течения

$$\vec{U}_{N_j}^{n+1}=\vec{U}_{N_j}^n-\Delta t\left\{\frac{3\vec{E}_{N_j}^n-4\vec{E}_{N-1j}^n+\vec{E}_{N-2j}^n}{2\Delta x}+\frac{\vec{F}_{N_j+1}^n-\vec{F}_{N_j-1}^n}{2\Delta z}-\frac{\partial\vec{F}_v^n}{\partial z}\Bigg|_{N_j}\right\}$$

для дозвуковой

$$\vec{U}_{N_j}^{n+1}=\vec{U}_{N_j}^n-\Delta t\left\{SUB\Big|_{N_j}^n+\frac{\vec{F}_{N_j+1}^n-\vec{F}_{N_j-1}^n}{2\Delta z}-\frac{\partial\vec{E}_v^n}{\partial x}\Big|_{N_j}-\frac{\partial\vec{F}_v^n}{\partial z}\Big|_{N_j}\right\}$$

где вектор  $SUB$  определяется согласно подразделу 2.5.



### 3.3 Построение полуэмпирической формулы определения удельных теплоемкостей от значений температур в диапазоне $70K \leq T \leq 300K$

Предварительно для апробации построенной методики решения исходных уравнений решается тестовая задача, где рассматривается поперечный вдув звуковой струи гелия с температурой  $T_0=217K$  и давлением  $P_0=1.24MPa$  через щель на нижней стенке шириной  $0.0559m$ . в набегающий поток воздуха с параметрами  $M_\infty=2.9, P_\infty=0.0663MPa, T_\infty=108K$ . При этом с целью сравнения с экспериментом используется опыт из работы [125]. Таким образом, здесь необходимо использование данных температуры ниже 300 К. Как было указано в главе 2 удельные теплоемкости при постоянном давлении  $k$ -ой компоненты  $C_{pk}$  вычисляются при помощи полиномиальной интерполяции четвертого порядка по температуре:

$$C_{pk} = \sum_{i=1}^5 a_{ki} T^{i-1} \quad (3.1)$$

где  $\{a_{ki}\}$  – эмпирические константы, были определены для температуры в пределах  $300K < T < 500K$ . Для определения эмпирических констант для  $70K \leq T \leq 300K$  здесь используются экспериментальные данные работы [126, таблица 3.1], в которой приведены зависимости  $C_{pk}$  от низких значений температуры.

Таблица 3.1- Термо-химическая таблица  $C_{pk}$  (Дж/(Мол.К))

T, °K	$C_{p1}$ (O <sub>2</sub> )	$C_{p2}$ (N <sub>2</sub> )	$C_{p2}$ (He)
100	-----	30.04253461	20.9336046
120	29.66933952	----	20.9336046

140	-----	29.38966128	20.9336046
150	29.40808320	----	20.9336046
170	29.33305574	----	20.9336046
180	-----	29.25719093	20.9336046
210	29.27142605	----	20.9336046
220	-----	29.20326494	20.9336046
250	29.29822157	----	20.9336046
260	----	29.17747260	20.9336046
300	29.45497536	29.17161274	20.9336046

Построение полинома (3.1) для  $70\text{K} \leq T \leq 300\text{K}$  осуществляется с помощью метода наименьших квадратов, для этого составляется система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных эмпирических констант  $\{a_{ki}\}$ , решение которых производится методом LU-разложения. Найденные таким образом значения  $\{a_{ki}\}$  приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2- Значения эмпирических констант  $a_{ki}$

$T < 300$	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	He
$a_{k1}$	0.34843577E+02	0.39755287E+02	0.209336046E+02
$a_{k2}$	0.90674514E-01	0.20027529E+00	0.000000000E+00
$a_{k3}$	0.56072001E-03	0.14293081E-02	0.000000000E+00
$a_{k4}$	0.15761941E-05	0.45017727E-05	0.000000000E+00
$a_{k5}$	0.17168133E-08	0.52356848E-08	0.000000000E+00

На рисунках 3.2 и 3.3 показаны вычисленные и экспериментальные данные  $C_{pk}$  для кислорода ( $O_2$ ), азота ( $N_2$ ) и гелия ( $He$ ) соответственно. Из рисунков видно, что построенный полином с достаточной степенью точности описывает экспериментальные данные.

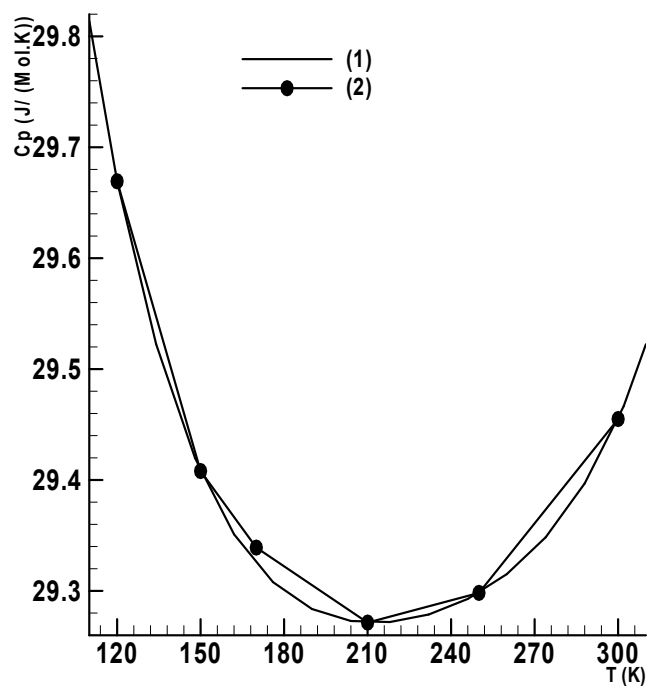


Рисунок 3.2 – Вычисленные и экспериментальные значения удельных теплоемкостей  $C_{p2}$  для  $O_2$ .

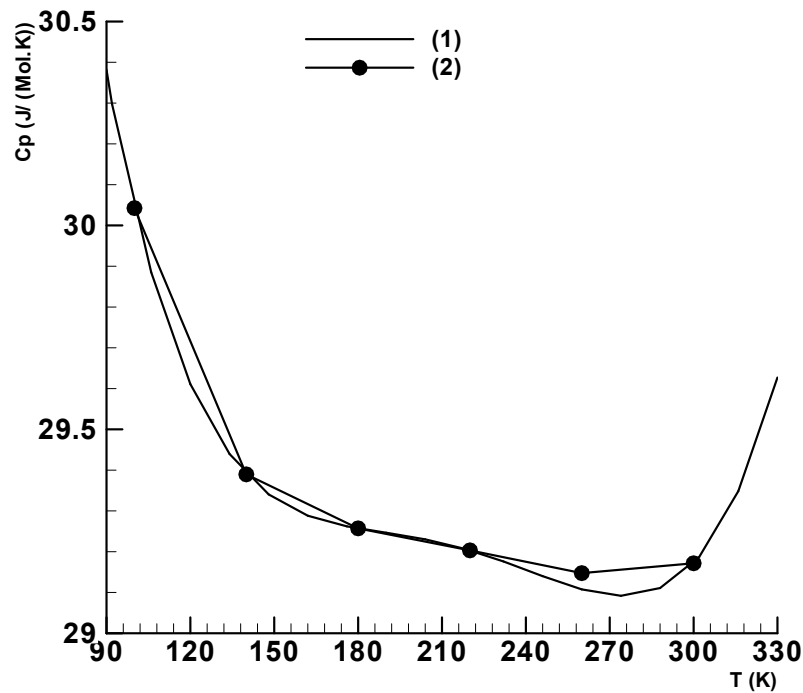


Рисунок 3.3 – Вычисленные и экспериментальные значения удельных теплоемкостей  $C_{p3}$  для  $N_2$ .

### 3.4 Тестовая задача

Высота и ширина канала для рассматриваемой задачи были равны  $H=7.62\text{cm}$  и  $L=25\text{cm}$ , соответственно. Для оценки точности разностной схемы и ее эффективности были проведены расчеты распределения давления на стенке перед щелью и за ней на последовательности сеток с числом узлов от  $301 \times 221$  до  $421 \times 281$ . Сгущение сетки вблизи стенки осуществляется таким образом, что для первого от стенки узла сетки выполняется условие  $z^+ = 1.5$ , для пристенного слоя приходится 5-8 узловых точек по направлению оси  $z$ , а расчет всего пограничного слоя выполняется с использованием 35-40 узлов расчетной сетки.

На рисунке 3.4 показаны распределения давления на стенке, рассчитанные с различными узлами, где кривые: 1) — — —  $421 \times 281$ ; 2) —  $401 \times 281$ ; 3) - - -  $381 \times 281$ ; 4) ...  $301 \times 281$ ; 5) - · - ·  $301 \times 221$ ; ●●● - эксперимент из работы [1]. Увеличение числа узлов расчетной сетки приводит к тому, что

эксперименты и кривые расчетов, начиная с числа узлов  $381 \times 281$  и выше, практически совпадают, причем из рисунка видно хорошее согласие численных и экспериментальных данных. Таким образом, можно говорить о достаточной точности схемы для сеток с числом узлов  $381 \times 281$  и выше, что позволяет проводить расчет данной задачи с этими узлами сетки.

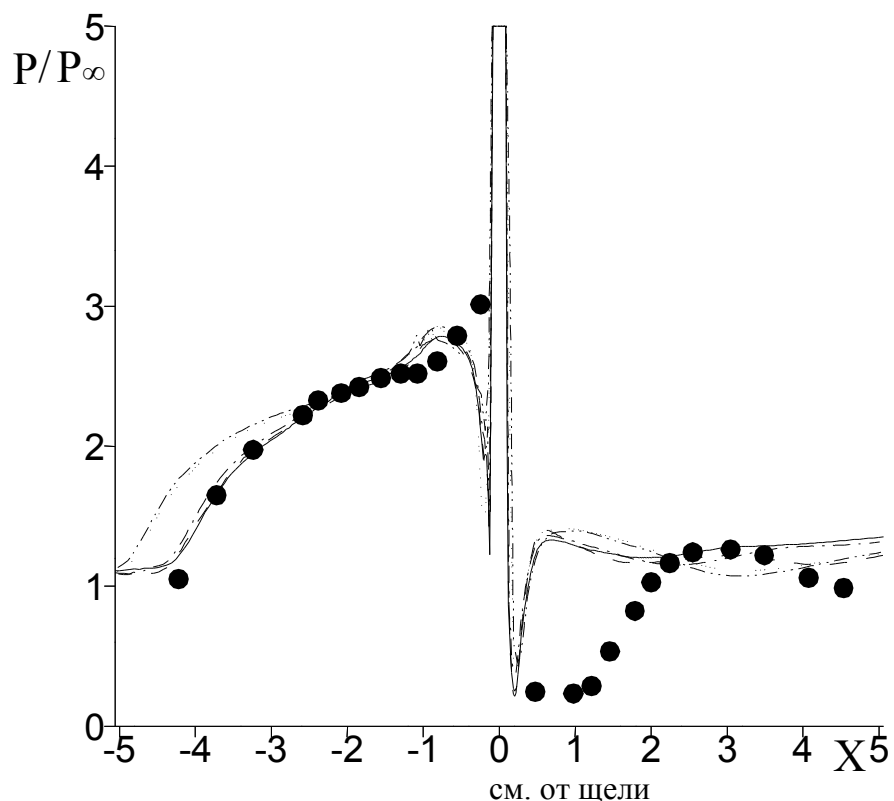


Рисунок 3.4 - Распределение давления на стенке 1) --- сетка  $421 \times 281$ ; 2) —  $401 \times 281$ ; 3) -·-  $381 \times 281$ ; 4) - - -  $301 \times 281$ ; 5) ···  $301 \times 221$ ; 6) "●●●" - эксперимент из работы [125].

$$M_\infty=2.9, P_\infty=0.0663 \text{MPa}, T_\infty=108 \text{K}, T_0=217 \text{K}, P_0=1.24 \text{MPa}$$

### 3.4 Численный анализ решения задачи взаимодействия плоского сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй в зависимости от режимных параметров.

Характерные параметры варьировались в диапазоне  $2 \leq M_\infty \leq 6$ ,  $2 \leq n \leq 15$ ,  $Re = 10^6 - 10^7$ ,  $Pr=0,7$ . Для апробации численного метода был выполнен следующий эксперимент: через щель на стенке шириной 0.1 см. перпендикулярно основному потоку воздуха (кислород и азот) с параметрами  $M_\infty = 3.75$ ,  $P_\infty = 11090 \text{ Pa}$ ,  $T_\infty = 629.43 \text{ K}$ ,  $Pr=0.7$ ,  $Re = 62.73 \times 10^6$ , вдувалась звуковая струя водорода с  $T_0 = 800 \text{ K}$  и параметром нерасчетности  $n=10.29$ . Высота и ширина канала  $H=15.2 \text{ cm}$  и  $L=45 \text{ cm}$ , соответственно. Щель располагалась на расстоянии  $L_b=33 \text{ cm}$  от начала обтекаемой пластины. При численном расчете во входном сечении задается толщина пограничного слоя  $\delta_1 = 0.1$ , вычисленная для  $x=12$ . Тогда высота пристенного слоя соответствует ламинарно- турбулентному подслою  $z^+ = 70$ , где  $z^+ = \delta_2 u_\tau / \nu$ , а высота пограничного слоя составляет  $z^+ = 3700$ , где  $z^+ = \delta_1 u_\tau / \nu$ , здесь  $u_\tau = \left( \frac{1}{2} C_f \right)^{1/2}$  – динамическая скорость,  $C_f$  – коэффициент трения потока на стенке.

#### Исследование сходимости по сетке

В таблице 3.3 представлена чувствительность сходимости решений к характеристикам сетки путем оценки суммарных  $L_1^p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|$  и среднеквадратичных  $L_2^p = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|^2}$  отклонений норм невязок плотности. Здесь  $\varepsilon_M^n = \max_{(i,j) \in M} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$ ,  $\varepsilon_{\hat{M}}^n = \max_{(i,j) \in \hat{M}} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$ ;  $N$  – число итераций. Оценки были построены для WENO и ENO схем путем последовательного измельчения сеток, при этом в качестве начальной

принималась сетка  $M$  с  $I \times J$  узлами, затем осуществлялась вариация  $M$  и  $L$  узлов сетки  $\hat{M}$ . Как следует из таблицы, разность отклонения величин норм невязок плотности уменьшается с измельчением сетки. В соответствии с этим, сетка  $\hat{M}$  с узлами  $301 \times 281$  имеет минимальные значения, при этом показатель  $L^p$  для WENO-схемы меньше, чем аналогичный показатель для ENO-схемы.

Динамика сходимости численного решения иллюстрируется на рисунке 3.5, данные результаты были получены для сетки с узлами  $301 \times 281$  для WENO и ENO схем соответственно (кривая 1 и кривая 2). В обоих случаях скорость сходимости решения оказывается довольно высокой. Однако для WENO-схемы кривая сходимости лежит ниже кривой для ENO-схем и не обладает сильными флуктуациями, присущими кривой 2.

Таблица 3.3 - Зависимость суммарного и среднеквадратичного отклонений (разностей плотности) от числа узлов для WENO и ENO схемы

Число узлов		WE	EN	WE	EN
$M =$	$\hat{M} = M \times L$	NO	O	NO	O
		$L_1^p$	$L_1^p$	$L_2^p$	$L_2^p$
$I = 301,$	$M = I, L = 221$	$6,09 \cdot 10^{-2}$	$8,02 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
$J = 261$	$M = I, L = 281$	$3,37 \cdot 10^{-2}$	$3,49 \cdot 10^{-2}$	$6,27 \cdot 10^{-4}$	$7,22 \cdot 10^{-4}$
$I = 321,$	$M = 301, L = J$	$2,74 \cdot 10^{-2}$	$3,87 \cdot 10^{-2}$	$5,29 \cdot 10^{-4}$	$8,03 \cdot 10^{-4}$
$J = 281$	$M = 341, L = J$	$2,91 \cdot 10^{-2}$	$3,43 \cdot 10^{-2}$	$6,11 \cdot 10^{-4}$	$7,86 \cdot 10^{-4}$

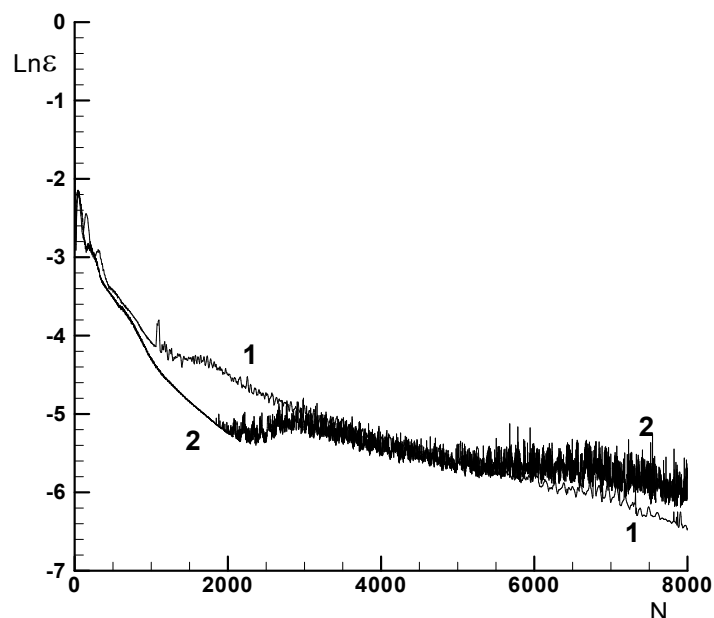


Рисунок 3.5 -Динамика сходимости численного решения

Кривая 1- WENO схема, кривая 2- ENO схема

#### а) Исследование влияния параметра нерасчетности.

Далее был выполнен численный эксперимент по изучению взаимодействия головного скачка уплотнения, возникающего перед струей, с пограничным слоем на верхней стенке. Через щель на стенке, шириной 0.2см, вдувается звуковая струя водорода с  $T_0 = 800\text{ K}$ , а параметр нерасчетности варьируется в пределах  $5 \leq n \leq 15$ .

Параметры набегающего потока следующие:  
 $M_\infty = 3.75, T_\infty = 629.43\text{ K}, Re = 10^6, Pr = 0.7$ , высота и ширина канала  $H = 4\text{ см}$   
и  $L = 1\text{ см}$  соответственно. Щель располагается на нижней стенке на



расстоянии  $L_b=5\text{cm}$  от начала расчетной области. Толщина пограничного слоя во входном сечении составляет  $\delta=0.38\text{cm}$ . Было исследовано влияние параметра нерасчетности на структуру взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем на верхней стенке. Как известно, структура потока в области взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем существенно зависит от интенсивности скачка и угла его падения [49]. В свою очередь интенсивность и угол падения скачка зависит от параметров струи и потока. Чем больше интенсивность скачка уплотнения, тем поток у стенки испытывает большее торможение, приводящее к его отрыву. Возникающая отрывная зона, как правило, является причиной отклонения внешнего потока, которое может вызывать образование характерной системы скачков уплотнения [49]. Из распределения изобар, представленных на рисунке 3.6 а)  $n=5$ , б)  $n=10$  и в)  $n=15$  видно образование системы скачков уплотнения при взаимодействии ударной волны с верхним пограничным слоем. Из-за торможения набегающего потока перед вдуваемой струей возникает головной скачок уплотнения (1), от которого вверх по потоку отходит косой скачок (2). За косым скачком существуют участки сверхзвуковых зон, торможение которых сопровождается появлением замыкающего скачка (3). Видно, что отошедший головной (1), косой (2) и замыкающий (3) скачки уплотнения пересекаются и образуют  $\lambda$ -образную систему. Головной скачок уплотнения (1) достигает верхней границы канала и создает положительный градиент давления, достаточный для отрыва пограничного слоя на верхней стенке канала (см. рисунок 3.7 а)  $n=5$ , б)  $n=10$  и в)  $n=15$  распределения поля вектора скорости). Косой скачок уплотнения (4), отделяющий зону отрыва пограничного слоя от сверхзвукового набегающего потока, образуется выше по течению от головной ударной волны. Распространение ударной волны (4) во внешний поток сопровождается возникновением отраженного скачка уплотнения (5). Далее ниже по течению, в результате присоединения

оторвавшегося потока к обтекаемой стенке, где течение опять становится безотрывным, формируется скачок уплотнения (б), возникающий в области смешения оторвавшегося пограничного слоя с внешним потоком. Из рисунка видно, что головной скачок(1), косой(4) и отраженный(5) скачки уплотнения пересекаясь в одной точке образуют сложную  $\lambda$  образную систему скачков уплотнения, которая аналогична  $\lambda$  структуре, сформированной перед струей на нижней стенке канала [14]. Из распределения изобар следует, что с возрастанием параметра нерасчетности увеличивается объем вдуваемого водорода, что в свою очередь приводит к увеличению размеров препятствия основному потоку, что способствует увеличению интенсивности головного скачка уплотнения(рисунки 3.6 а-в). Графики показывают, что интенсивность головного скачка уплотнения и соответственно угол наклона существенно возрастают с увеличением параметра нерасчетности, что также можно наблюдать из сравнения рисунков 3.6 а-в. При этом качественная картина ударных волн во всех трех случаях схожа. Результаты численных экспериментов для поля вектора скорости (рисунок 3.7 а-в) представляют картину вихревой структуры, возникающей при взаимодействии головного скачка уплотнения как с нижним пограничным слоем, так и с верхним.

Зоны возвратных течений во всех трех случаях аналогичны, однако интенсивность, размеры и область взаимодействия существенно увеличиваются с ростом параметра нерасчетности. Данный факт подтверждается результатами, которые можно наблюдать из рисунков 3.8-3.10 распределения местного числа Маха (3.8- $n=5$ , 3.9- $n=10$  и 3.10- $n=15$ , для всех случаев а) – ширен картина, б) – изолинии, в) – изолинии области вдува струи, г) – изолинии в области взаимодействия головного скачка с пограничным слоем на верхней стенке ). Из графиков наблюдается



Рисунок 3.6 -Распределение изобар и поля вектора скорости.

Распределение изобар а)  $n=5$ , б)  $n=10$ , в)  $n=15$

$$T_0=800\text{ K}, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43\text{ K}, Re=10^6, Pr=0.7$$

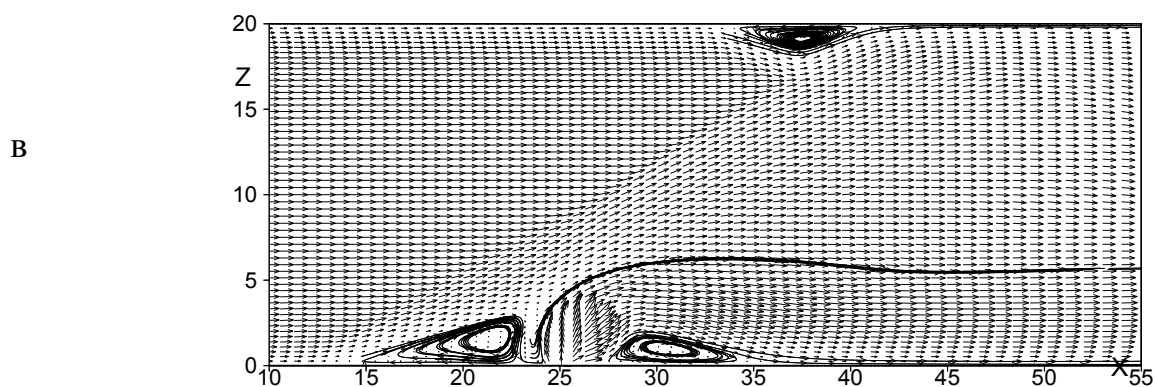
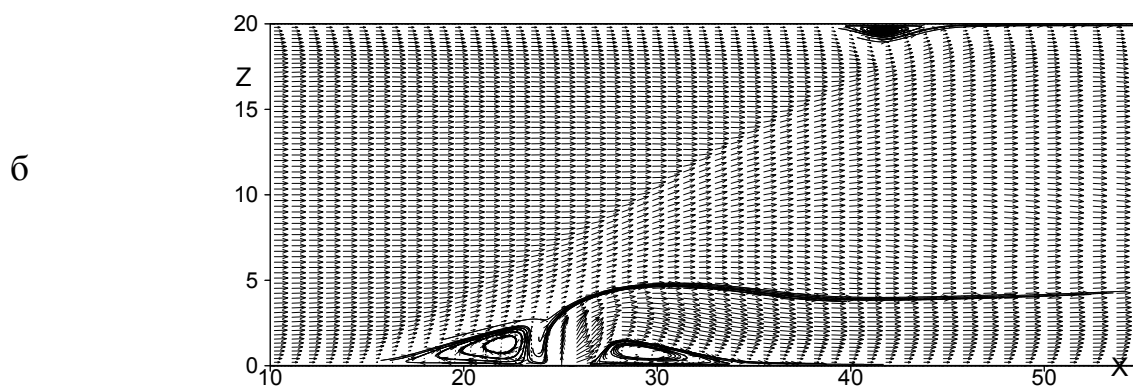
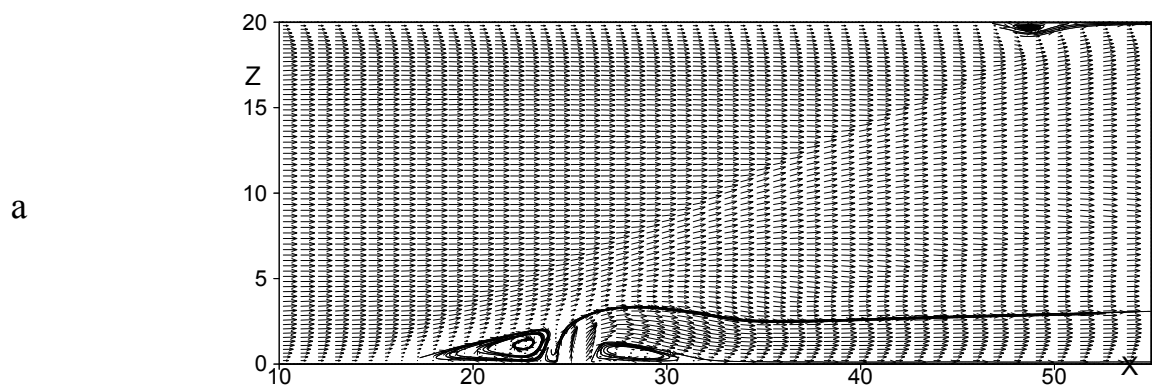


Рисунок 3.7-Распределение изобар и поля вектора скорости.

Поле вектора скорости а)  $n=5$ , б)  $n=10$ , в)  $n=15$

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

Например, в случае  $n=5$  дозвуковая область на верхней стенке достигает глубины 0,058 см (рис. 3.8г) от стенки канала, в то время как для значений соотношения давления  $n=10$  и  $n=15$  глубина составила 0,08 и 0,178 см соответственно (рис. 3.9г, 3.10г), жирные линии на рисунках показывают значения числа Маха равные 1 и отделяют дозвуковую и сверхзвуковую зоны. В области вдува струи из приведенных результатов (рис.3.8в, 3.9в, 3.10в) видно, что натекающий поток проскальзывает над струей и увлекает за собой дозвуковую зону, поэтому высота зоны с Махами меньше единицы (области ниже жирной линии) перед струей увеличивается с ростом нерасчетности (сравнение рисунков 3.8в, 3.9в, 3.10в), так как дальнобойность струи растет. Глубину проникновения вдуваемой струи можно проанализировать из рисунков 3.11а)  $n=5$ , б)  $n=10$  и в)  $n=15$ , где приведены распределения массовой концентрации водорода.

Контурсы постоянной концентрации водорода показывают, что максимальное значение концентрации достигается за препятствием и результаты свидетельствуют, что увеличение нерасчетности влияет на дальнобойность вдуваемой струи. Так при  $n=5$  линия 1% -ной концентрации водорода поднялась на высоту 0,96 см. от стенки канала

(рисунок 3.11а). Увеличение нерасчетности в три раза приводит к тому, что (рисунок 3.11в), 1% -ная концентрация водорода располагается на высоте 1,98см

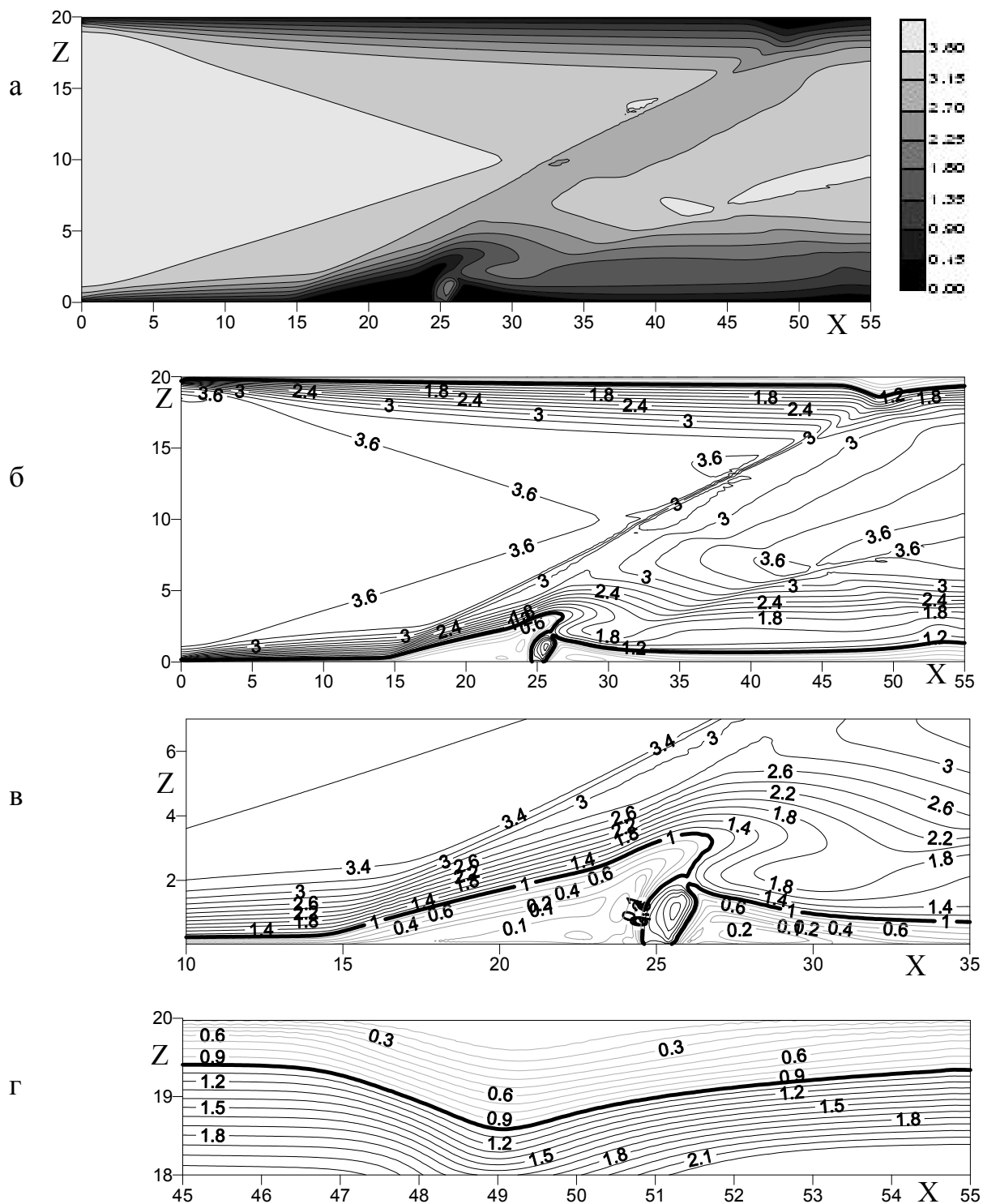


Рисунок 3.8 - Распределение местного числа Маха  $n=5$ ,

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

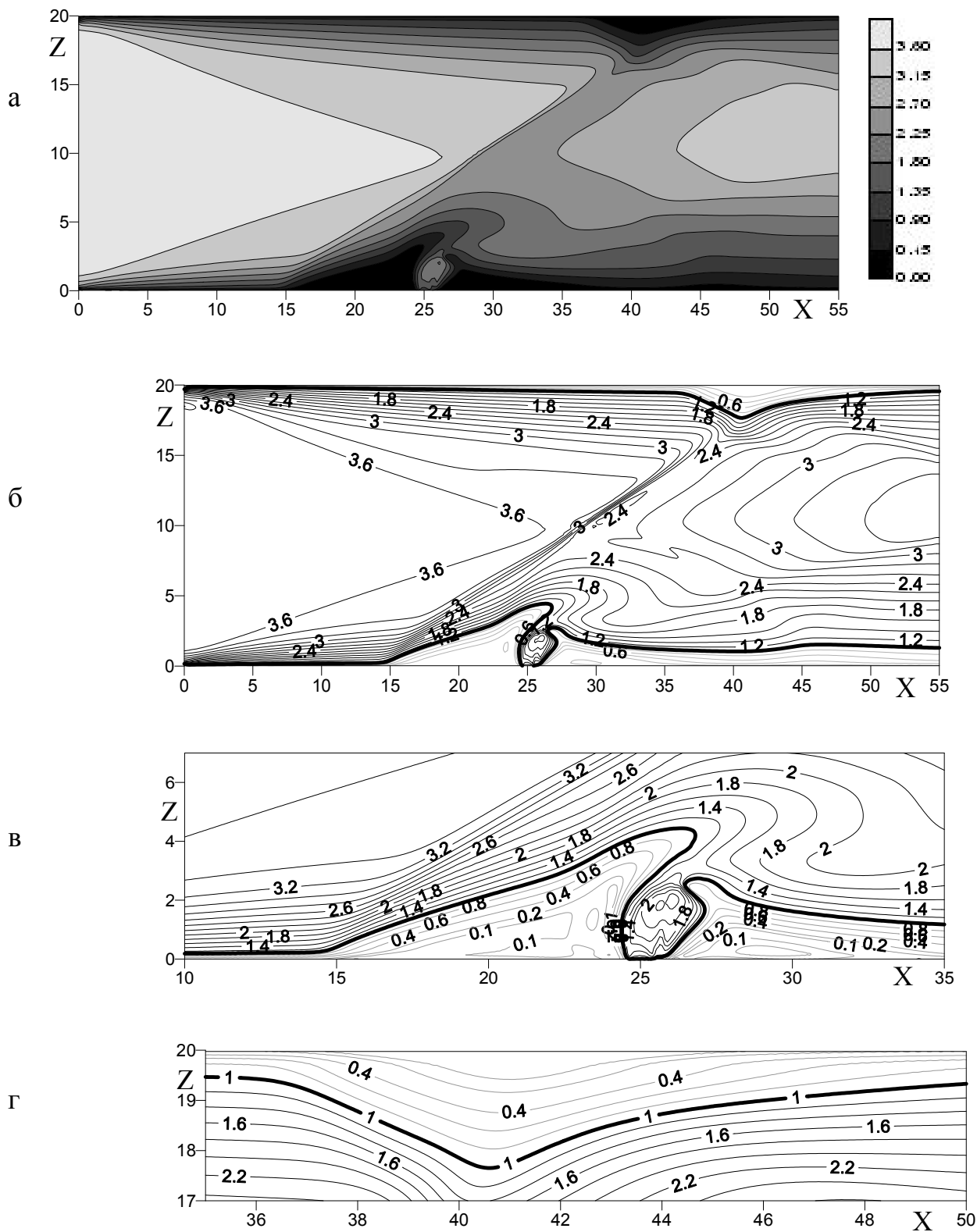
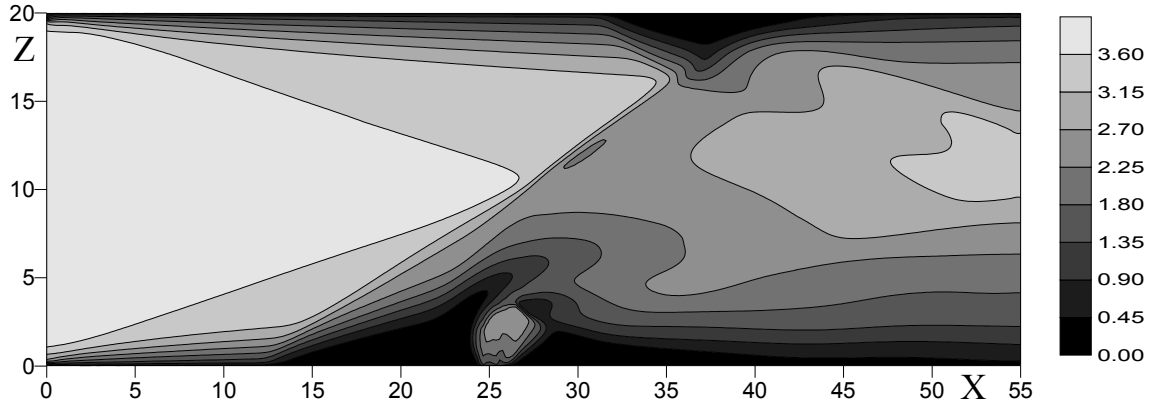


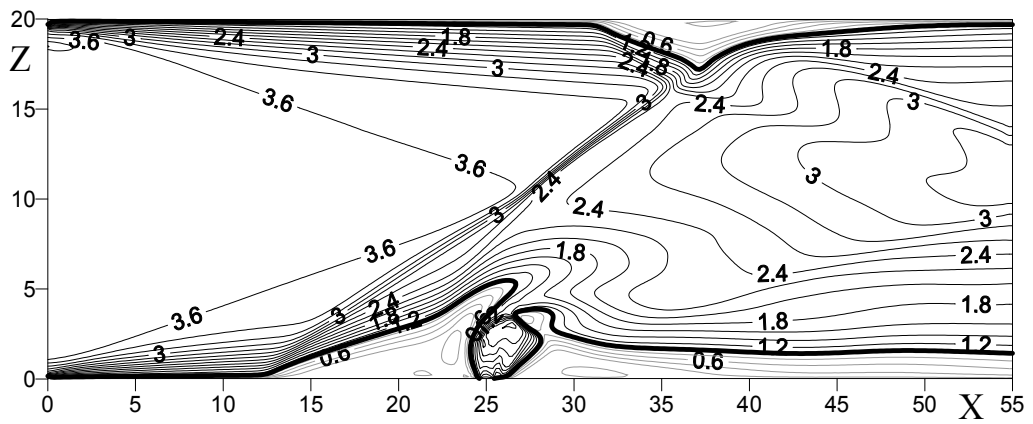
Рисунок 3.9 - Распределение местного числа Маха  $n=10$ ,

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

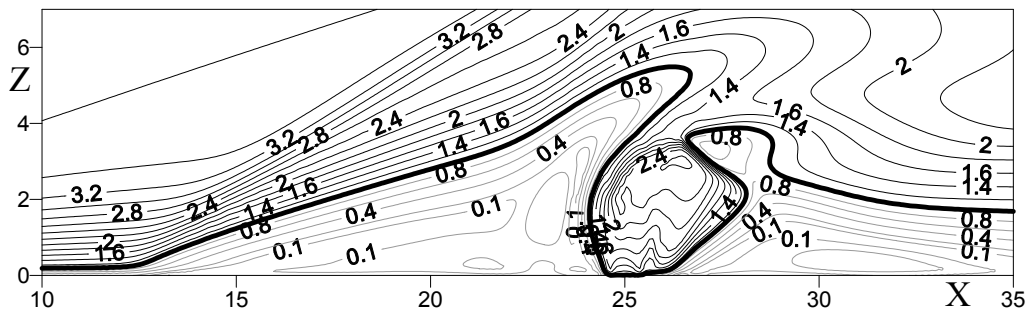
a



б



в



г

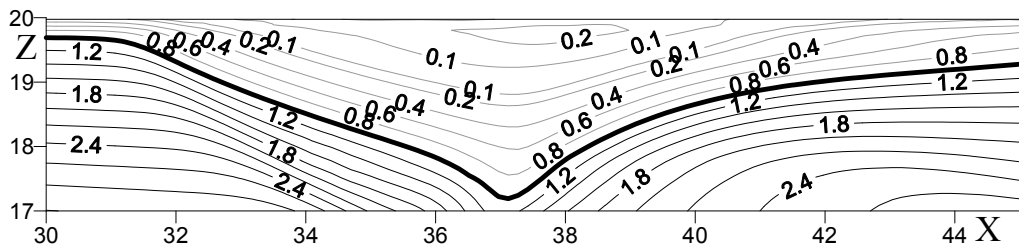




Рисунок 3.10 - Распределение местного числа Маха  $n=15$

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

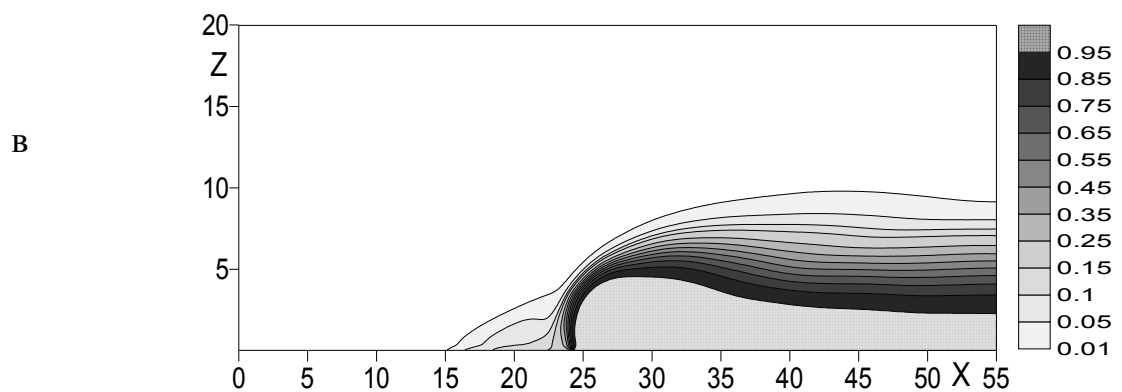
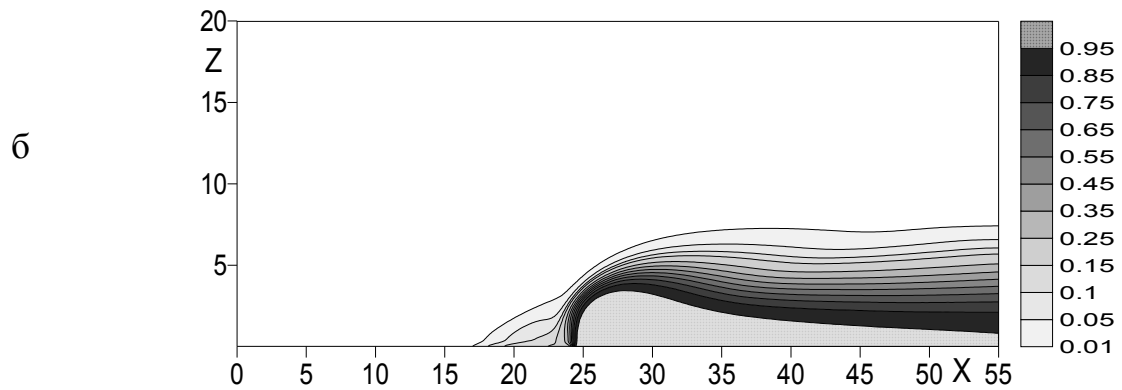
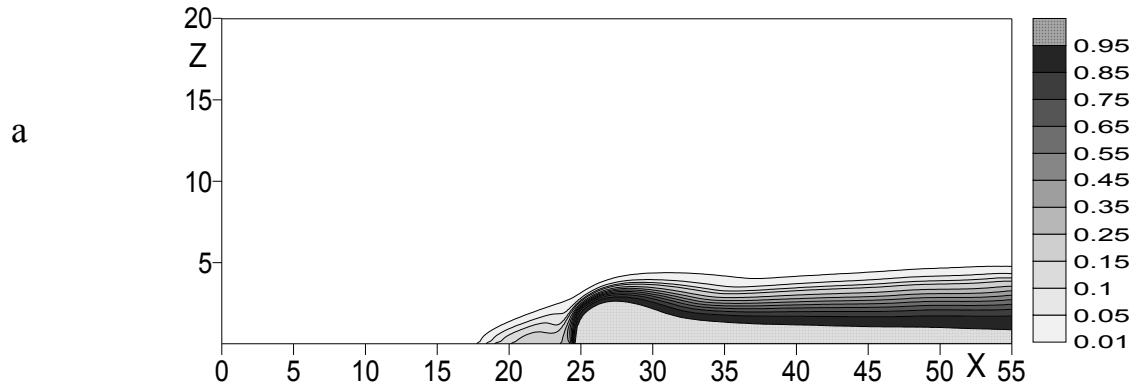


Рисунок 3.11 - Распределение массовой концентрации а)  $n=5$ , б)  $n=10$ ,

в)  $n=15$

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

В работе предлагается аналитическая формула определения глубины проникновения вдуваемой струи, которая аналогична формуле, представленной в работе [133]. Согласно [133] формула имеет вид

$$h / d = F(M_0, M_\infty) (P_0 / P_\infty)^{1/2} \quad (3.2)$$

здесь  $h$  – высота проникновения струи в набегающий поток;  $d$  – ширина щели;  $F(M_0, M_\infty)$  функция, зависящая от числа Маха струи и числа Маха сверхзвукового потока;  $P_0$  – статическое давление в струе,  $P_\infty$  – статическое давление в потоке. На рисунке 3.12 приведена зависимость глубины проникновения струи водорода от параметра нерасчетности, здесь «—» – результаты по формуле (3.2), «•••» – численные расчеты. В соответствии с полученными численными результатами дальнобойности вдува водородной струи, функция  $F(M_0, M_\infty)$  определяется следующим образом:

$$F(M_0, M_\infty) = A \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{\gamma / \gamma - 1}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{\gamma / \gamma - 1}}}$$

где  $A = 1.37$  – добавочный коэффициент  $\gamma = 1.4$ . Как видно из графика результаты, полученные по предложенной формуле, с достаточной точностью определяют глубину проникновения вдуваемой поперечной струи в набегающий поток.

Из численных экспериментов влияния параметра нерасчетности на головной скачок уплотнения следует, что угол наклона головного скачка уплотнения возрастает с увеличением отношения давления за скачком и перед ним.

Зависимость угла наклона головного скачка уплотнения от параметра нерасчетности приведена на рисунке 3.13, где ось абсцисс соответствует параметру нерасчетности, ось ординат - углу наклона головного скачка, вычисленного по формуле :  $\alpha = \arctg(\max \frac{w}{u})$ . Как видно из графика, угол наклона при малых значениях параметра нерасчетности ( $0 < n < 12$ ) резко возрастает, а затем изменяется линейно.

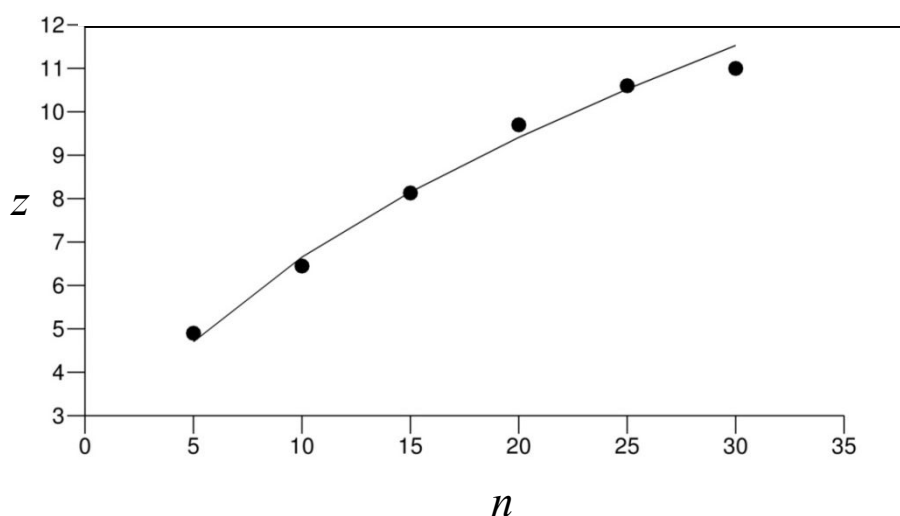


Рисунок 3.12 . Зависимость глубины проникновения струи от параметра нерасчетности «—» – результаты по формуле (3.2), «•••» – численные расчеты.

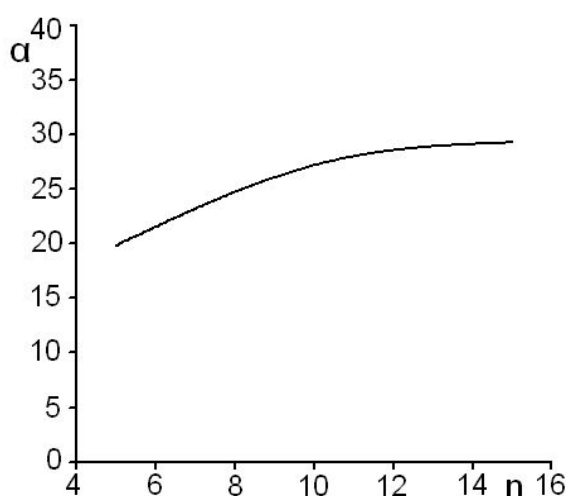


Рисунок 3.13 - Влияние параметра нерасчетности на угол

наклона головного скачка  $\alpha = \arctg(\max \frac{w}{u})$ .

## б) Исследование влияния ширины струи

Ниже, на рисунках 3.14-3.22, приведены результаты расчетов задачи плоского сверхзвукового течения воздуха с поперечным вдувом звуковой струи водорода через щель на нижней стенке. В поставленной задаче варьируются размеры щели вдуваемой струи, т.е. рассматриваются три случая физической ширины щели ( $h_1, h_2, h_3$ ). Безразмерные параметры вычислительной области будут следующими: длина канала  $L = 6.25$ , высота  $H = 1$ . В первом случае размер ширины канала  $h_1 = 0.05$ , во втором случае  $h_2 = 0.066$  и в третьем случае  $h_3 = 0.083$ . Параметры набегающего потока следующие:  $M_\infty = 3.75$ ,  $T_\infty = 629.43K$ ,  $Re = 10^6$ ,  $Pr = 0.7$ ; у струи  $T_0 = 800K$ , параметр нерасчетности  $n = 15$ . Численные эксперименты по изучению взаимодействия скачков уплотнения с пограничными слоями для различных ширин щелей представлены на рисунке 3.14-3.16 – шпирен картины изобар (3.14–  $h_1$ , 3.15–  $h_2$ , 3.16–  $h_3$ ). Из графиков 3.14а, 3.15а и 3.16 а видно, что в результате взаимодействия как струи с набегающим потоком, так и головного скачка уплотнения (1) с верхним пограничным слоем на рисунках 3.14а, 3.15а и 3.16а для всех рассматриваемых размеров щели наблюдается образование систем скачков уплотнения, которые соответствуют ранее изученным и схематически представленным на рисунке 3.1. Из-за торможения набегающего потока перед вдуваемой струей возникает головной скачок уплотнения (1), от которого вверх по потоку отходит косой скачок (2). За косым скачком существуют участки сверхзвуковых зон, торможение которых сопровождается появлением замыкающего скачка (3). Видно, что отошедший головной (1), косой (2) и замыкающий (3) скачки уплотнения пересекаются и образуют  $\lambda$ -образную систему. Как следует из

рисунка 3.16б, где более детально показана область вдува струи для  $h_3$ , скачок (3) слабо выражен, тогда как для двух других случаев (рисунки 3.14б, 3.15б) он отчетливо просматривается. Также из графиков наблюдается сокращение длины головного скачка (1). На графиках изобар 3.14б, 3.15б и 3.16б хорошо просматривается диск Маха, размеры которого изменяются неоднозначным образом, хотя общеизвестно, что возрастание размеров щели приводит к расширению бочкообразной структуры в струе и, как следствие, к увеличению диска Маха. Такой рост размеров диска Маха объясняется тем, что в случае  $h_3$  происходит смещение зоны отрыва в сторону входной границы, соответственно расстояние между струей и верхней возвратной областью становится минимальным (конфузор). Вследствие этого набегающий поток существенно ускоряется, тем самым препятствует расширению струи.

Из рисунков 3.14в, 3.15в и 3.16в, где также подробнее представлена область ударно-волновой структуры на верхней стенке следует, что здесь наблюдается хорошо известная в литературе картина взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. Аналогично картине перед струей, головной (1) скачок уплотнения, волна сжатия (4) и отраженный (5) скачок уплотнения, пересекаясь в одной точке, образуют  $\lambda$ -образную систему. Размеры данной  $\lambda$ -образной структуры значительно возрастают с ростом ширины щели, что можно наблюдать из сравнения рисунков 3.14в, 3.15в и 3.16в. Здесь видно, что увеличение ширины струи приводит к тому, что волна сжатия (4), сформировавшись вблизи верхней стенки, существенно сдвигается по направлению к входной границе.

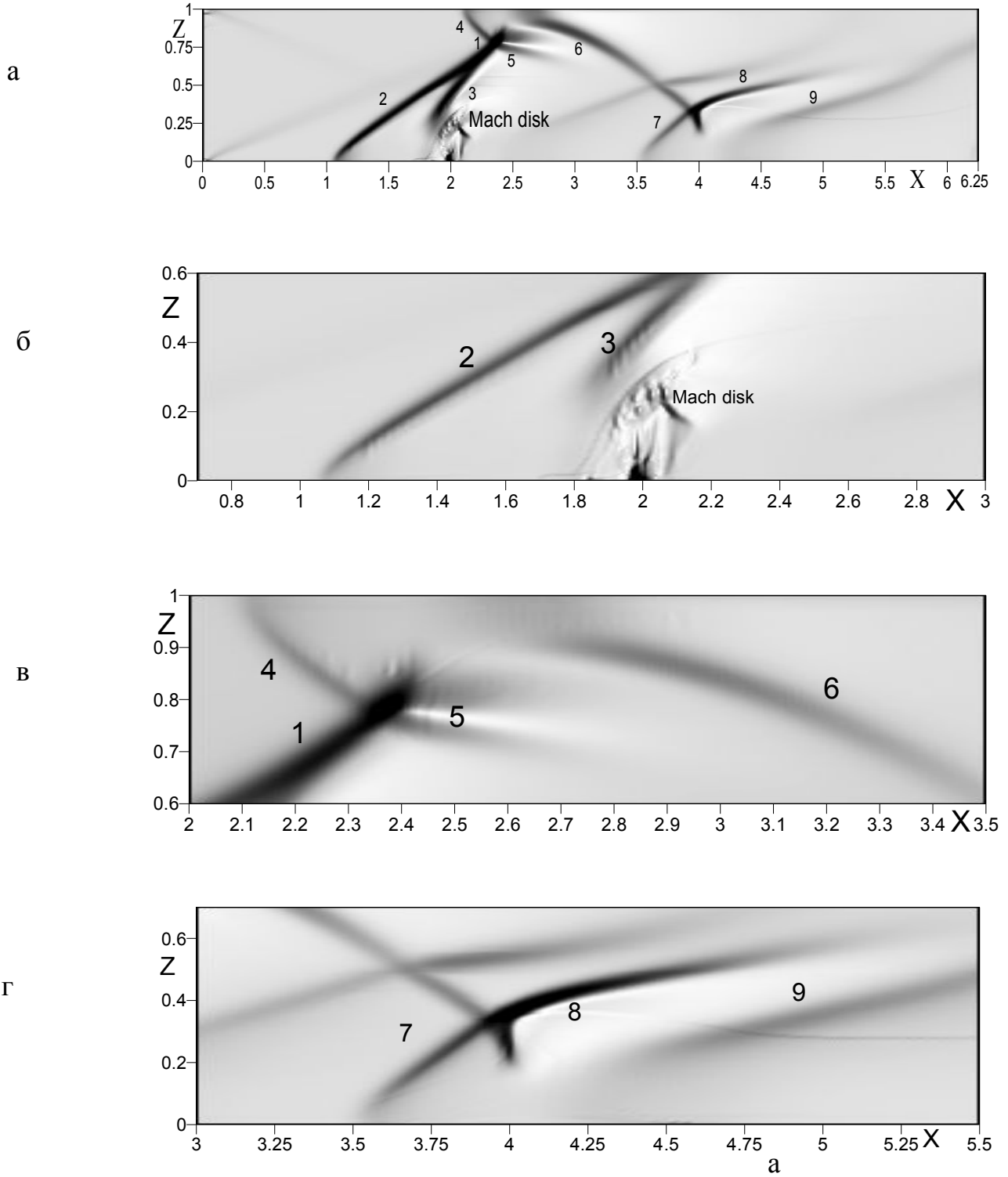


Рисунок 3.14 - Распределение изобар для ширины щели  $h_1$

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

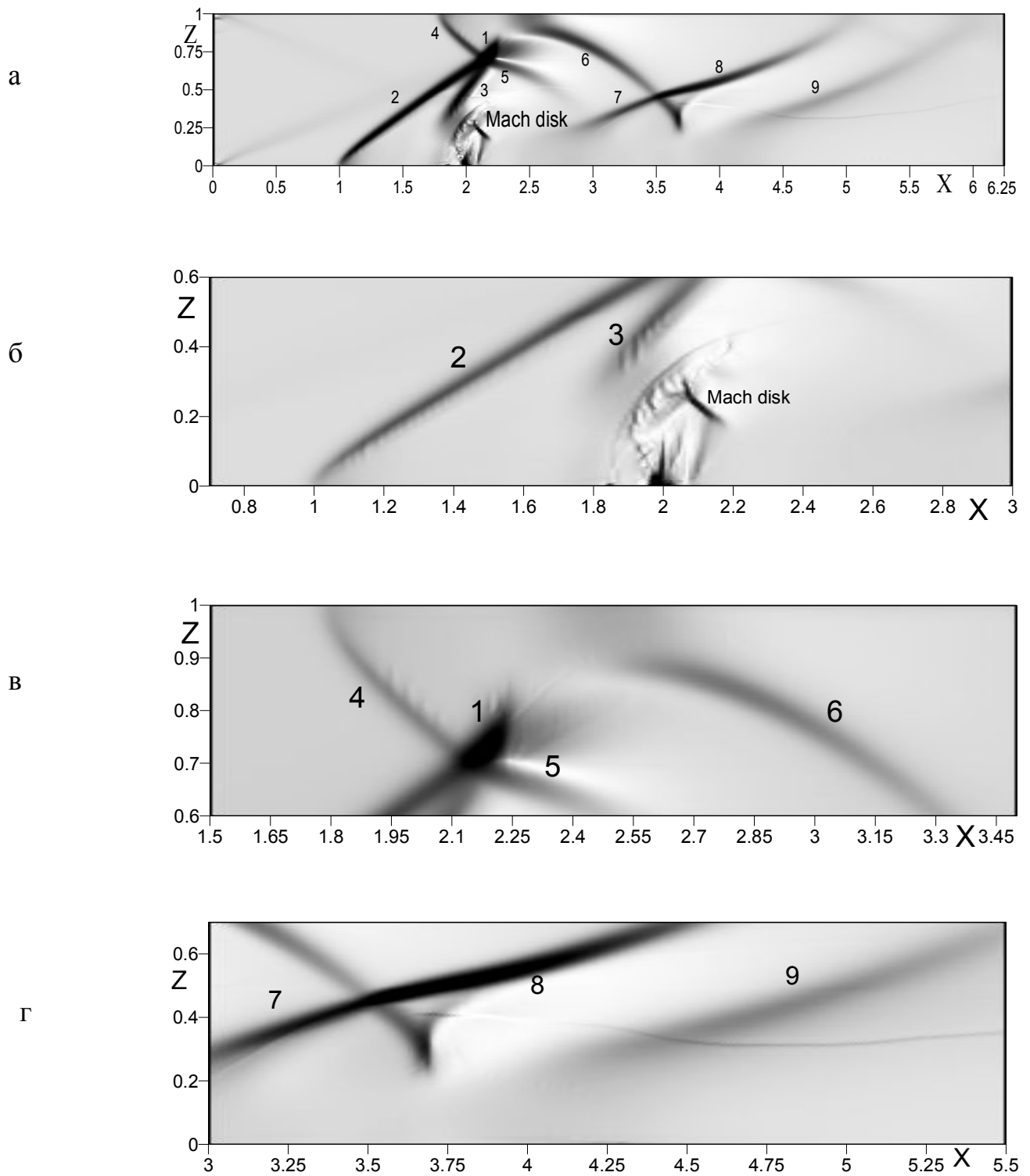


Рисунок 3.15 - Распределение изобар для ширины щели  $h_2$

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

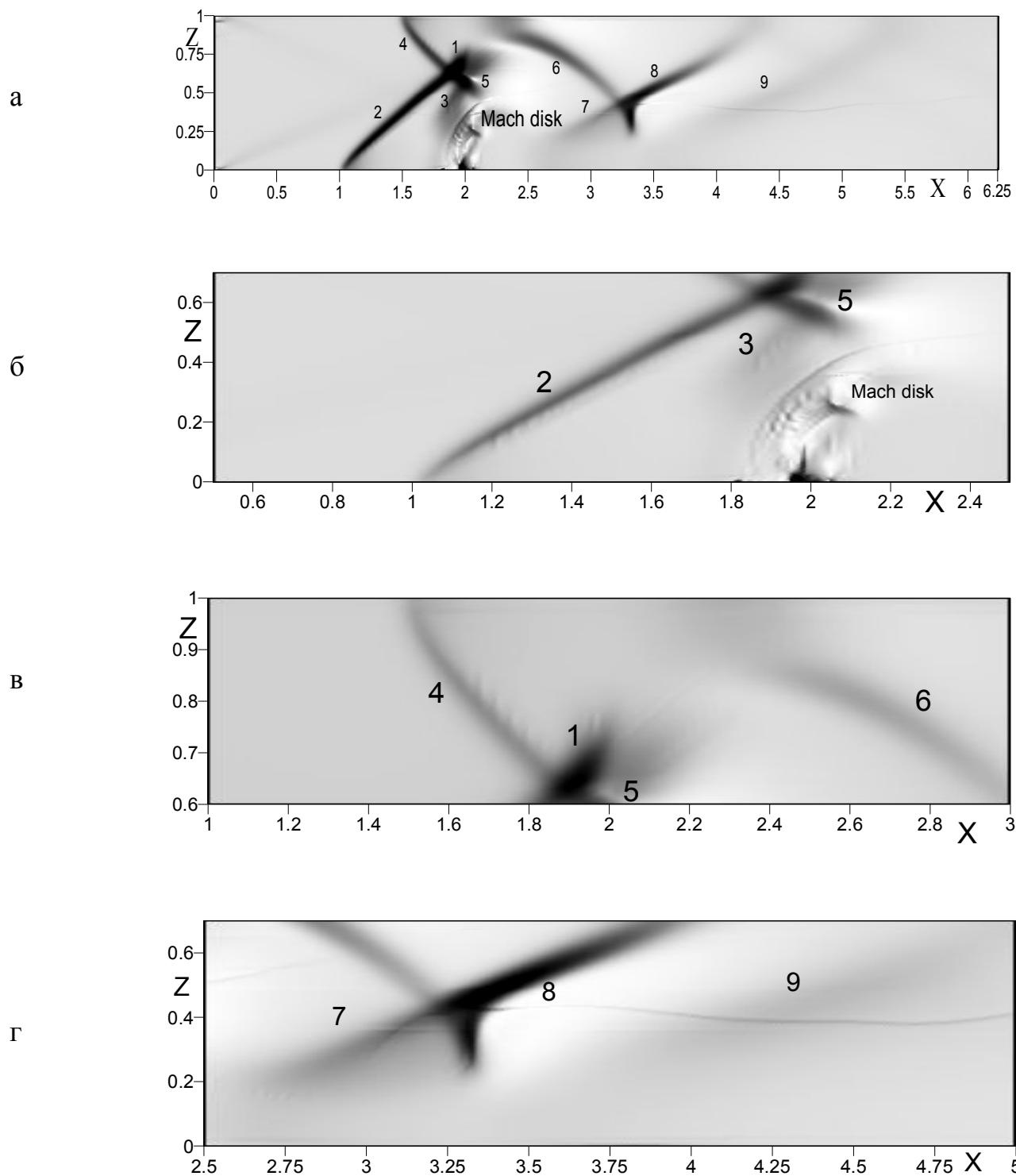


Рисунок 3.16 - Распределение изобар для ширины щели  $h_1$ , б)  $h_2$ ,  
в)  $h_3$

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$



Из рисунков 3.14а, 3.15а и 3.16а следует, что помимо общеизвестных ударно-волновых картин, описанных выше, здесь появляется дополнительная структура, обусловленная взаимодействием отраженного скачка (6) с пограничным слоем на нижней стенке за струей (на графиках 3.14г, 3.15г и 3.16г эта область показана более детально). Видно, что взаимодействие нижнего пограничного слоя и скачка (6) аналогично картине, наблюдаемой на верхней стенке, т.е. создается волна сжатия (7), которая распространяется в виде скачка (8). Также здесь просматривается слабая отраженная волна (9).

Распределение местного числа Маха ( $M = \sqrt{u^2 + w^2} / c$ , здесь  $c$  – местная скорость звука) и линии тока в зоне вдуваемой струи, представлено на рисунке 3.17 (а– $h_1$ , б– $h_2$ , в– $h_3$ ). Из графика следует, что для случая  $h_1$  (рис. ба,г) струя, истекая из щели со звуковой скоростью, ускоряется и на некотором расстоянии становится сверхзвуковой (значение местного числа Маха увеличивается до 2.5). Граница образовавшейся сверхзвуковой области замыкается, очерчивая круг, который и соответствует бочке, отделяющей сверхзвуковую зону от дозвуковой. В верхней части бочки волны сжатия сходятся, образуя диск Маха. За бочкой течение замедляется и становится дозвуковым. Из рисунка 3.17 видно, что оно практически смыкается с дозвуковой областью за струей. Также из сравнения рисунков бг-е заметно, что погружение сверхзвуковой бочки в дозвуковую область увеличивается с ростом размеров щели. Из рисунков 3.17 а и 3.17 б. прослеживается рост размеров бочки с возрастанием ширины щели. Однако, в соответствии с ранее сказанным (распределение давления, рис.3.15б), из изолиний Маха для  $h_3$  (рисунок 3.17 в) можно наблюдать сужение бочки несмотря на то, что размер щели является максимальным. На рисунке 3.18 (а –  $h_1$ , б –  $h_2$ , в –  $h_3$ .) представлено распределение местного числа Маха и линии тока на верхней

стенке в области отрыва, и сравнение результатов для различных размеров щели говорит о росте дозвуковой зоны и области отрыва с увеличением размеров вдуваемой струи. Это является следствием возрастания интенсивности головного скачка уплотнения, которое в свою очередь является определяющим фактором при формировании области отрыва, что было подтверждено и изучено во второй главе. Детальную картину изомах на нижней стенке в области отрыва за струей можно наблюдать на рисунке 3.19 для ширины щели: а)  $h_1$ , б)  $h_2$ , в)  $h_3$ . Высота дозвуковой области для трех размеров щели изменяется аналогично изменению  $h$ , что можно увидеть из высоты пиков темной области, соответствующей зоне с числами Маха меньше единицы, однако размеры по ширине изменяются неоднозначно, как это было с диском Маха в струе. Так для широкой щели, зона отрыва вплотную примыкает к области возвратного течения за струей и является самой наименьшей по ширине из представленных трех случаев, что можно также объяснить наличием некоторого запираания потока.

Результаты численных экспериментов для поля вектора скорости, представленные на рисунке 3.20 (а –  $h_1$ , б –  $h_2$ , в –  $h_3$ ), показывают картину вихревой структуры, возникающую при взаимодействии скачков уплотнения как с нижним пограничным слоем, так и с верхним. Из графика видно, что для всех рассматриваемых случаев в зоне, примыкающей к стенке, перед струей формируются два вихря, образовавшиеся в результате первичного и вторичного отрывов потока от стенки (также на рисунках 3.17а-в). Направления движения в них противоположные вследствие того, что часть потока воздуха непосредственно вблизи стенки, проходя участки косога скачка (2) и замыкающего (3), поворачивает вниз к стенке и проникает в зону отрывного течения, затем растекается в противоположных направлениях. При этом вихри, расположенный ближе к струе, движутся против часовой стрелки, а вихри, отстоящий на большем расстоянии от нее, движутся по часовой стрелке. За струей возникновение вихревой области связано с зоной низких давлений.

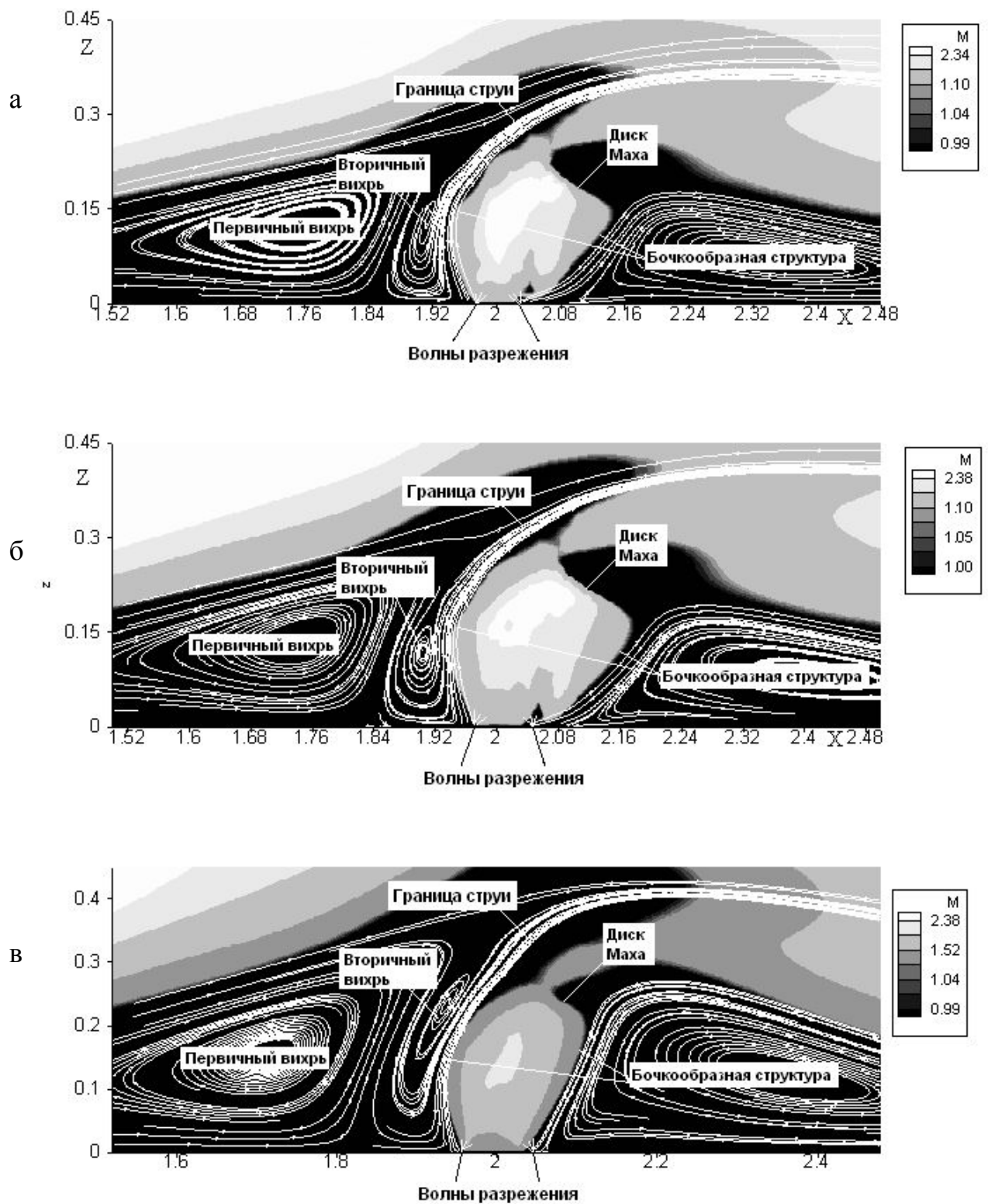


Рисунок 3.17 - Распределение местного числа Маха в области вдува струи для ширины щели: а)  $h_1$ , б)  $h_2$ ,

в)  $h_3$ .  $T_0=800K$ ,  $M_\infty=3.75$ ,  $T_\infty=629.43K$ ,  $Re=10^6$ ,  $Pr=0.7$

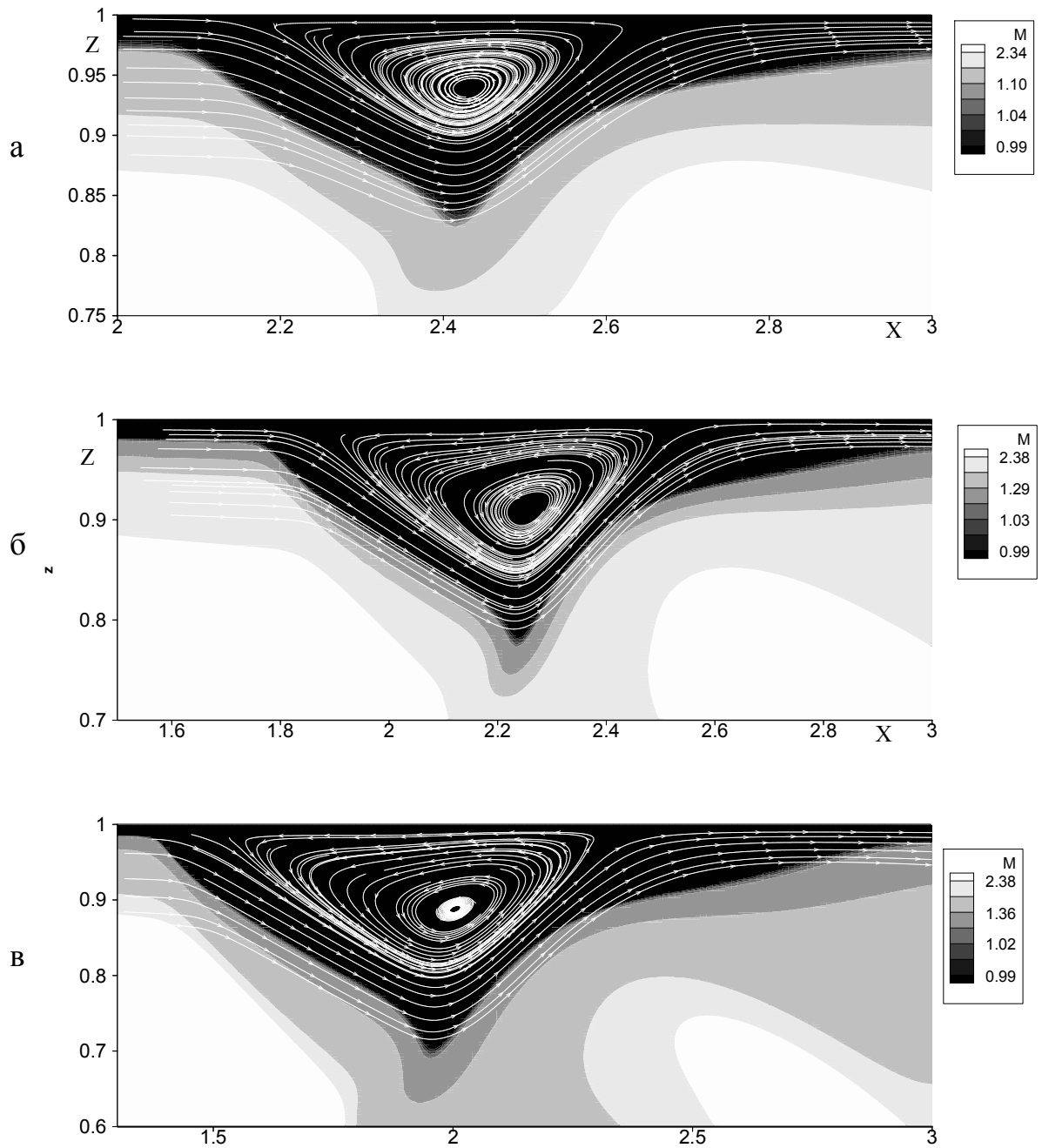


Рисунок 3.18 - Распределение местного числа Маха на верхней стенке в области отрыва для ширины щели: а)  $h_1$ , б)  $h_2$ , в)  $h_3$ .  $T_0=800K$ ,  $M_\infty=3.75$ ,  $T_\infty=629.43K$ ,  $Re=10^6$ ,  $Pr=0.7$

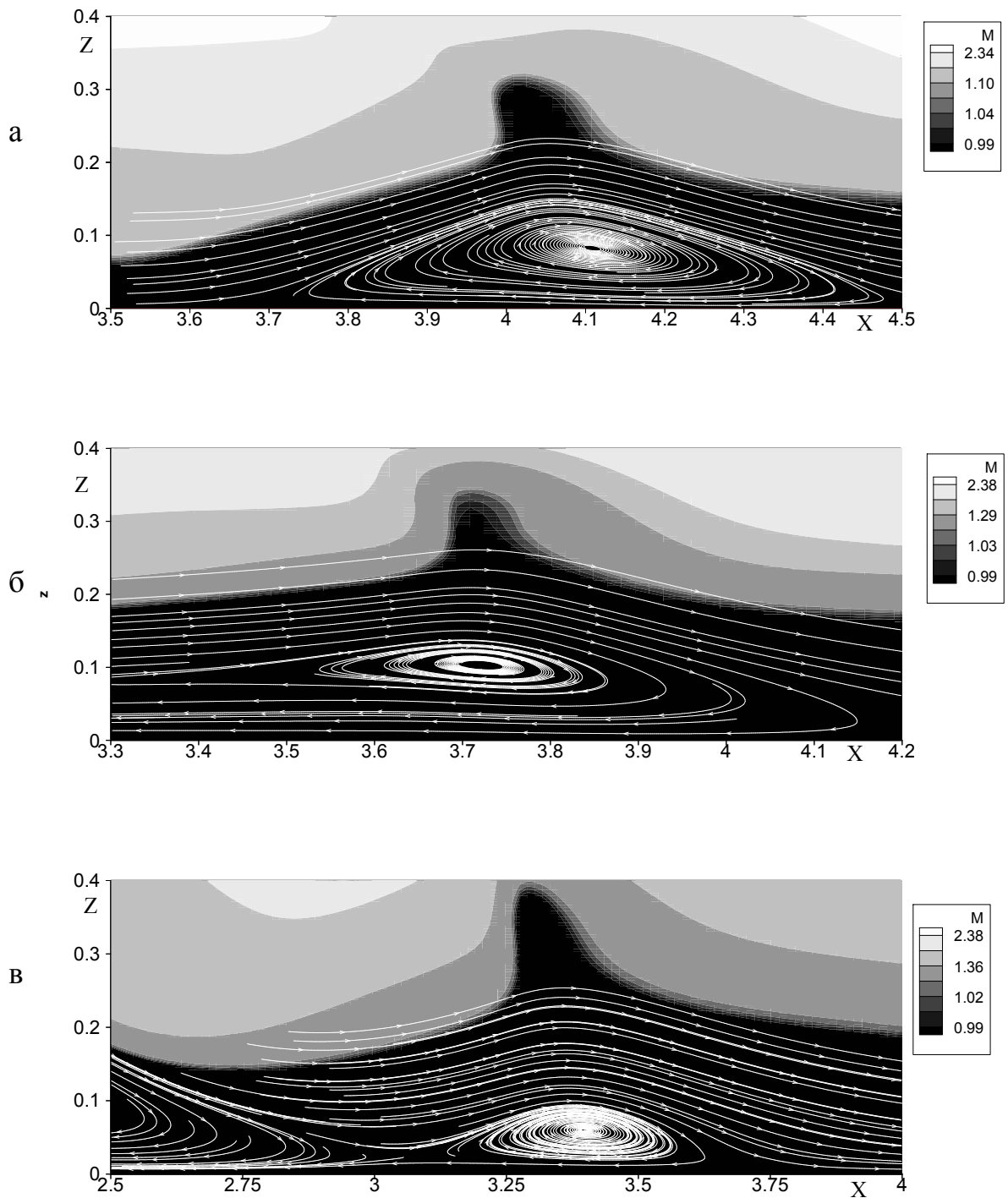


Рисунок 3.19 - Распределение местного числа Маха на нижней стенке в области отрыва за струей для ширины щели: а)  $h_1$ , б)  $h_2$ , в)  $h_3$ .  $T_0=800K$ ,  $M_\infty=3.75$ ,  $T_\infty=629.43K$ ,  $Re=10^6$ ,  $Pr=0.7$

На графиках можно увидеть область отрыва на верхней стенке вследствие взаимодействия головного скачка уплотнения (1) с верхним пограничным слоем. Качественные картины возвратных зон во всех трех случаях аналогичны, однако количественно они отличаются, т.к. размеры отрыва пограничного слоя на верхней стенке существенно увеличиваются с ростом ширины щели.

На фигуре 3.20 (а-в), помимо известных, наблюдается дополнительный вихрь на нижней стенке на некотором расстоянии за струей, который сформировался в результате взаимодействия скачка (6) с нижним пограничным слоем. Этот отрыв также показан на картине изомахов в форме пиков для линий числа Маха, меньших единицы (рисунки 3.19 г, д, е). Как следует из графиков, с возрастанием размеров щели происходит его смещение в сторону струи (сравнение рис. 3.20 а-в). Таким образом, можно сделать вывод, что рост размеров щели будет приводить к повышению смещения воздуха и горючего непосредственно за вдуваемой струей вследствие обширных зон возвратных течений.

На рисунке 3.21а-в приведены распределения массовой концентрации водорода для всех трех рассматриваемых щелей. Контуры постоянной концентрации водорода показывают, что максимальное значение концентрации достигается за струей. Полученные результаты свидетельствуют, что возрастание размеров щели влияет на дальность вдуваемой струи, так при  $h_1$  линия 1%-ной концентрации водорода поднялась на высоту 45% от общей высоты канала (рисунок 3.21а), при  $h_2$  эта же линия соответствует половине высоты канала, но для  $h_3$  она составляет 47,5% от высоты канала. В этом случае уменьшение дальности вдуваемого водорода также свидетельствует о заклинивании струи.

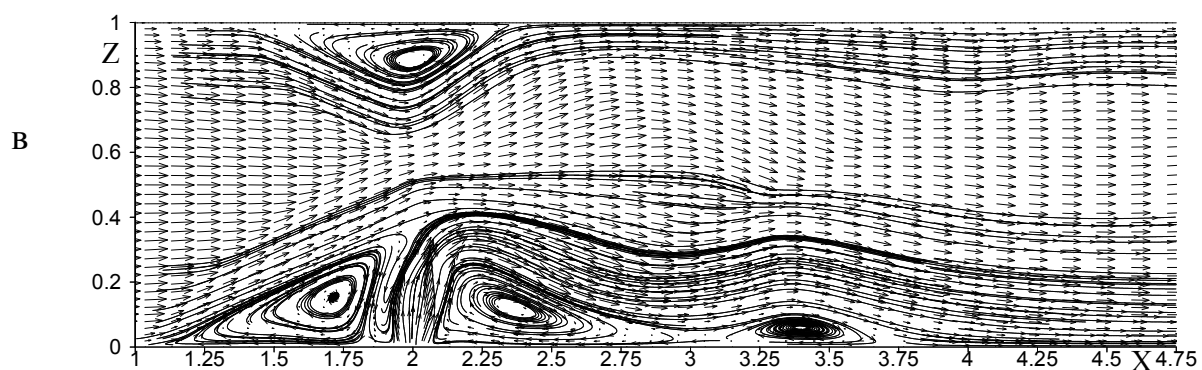
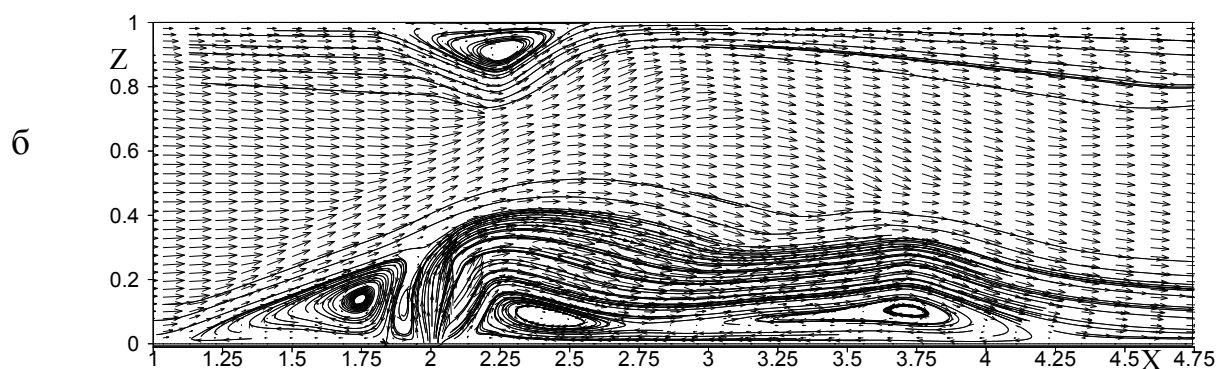
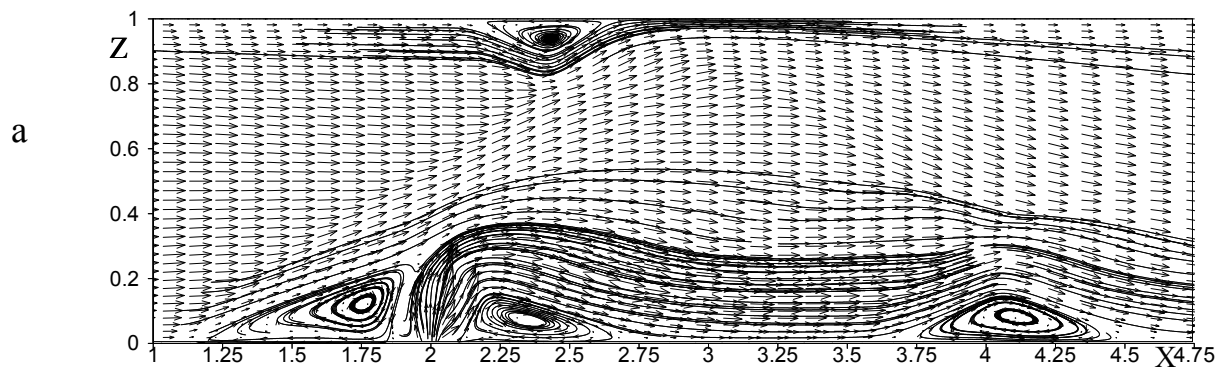


Рисунок 3.20 - Распределение поля вектора скорости для ширины щели:

а)  $h_1$ , б)  $h_2$ , в)  $h_3$ .

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$

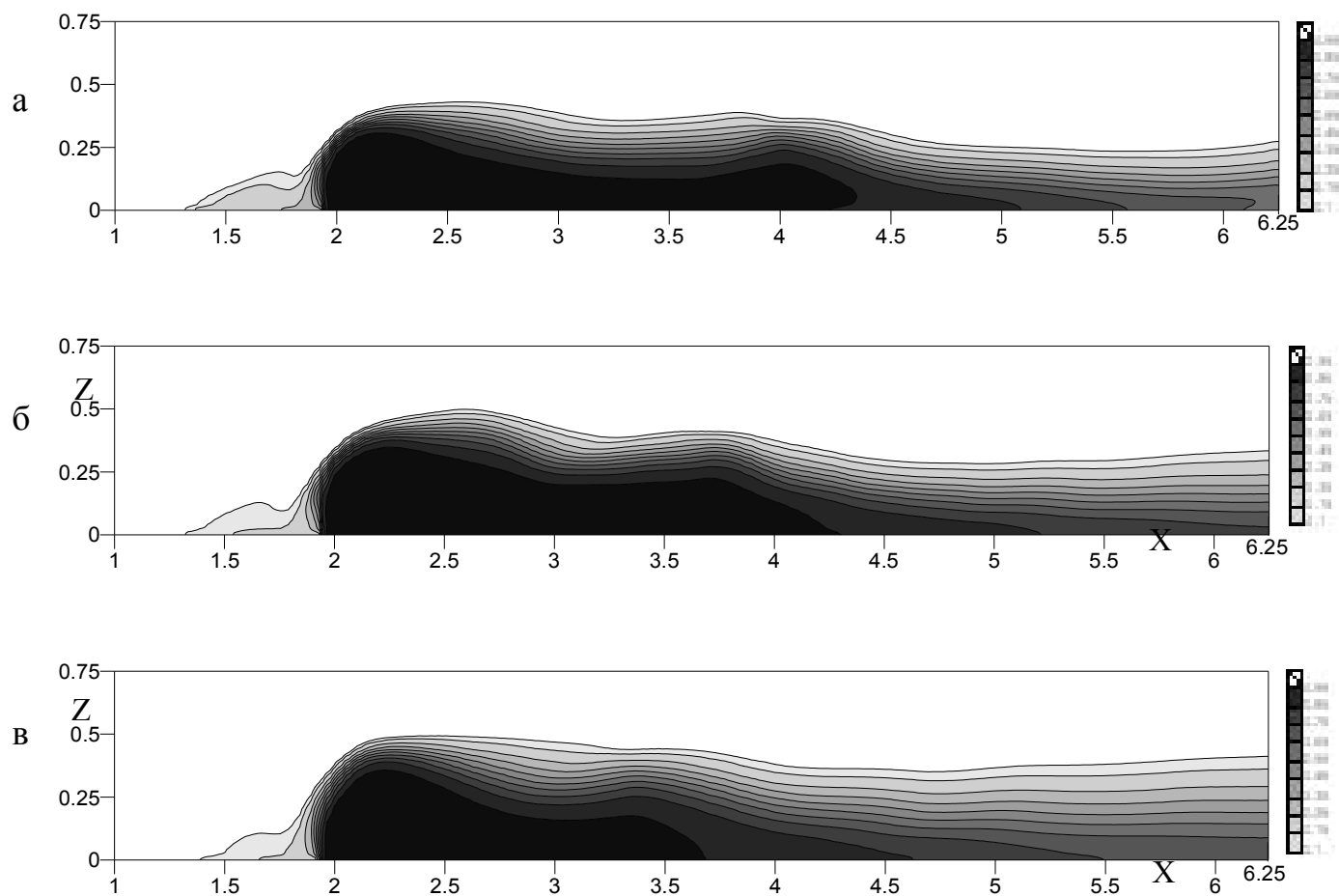


Рисунок 3.21 - Распределение концентрации водорода для ширины щели:

а)  $h_1$ , б)  $h_2$ , в)  $h_3$ .

$$T_0=800K, M_\infty=3.75, T_\infty=629.43K, Re=10^6, Pr=0.7$$



Из распределения давления на нижней стенке (рисунок 3.22а) видно, что избыточное давление перед струей увеличивается, и на некотором расстоянии за струей наблюдается также его рост, обусловленный отрывом пограничного слоя. При этом из графика заметно, что кривые для больших  $h$  существенно выше. Аналогичная картина наблюдается и на верхней стенке (рисунок 3.22б).

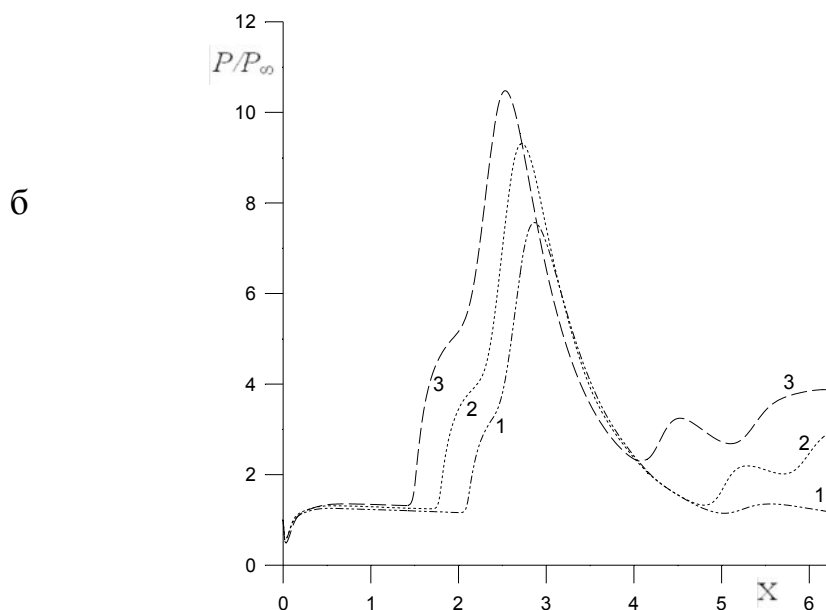
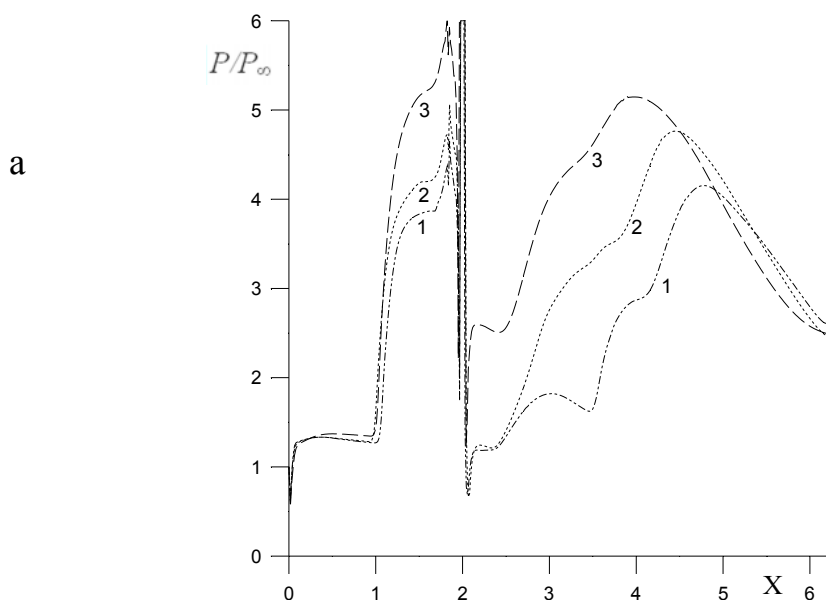


Рисунок 3.22 - а) Распределение давления на нижней стенке, б)  
Распределение давления на верхней стенке, здесь линия 1-  $h_1$ , линия 2-  $h_2$ ,  
линия 3-  $h_3$

### 3.1 Постановка задачи

## ГЛАВА IV. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ С МАЛЫМИ И БОЛЬШИМИ ПАРАМЕТРАМИ НЕРАСЧЕТНОСТИ

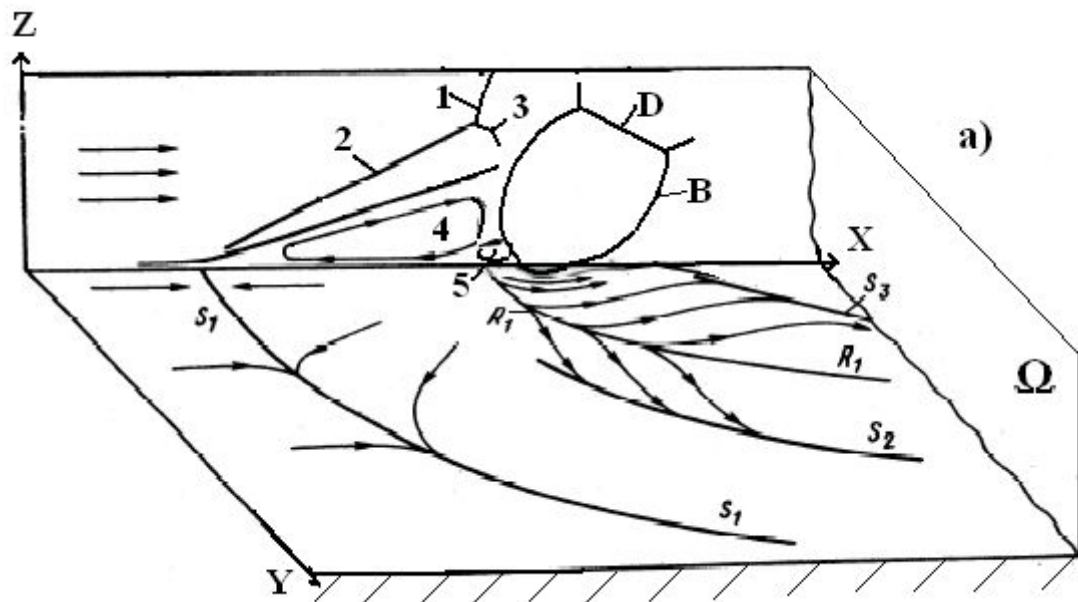
Как было указано в главе 1 огромный практический интерес представляет именно пространственный поперечный вдув газовой струи в набегающий сверхзвуковой поток. При этом следует отметить, что моделирование пространственного течения обусловлено вычислительными трудностями, а именно, численное интегрирование полной системы уравнений Навье-Стокса является чрезвычайно сложной и трудоемкой задачей, даже в случае расчета течений однородного вязкого газа. В случае расчета внутренних течений многокомпонентных газовых смесей эта задача еще более усложняется, что связано как со значительным увеличением объема вычислений, так и с возникновением целого ряда серьезных дополнительных трудностей принципиального характера. В связи с этим, моделирования и изучения структуры пространственного взаимодействия струи с набегающим потоком в данной главе рассматривается для одноатомного вязкого газа.

Ударно-волновая структура, появляющаяся в сверхзвуковых течениях при наличии поперечной вдуваемой струи хорошо изучена в литературе, а также вихревая структура взаимодействия общеизвестна и показана ее

аналогия истечению струи несжимаемой жидкости. На графике 4.1а, показана общепринятая пространственная схема истечения струи [1-8]. Здесь головная волна, скачок отрыва и система скачков уплотнения с двумя тройными точками, соответствующая истечению сильно недорасширенной струи [7], определены как 1, 2 и 3. Вихри перед струей обозначены цифрами (4) и (5). Буквами D и B обозначены диск Маха и бочкообразная структура в струе соответственно. На схеме показана линия стекания потока на стенке S1, соответствующая границе скачка 2, за которой образуется область отрыва пограничного слоя перед струей. Поток в области скачка уплотнения 3 растекается по всем направлениям, где большая его часть поворачивает к стенке и проникает в зону обратного отрывного течения. Достигнув поверхности стенки, поток растекается в противоположные направления и эта линия обозначена как линия растекания R1. Сформировавшаяся в результате взаимодействия хвостового скачка уплотнения с поверхностью пластины линия обозначена как S3. Также при истечении круглой струи в сносящий поток возникает вихревая структура в самой струе, которая аналогична истечению струи несжимаемой жидкости и является давно изученной и известной.

Однако в [128] для одного частного случая течения с большими параметрами нерасчетности, где отношение статического давления в струе к полному давлению потока равнялось 532, показано, что при истечении газовой струи появляются дополнительные вихри как в самой струе, так и в слое смешения между струей и натекающим потоком. Суммарная качественная картина завихренности, возникающая при поперечном вдуве струи в набегающий поток с большими значениями нерасчетности, описанная в работе [128], иллюстрируется на рисунке 1б. На графике, в сечении  $yz$  (плоскость  $\Omega$  - рисунок 1а), показана структура обратных течений на некотором расстоянии от вдува струи, состоящая из пяти пар противоположно вращающихся вихрей. Из них две пары (на рисунке (8) и (6)) формируются в зоне смешения, пара вихрей (9) формируется за счет

взаимодействия струи, проходящей через диск Маха со скоростным набегающим потоком. Подковообразный вихрь (7) возникает в результате наличия большого градиента давления перед струей и как следствия отрыва потока. Две пары вихрей (10) зарождаются за счет перетекания потока над бочкообразной структурой в струе. Таким образом, вышеприведенный анализ свидетельствует о том, что требуется детальное изучение взаимодействия сверхзвуковых течений с поперечной вдуваемой струей с большими параметрами нерасчетности и механизмов возникновения зон обратных течений.



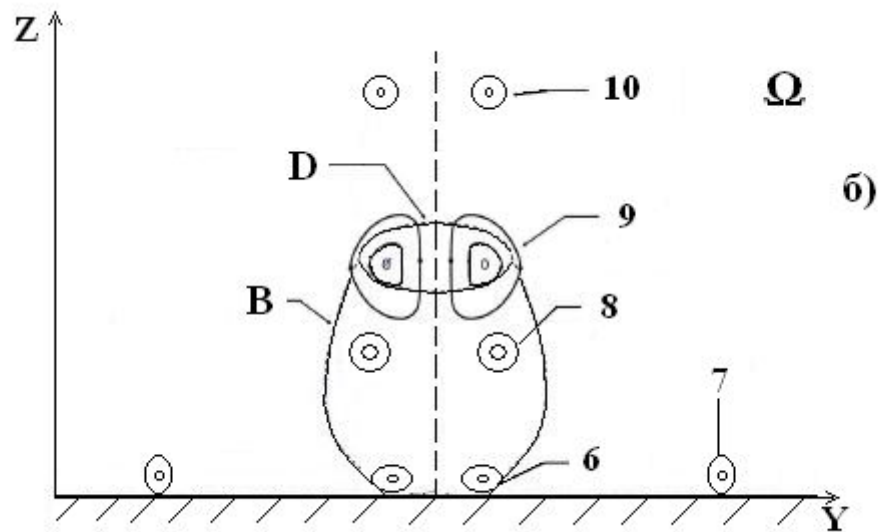


Рисунок 4.1 - Схема течения

Целью исследования настоящей главы является численное моделирование вдува звуковых струй из круглых отверстий, расположенных симметрично на верхней и нижней стенках канала, перпендикулярно сверхзвуковому потоку и изучение динамики возникновения дополнительных вихревых структур в самой струе и за струей в зависимости от параметра нерасчетности в диапазоне от умеренных до больших значений. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки. Схема течения и качественная картина вихревой структуры показана на рисунке 4.1.

#### 4.1 Постановка задачи

Исходной является система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$(4.1) \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} + \frac{\partial(\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial y} = \vec{S}$$

компоненты векторов  $\vec{U}, \vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$  определяются выражениями:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \\ \rho k \\ \rho \omega \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + P)\mu \\ \rho uk \\ \rho u\omega \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P)w \\ \rho wk \\ \rho w\omega \end{pmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho vw \\ (E_t + P)v \\ \rho vk \\ \rho v\omega \end{pmatrix},$$

а компоненты  $\vec{E}_v, \vec{F}_v, \vec{G}_v$  связаны с вязкими напряжениями:

$$\vec{E}_v = \left( 0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xz} + w\tau_{xz} - q_x, \frac{1}{\text{Re}}(\mu_l + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x}, \frac{1}{\text{Re}}(\mu_l + \sigma_\omega \mu) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^T$$

$$\vec{F}_v = \left( 0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z, \frac{1}{\text{Re}}(\mu_l + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial z}, \frac{1}{\text{Re}}(\mu_l + \sigma_\omega \mu) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^T$$

$$\vec{G}_v = \left( 0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, \frac{1}{\text{Re}}(\mu_l + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y}, \frac{1}{\text{Re}}(\mu_l + \sigma_\omega \mu) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^T$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде:

$$\tau_{xx} = \frac{2\mu_t}{3\text{Re}}(2u_x - w_z - v_y), \quad \tau_{zz} = \frac{2\mu_t}{3\text{Re}}(2w_z - u_x - v_y), \quad \tau_{yy} = \frac{2\mu_t}{3\text{Re}}(2v_y - u_x - w_z),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu_t}{\text{Re}}(u_z + w_x), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu_t}{\text{Re}}(u_y + v_x), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\mu_t}{\text{Re}}(w_y + v_z),$$

$$q_x = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{PrRe}} T_x, \quad q_y = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{PrRe}} T_y, \quad q_z = -\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 \text{PrRe}} T_z.$$

Вектор дополнительных членов имеет следующий вид:

$$\vec{S} = \left( 0, 0, 0, 0, 0, (P_k - \beta^* \rho \omega k), (\gamma^* \rho P_k / \mu_t - \beta \rho \omega^2) \right)^T$$

Где 
$$P_k = \mu_t \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad i, j, k=1, 2, 3$$

Константы принимают следующие значения:

$$\sigma_k = 0.5, \sigma_\omega = 0.5, \beta^* = 0.09, \beta = 0.075, \gamma^* = 5/9.$$

здесь  $k, \omega$  - кинетическая энергия турбулентности и скорость диссипации кинетической энергии турбулентности.  $P_k$  - член генерации турбулентности, турбулентная вязкость определяется по формуле  $\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$  [9],  $\mu_l$  определяется по формуле Сазерленда.

Для давления и температуры запишутся следующие выражения:

$$P = (\gamma - 1) \left[ E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right],$$

$$T = \left( \frac{1}{\rho c_v} \right) \left[ E_t - \frac{1}{2} (\rho u^2 + \rho w^2 + \rho v^2) \right], \quad c_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)M_\infty^2}$$

Здесь  $t$  - время,  $u, w, v$  - компоненты скорости потока в продольном и поперечных направлениях,  $\rho$  - плотность,  $P$  - давление,  $T$  - температура,  $c_v$  - теплоемкость при постоянном объеме,  $\gamma$  - показатель адиабаты,  $M_0$  и  $M_\infty$  - числа Маха струи и потока,  $0$  - отнесен к параметрам струи,  $\infty$  - к параметрам потока.

Исходная система (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе  $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$ , давление и полная энергия отнесены к значению  $\rho_\infty u_\infty^2$ , характерным размером длины является диаметр круглого отверстия струи.  $Pr$  - число Прандтля, и  $Re = u_\infty L / \nu$  - число Рейнольдса, где  $L$  - длина канала, являющийся характерным линейным размером для  $Re$ .

#### 4.2 Граничные и начальные условия:

На входе, а также в качестве начальных данных задаются параметры потока:

$$u=1, \quad v=0, \quad w=0, \quad \rho=1, \quad T=1 \quad x=0, \quad 0 \leq y \leq H_y, \\ 0 \leq z \leq H_z$$

Начальные данные для параметров  $k, \omega$  определяются, исходя из предположения равенства порождения турбулентности и ее диссипации

$$P_k = \beta^* \rho \omega k$$

тогда

$$k = k_\infty, \quad \text{где } k_\infty = \frac{\mu_{tB-L}}{\rho \text{Re} \sqrt{\beta^*}} \sqrt{\frac{P_k}{\mu_{tB-L}}}, \quad \omega = \omega_\infty,$$

$$\text{где } \omega_\infty = \frac{\rho k}{\mu_{tB-L} \text{Re}}, \quad P_k = \frac{\mu_t}{\text{Re}} \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right).$$

Здесь для определения значения коэффициента турбулентной вязкости используется алгебраическая модель Болдуина-Ломакса. Вблизи стенки ( $0 \leq z \leq \delta_1$ ) коэффициент турбулентной вязкости имеет вид

$$\mu_t = \rho l^2 |\Omega|,$$

где  $|\Omega|$  – завихренность,  $l = \kappa z \left[ 1 - e^{-z^+/A} \right]$  – длина пути перемешивания,  $\kappa = 0.41$  – постоянная Кармана,  $A = 26$ . Вдали от стенки ( $z > \delta_1$ ) принято

$$\mu_t = 0.0168 \rho V_0 L_0,$$

где  $V_0 = \left( F_{max}, 0.25 q_{dif}^2 / F_{max} \right)$ ,  $L_0 = 1.6 z_{max} I^k$ ,  $F_{max} = \max(|\Omega| l / \kappa)$ ,  $z_{max}$  соответствует  $F_{max}$ ,  $q_{dif} = \max(|\vec{V}|) - \min(|\vec{V}|)$ ,  $\vec{V} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ,  $I^k = \left[ 1 + 5.5 (0.3z / z_{max})^6 \right]^1$  – ограничивающий множитель Клебанава.

на нижней стенке:



$$u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=0 \quad z=0, \quad 0 < x \leq H_x,$$

$$0 \leq y \leq H_y$$

Для параметров  $k$ - $\omega$  модели турбулентности на стенке задавались следующие граничные условия

$$k=0; \quad \omega = \frac{6\mu}{0.075\rho(\Delta y_1)^2}$$

Вблизи стенки задается пограничный слой, толщина которого определяется по формуле  $\delta_1 = 0,37x(\text{Re})^{-0,2}$ . Также задается пристенный слой (10% от пограничного слоя)  $\delta_2 = 0,1\delta_1$ . Продольная составляющая скорости  $u$  принимает следующий вид:

$$u = 0,1 \left( \frac{z}{\delta_2} \right) + 0,9 \left( \frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq y \leq H_y,$$

$$0 \leq z \leq \delta_2.$$

В развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задается степенным законом:

$$u = \left( \frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7}, \quad 0 < x \leq H_x,$$

$$0 \leq y \leq H_y, \quad \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

В зависимости от распределения скорости значения температуры и плотности примут вид:

$$T = T_w + u(1 - T_w), \quad \rho = \frac{1}{T}, \quad \text{где } T_w = \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) - \text{температура на}$$

стенке,  $r = 0,88$ ;

на струе:

$$u=0, \quad v=0, \quad T=0.6 \quad w = \sqrt{T} M_0 / M_\infty, \quad P_0 = n P_\infty, \quad z=0, \quad |x^2 + y^2| \leq R;$$

на верхней границе задается условие симметрии:

$$w=0; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial v}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial T}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial k}{\partial z}=0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial z}=0 \quad z=H_z, \quad 0 < x \leq H_x,$$

$$0 \leq y \leq H_y;$$

на боковых границах:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad y=0,$$

$$y=H_y, \quad 0 < x \leq H_x, \quad 0 \leq z \leq H_z$$

где  $H_x$  - длина,  $H_z$  - высота,  $H_y$  - ширина расчетной области,  $R$  - радиус круглого отверстия;

на выходной границе задается условие неотражения.

### 4.3 Метод решения исходных трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса

В работе [132] авторы развили ENO-схему на основе идеи метода Годунова и показали применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Для решения поставленной задачи ENO схема обобщается на трехмерный случай. В соответствии с этим, предварительно в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне струи, для более точного учета течения, вводится сгущение сетки с помощью преобразований [132]:

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(z), \quad \zeta = \zeta(y). \quad (4.2)$$

При этом система уравнений (1) в обобщенных координатах запишется в виде:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tilde{G}_{vm}}{\partial \zeta}$$

(4.3)

где  $\tilde{U} = \frac{1}{J} \bar{U}$ ,  $\tilde{E} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) \bar{E}$ ,  $\tilde{F} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) \bar{F}$ ,  $\tilde{E}_{v2} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) \bar{E}_{v2}$ ,  $\tilde{E}_{vm} = \left( \frac{\xi_x}{J} \right) \bar{E}_{vm}$ ,

$\tilde{F}_{v2} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) \bar{F}_{v2}$ ,  $\tilde{F}_{vm} = \left( \frac{\eta_z}{J} \right) \bar{F}_{vm}$ ,  $\tilde{G}_{v2} = \left( \frac{\zeta_y}{J} \right) \bar{G}_{v2}$ ,  $\tilde{G}_{vm} = \left( \frac{\zeta_y}{J} \right) \bar{G}_{vm}$ , где  $\bar{U} = \frac{1}{J} \bar{U}$ ,

$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, z, y)}$  - якобиан преобразования,  $\tilde{E}_{vm}$ ,  $\tilde{E}_{v2}$  - диффузионные члены,

содержащие смешанные и вторые производные

В соответствии с принципом построения ENO- схемы, исходная система уравнений формально представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial E^m}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial F^m}{\partial \eta} + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-) \frac{\partial G^m}{\partial \zeta} - \\ & - \left[ \frac{\partial(\tilde{E}_{v2} + \tilde{E}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F}_{v2} + \tilde{F}_{vm})}{\partial \eta} - \frac{\partial(\tilde{G}_{v2} + \tilde{G}_{vm})}{\partial \zeta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь  $A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \bar{U}}$ ,  $B = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{U}}$ ,  $Q = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{U}}$  - матрицы Якоби,

$$\hat{A}^\pm = R \hat{\Lambda}_\xi R^{-1} = R \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\xi)}{2} \right) R^{-1} \quad \hat{B}^\pm = T \hat{\Lambda}_\eta T^{-1} = T \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\eta)}{2} \right) T^{-1}$$

$$, \quad \hat{Q}^\pm = S \hat{\Lambda}_\zeta S^{-1} = S \left( \frac{1 \pm \text{sign}(\Lambda_\zeta)}{2} \right) S^{-1},$$

$E^m = \tilde{E} + \bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi$ ,  $F^m = \tilde{F} + \bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta$ ,  $G^m = \tilde{G} + \bar{E}_\zeta + \bar{D}_\zeta$  - модифицированные

потоки в узловых точках  $(i, j, k)$ , состоящие из исходных конвективных векторов  $(\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G})$  и добавочных членов высокого порядка точности  $(\bar{E}_\xi, \bar{D}_\xi,$

$\bar{E}_\eta, \bar{D}_\eta, \bar{E}_\zeta, \bar{D}_\zeta)$ , подробно описанных в [132].

После факторизации одношаговой конечно-разностной схемы для интегрирования по времени уравнения (4) получается следующее равенство:

$$\begin{aligned}
& \left\{ I + \Delta t \left[ (\hat{A}^+ + \hat{A}^-)^n \frac{\partial}{\partial \xi} A_\xi^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\mu}_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\tilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times \\
& \left\{ I + \Delta t \left[ (\hat{B}^+ + \hat{B}^-)^n \frac{\partial}{\partial \eta} B_\eta^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\mu}_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ I + \Delta t \left[ (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-)^n \frac{\partial}{\partial \zeta} Q_\zeta^n \bullet - \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\mu}_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\tilde{U}_1} \bullet \right] \right\} \tilde{U}^{n+1} = \\
& = \tilde{U}^n + \Delta t \left[ \frac{\partial \tilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_{v22}^n}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (2\tilde{E}_{vm}^n - \tilde{E}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2\tilde{F}_{vm}^n - \tilde{F}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (2\tilde{G}_{vm}^n - \tilde{G}_{vm}^{n-1}) \right. \\
& \left. - \Delta t \left[ (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi + D_\xi) + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta + D_\eta) + (\hat{Q}^+ + \hat{Q}^-) \frac{\partial}{\partial \zeta} (E_\zeta + D_\zeta) \right]^n \right] \quad (4)
\end{aligned}$$

5)

где  $A_\xi = \xi_x A$ ,  $B_\eta = \eta_z B$ ,  $Q_\zeta = \zeta_y Q$ , причем  $\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I$ ,  $I$  - единичная матрица,  $\tilde{\mu}_\xi = \frac{\mu \xi_x^2}{ReJ}$ ,  $\tilde{\mu}_\eta = \frac{\mu \eta_z^2}{ReJ}$ ,  $\tilde{\mu}_\zeta = \frac{\mu \zeta_y^2}{ReJ}$ .

При аппроксимации производных в конвективных членах использован следующий оператор:

$$\left( \hat{A}^- + \hat{A}^+ \right) \frac{\partial}{\partial \xi} f \Big|_{ij} = \frac{\hat{A}_{i+1/2j}^- (f_{i+1j} - f_{ij}) + \hat{A}_{i-1/2j}^+ (f_{ij} - f_{i-1j})}{\Delta \xi}$$

Аппроксимация членов, содержащих добавочные вектора высокого порядка осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_{i+1/2j}^- \left[ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i+1j} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} \right] + \hat{A}_{i-1/2j}^+ \left[ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i-1j} \right] = \\
& = R \hat{\Lambda}^- R_{i+1/2j}^{-1} \left[ (\min \text{mod} (\bar{E}_{\xi i+3/2j} \bar{E}_{\xi i+1/2j})) + \right. \\
& + \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i+3/2j}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i+3/2j}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{i+1j}| > |\Delta_+ \tilde{U}_{i+1j}| \\
& + \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i+1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i+1/2j}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{i+1j}| \leq |\Delta_+ \tilde{U}_{i+1j}| \left. \right) \\
& - (\min \text{mod} (\bar{E}_{\xi i+1/2j} \bar{E}_{\xi i-1/2j})) + \\
& + \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i+1/2}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i+1/2}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| > |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \\
& + \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i-1/2j}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| \leq |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \left. \right) + \\
& + R \hat{\Lambda}^+ R_{i-1/2j}^{-1} \left[ (\min \text{mod} (\bar{E}_{\xi i+1/2j} \bar{E}_{\xi i-1/2j})) + \right. \\
& - \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i-1/2}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-1/2}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| \leq |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \\
& - \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i+1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i+1/2j}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{ij}| > |\Delta_+ \tilde{U}_{ij}| \left. \right) \\
& - (\min \text{mod} (\bar{E}_{\xi i-1/2j} \bar{E}_{\xi i-3/2j})) + \\
& - \dot{m}(\Delta_- \hat{D}_{\xi i-3/2}, \Delta_+ \hat{D}_{\xi i-3/2}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{i-1j}| \leq |\Delta_+ \tilde{U}_{i-1j}| + \\
& - \dot{m}(\Delta_- \bar{D}_{\xi i-1/2j}, \Delta_+ \bar{D}_{\xi i-1/2j}) \text{ если } |\Delta_- \tilde{U}_{i-1j}| > |\Delta_+ \tilde{U}_{i-1j}| \left. \right)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{\xi i+1/2} &= (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{2} \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right] \Delta_+ \tilde{E}_i, \\
\bar{E}_{\xi i-1/2} &= (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{2} \left[ I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right] \Delta_- \tilde{E}_i, \\
\bar{D}_{\xi i+1/2} &= (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{6} \left[ \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right] \Delta_+ \tilde{E}_i, \\
\bar{D}_{\xi i-1/2} &= (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{6} \left[ \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right] \Delta_- \tilde{E}_i,
\end{aligned}$$

$$\hat{D}_{\xi i+1/2} = (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right) + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right) \right] \Delta_+ \tilde{E}_i,$$

$$\hat{D}_{\xi i-1/2} = (R \text{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right) + \frac{1}{2} \left( I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right) \right] \Delta_- \tilde{E}_i.$$

$$\dot{m}(a, b) = \begin{cases} a & \text{если } |a| \leq |b| \\ b & \text{если } |a| > |b| \end{cases}$$

$$\minmod(a,b)=\begin{cases} s \cdot \min(|a|,|b|) & \text{если } \text{sign}(a)=\text{sign}(b)=s \\ 0 & \text{если наоборот} \end{cases}$$

Решение системы (4.5), осуществляется методом расщепления относительно вектора  $\tilde{U}$  матричной прогонкой.

#### 4.4 Анализ результатов численного решения задачи пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом струй

Ниже приведены результаты расчетов проблемы, сформулированной в вводной части этой главы. Расчет производился на разнесенной сетке размером  $201 \times 101 \times 101$  с шагами по пространственным координатам  $\Delta x = 0.1 \div 0.5$ ,  $\Delta z = 0.03 \div 0.25$ ,  $\Delta y = 0.1 \div 0.5$ , шаг по времени  $\Delta t = 0.025$ . Исследуется обтекание сверхзвуковым потоком с параметрами  $Re = 1.87 \cdot 10^7$ ,  $Pr = 0.9$ ,  $M_\infty = 3$ , звуковой струи совершенного газа с диаметром отверстия  $d = 1.4 \text{ см}$ . Размеры рассматриваемой области определяются как  $H_x = 30$ ,  $H_z = 15$ ,  $H_y = 30$  калибров, а центр струи находится на расстоянии  $x_0 = 10$ ,  $y_0 = 15$  калибров. Во входном сечении задается толщина пограничного слоя  $\delta_1 = 1$ , вычисленная для  $x = 250$ . Тогда высота пристенного слоя соответствует ламинарно- турбулентному подслою  $z^+ = 72$ , где  $z^+ = \delta_2 u_\tau / \nu$ , а высота пограничного слоя составляет  $z^+ = 2570$ , где  $z^+ = \delta_1 u_\tau / \nu$ , здесь  $u_\tau = \left( \frac{1}{2} C_f \right)^{1/2}$  - динамическая скорость,  $C_f$  - коэффициент трения потока на стенке, вычисленный по формуле Прандтля-Шлихтинга. Сгущение сетки вблизи стенки осуществляется таким образом, чтобы на расчет пристенного слоя приходилось 5-8 узловых точек по направлению оси  $z$ , а расчет всего пограничного слоя выполняется с

использованием 22-26 узлов расчетной сетки. В таблице представлена чувствительность сходимости решений к характеристикам сетки путем

оценки суммарных  $L_1^p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|$  и среднеквадратичных

$L_2^p = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{n=1}^N |\varepsilon_M^n - \varepsilon_{\hat{M}}^n|^2}$  отклонений норм невязок плотности. Здесь

$\varepsilon_M^n = \max_{(i,j) \in M} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$ ,  $\varepsilon_{\hat{M}}^n = \max_{(i,j) \in \hat{M}} |\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n|$ ;  $N$  - число итераций.

Таблица 4.1 - Зависимость суммарного и среднеквадратичного отклонений (разностей плотности) от числа узлов

Число узлов		$L_1^p$	$L_2^p$
$M=I \times J \times K$	$\hat{M}=M \times L \times P$		
20×10×101	22×10×101	$1,70 \cdot 10^{-2}$	$7,98 \cdot 10^{-2}$
	18×10×101	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$8,98 \cdot 10^{-2}$
20×10×101	20×8×81	$3,0 \cdot 10^{-2}$	0,11
	20×11×111	$2,19 \cdot 10^{-2}$	$9,98 \cdot 10^{-2}$

Оценки были построены путем последовательного измельчения сеток и при этом в качестве начальной принималась сетка  $M$  с  $I \times J \times K$  узлами, затем осуществлялась вариация  $M$ ,  $L$  и  $P$  узлов сетки  $\hat{M}$ . Как следует из таблицы, разность отклонения величин норм невязок плотности уменьшается с измельчением сетки. В соответствии с этим, сетка  $M$  с узлами 20×10×101, для которой различие с результатами, полученными для сеток 22×10×101 и 20×11×111, оказалось минимальным, представляется наилучшим выбором для последующих вычислений.

На графике 4.2 представлена динамика уменьшения безразмерной нормы невязки для плотности от числа итерационных шагов для сетки с узлами  $20 \times 11 \times 11$ . Как видно, скорость сходимости численного решения достаточно высокая.

Ниже на рисунках 4.3-4.39 приведены результаты расчетов вышеприведенной задачи с параметром нерасчетности в диапазоне  $3 \leq n \leq 50$ .

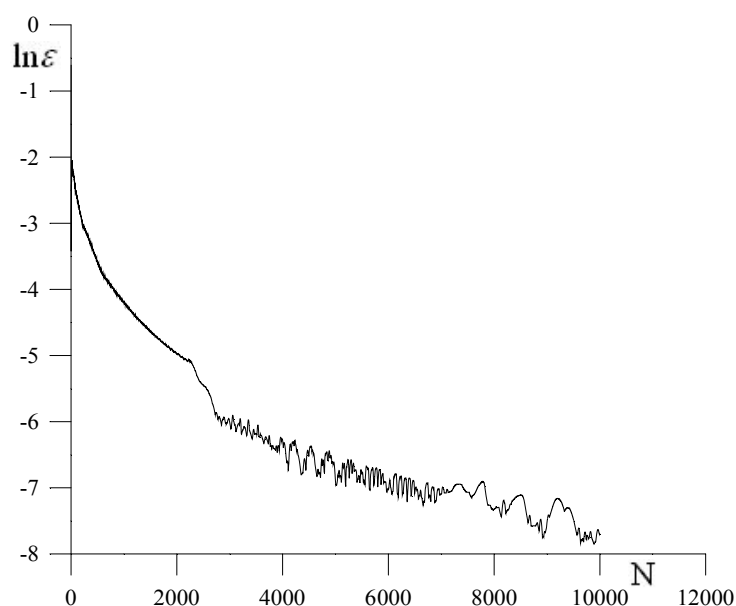


Рисунок 4.2 - Динамика уменьшения безразмерной нормы невязки для плотности

Как следует из вычислительных экспериментов качественная картина ударно-волновой структуры, представленной на графиках 4.3а и 4.3б поля изобар в плоскости симметрии, для двух случаев параметра нерасчетности (а)  $n = 10$ , б)  $n = 50$ ) аналогична известной картине, полученной для задачи в двумерной постановке, а именно, вследствие торможения натекающего потока перед струей возникает головной скачок уплотнения (1), (2) и (3) – косою и замыкающий скачки уплотнения, соответственно, причем для обоих случаев нерасчетности видно наличие ранее писанной в плоской задаче





Рисунок 4.3 - Влияние параметра нерасчетности на распределение изобар

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$

Это является следствием наличия бокового перетекания потока при пространственном течении. Известно, что рост давления в струе увеличивает высоту вдуваемой струи, что приводит к возрастанию ударно-волновой структуры. Вследствие чего очевидно, для  $n = 50$  кроме того, что интенсивности головного скачка достаточно для отражения от верхней стенки, хорошо просматривается висячий скачок уплотнения (В) в струе и диск Маха (D), несмотря на боковое перетекание потока. На картине для меньшей нерасчетности эти структуры не столь интенсивны.

Данный факт можно наблюдать из распределения местного числа Маха на линии симметрии (рисунок 4.4  $n = 10$ , рисунок 4.5  $n = 50$ ) где показан существенный рост размеров бочкообразной структуры, возникающей при вдуве круглой струи с большей нерасчетностью. Из сравнения изомах видно, что как и в плоском случае с увеличением нерасчетности происходит рост бочки в струе. Бочкообразная структура и ее размеры существенно отличаются для рисунков а и б, так для  $n = 50$  значения чисел Маха внутри бочки возрастают и становятся выше 6, в то время как для  $n = 10$  значения Маха достигают только значений  $M=3.65$ . Также для случая  $n = 50$  зона дозвуковых течений перед струей являются более обширными. Причем хорошо видно, если для  $n = 10$  за струей существует однородная область течения с махами меньшими единицы, то для нерасчетности 50 дозвуковая область сразу за диском Маха отделена от области на нижней стенке небольшой зоной сверхзвукового течения.

Как известно из экспериментов [2;128] распределение давления вблизи струи на стенке, т.е. поле изобарических кривых аппроксимируется криволинейными замкнутыми эллипсами, давление вдоль которых постоянно. Эту картину можно наблюдать на рисунке 4.6 ((а)  $n = 10$ , б)

$n = 50$ ), сечение  $z = 0.039$  в плоскости  $xy$ ), где показано распределение изобар вблизи стенки. Перед струей давление принимает максимальное значение, а за струей образуется зона с пониженным давлением.

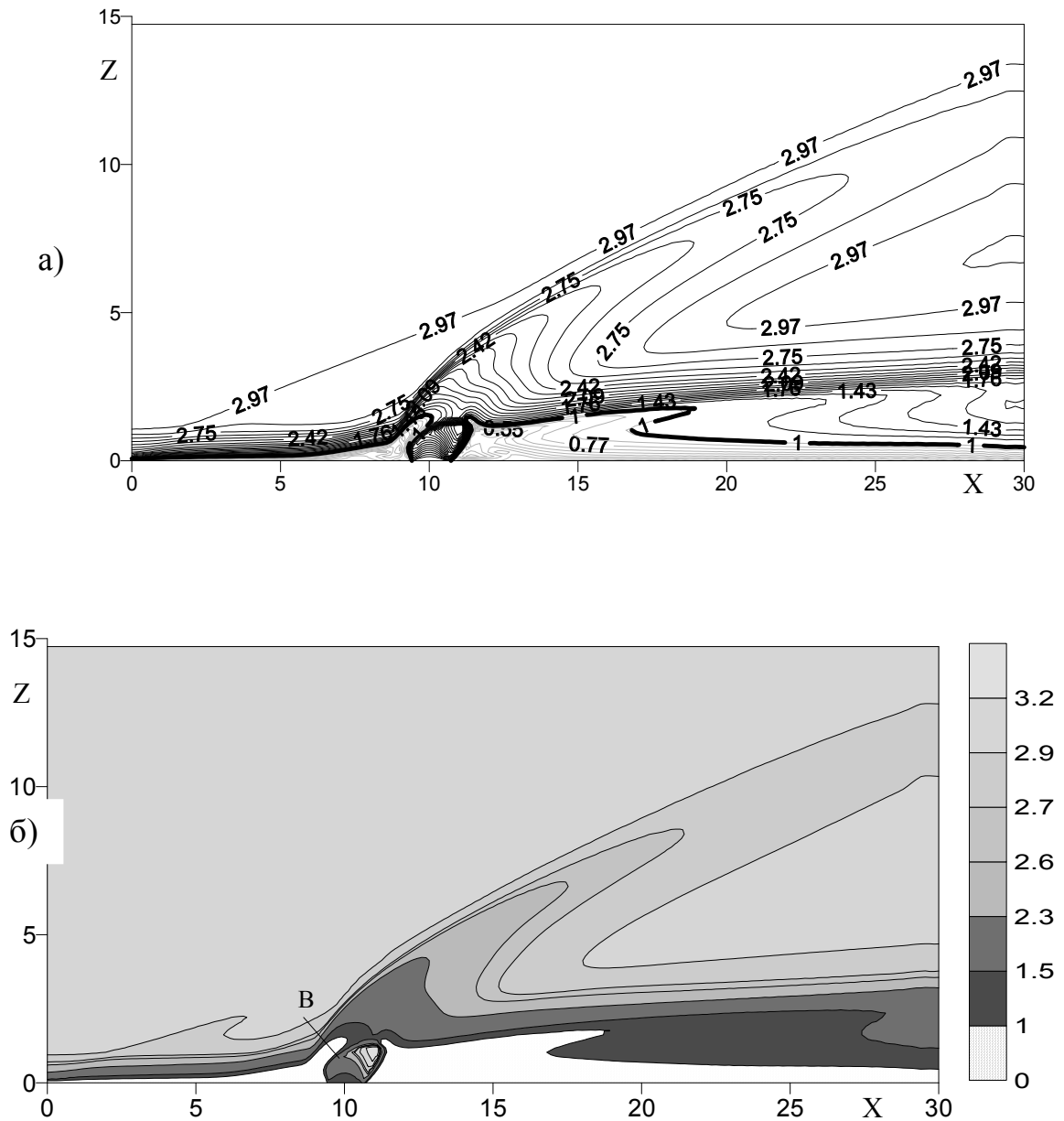


Рисунок 4.4 - Распределение местного числа Маха  $n = 10$   
 $Re=1.87 \cdot 10^7$ ,  $Pr=0.9$ ,  $M_0 = 1$ ,  $M_\infty = 3$ .

а) изолинии, б) оттененное изображение

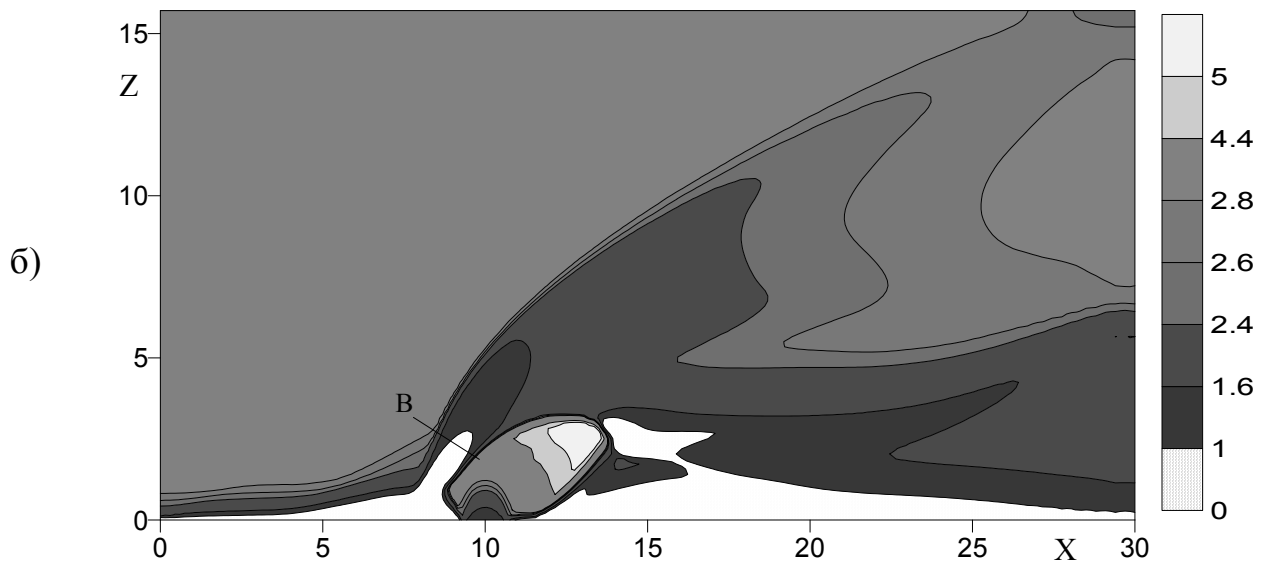
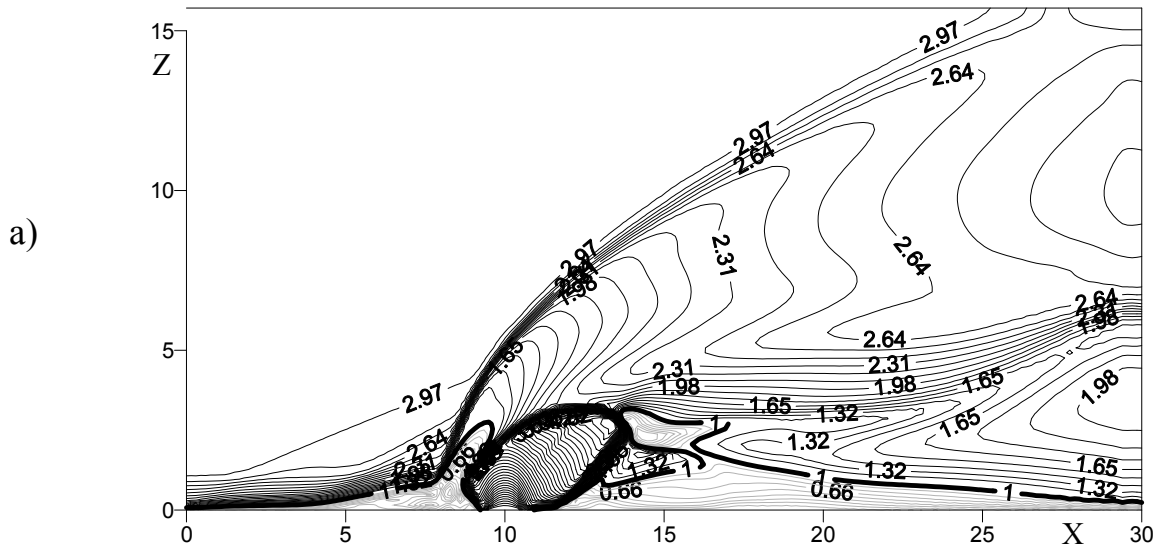


Рисунок 4.5 - Распределение местного числа Маха  $n = 50$   
 $Re=1.87 \cdot 10^7$ ,  $Pr=0.9$ ,  $M_0=1$ ,  $M_\infty=3$ .

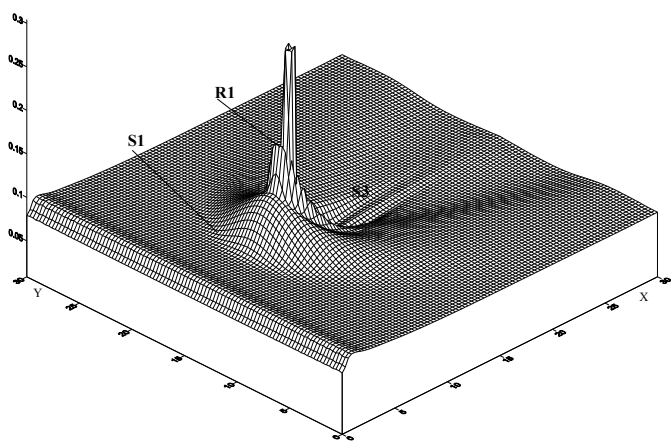
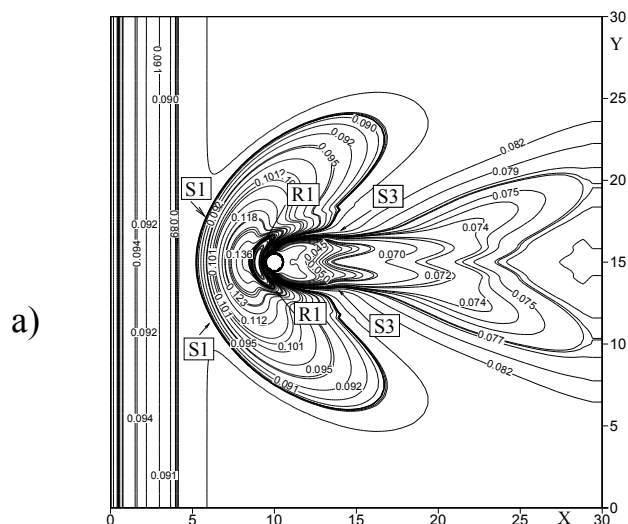
а) изолинии, б) оттененное изображение

Интенсивность и область повышенного давления для нерасчетности  $n = 50$  значительно превосходит случай меньшей нерасчетности. На картинах поля изобар показана линия (S1), соответствующая границе скачка (2). Линия обозначенная как (R1) - это линия на которую приходится максимальные значения давления на стенке перед струей, являющиеся результатом воздействия скачка уплотнения (3) на стенку. **Слабовыраженный след хвостового скачка уплотнения, который проявляется незначительным симметричным повышением давления за струей обозначен как (S3) и хорошо представлен на рисунке изоповерхности изобар, причем он практически невыражен для  $n = 10$ .**

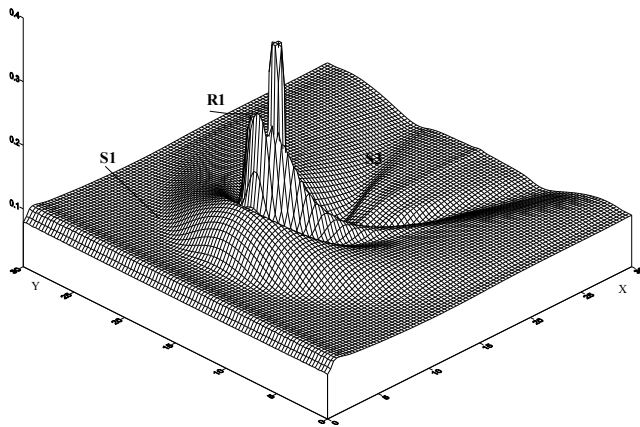
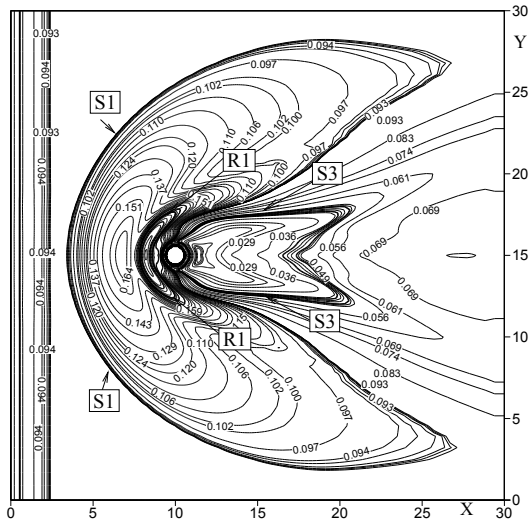
Вышеописанные линии стекания и растекания (S1), (R1) и (S3) хорошо демонстрирует рисунок 4.7 линии тока (а)  $n = 10$  б)  $n = 50$ , сечение  $z = 0.039$ ). Течение вблизи стенки характеризуется четко выраженными границами застойных зон, ограниченными линиями стекания (линия (S1) и (S3)). Линия стекания (S1) - это линия, на которой натекающий поток сталкивается с вихревой зоной перед струей. Линия стекания (S3) представляет собой кривую, где идущие вдоль обтекаемой поверхности потоки встречаются с вихревым следом за струей. Здесь же видна линия (R1) (линия растекания), вследствие того, что поток в области скачка уплотнения (3) растекается по всем направлениям, где большая его часть поворачивает к стенке и проникает в зону обратного отрывного течения, достигнув поверхности стенки, поток растекается в противоположные направления.

Дополнительно, вышеописанное подтверждается картиной распределения местного числа Маха в плоскости  $yx$  (рисунок 4.8, а)  $n = 10$ , б)  $n = 50$  сечение  $z = 0.039$ ) на стенке. Для обоих рассматриваемых случаев картина изомах схожа, хорошо видна граница вдуваемой струи и

сверхзвуковая зона непосредственно вокруг нее, которая возникает в результате ускорения потока в струе. На рисунках показана линия стекания потока на стенке (S1), за которой образуется четко выраженная дозвуковая зона где область самых низких значений Маха.



б)

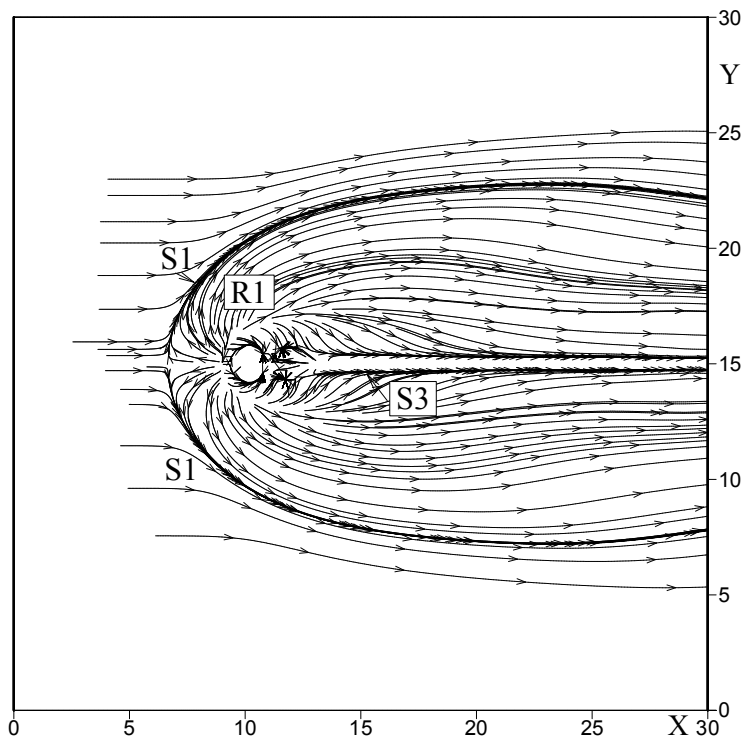


а)  $n=10$ , б)  $n=50$

Рисунок 4.6 - Распределение изобар в плоскости  $ux$   
в сечении  $z = 0.039$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$

a)



б)

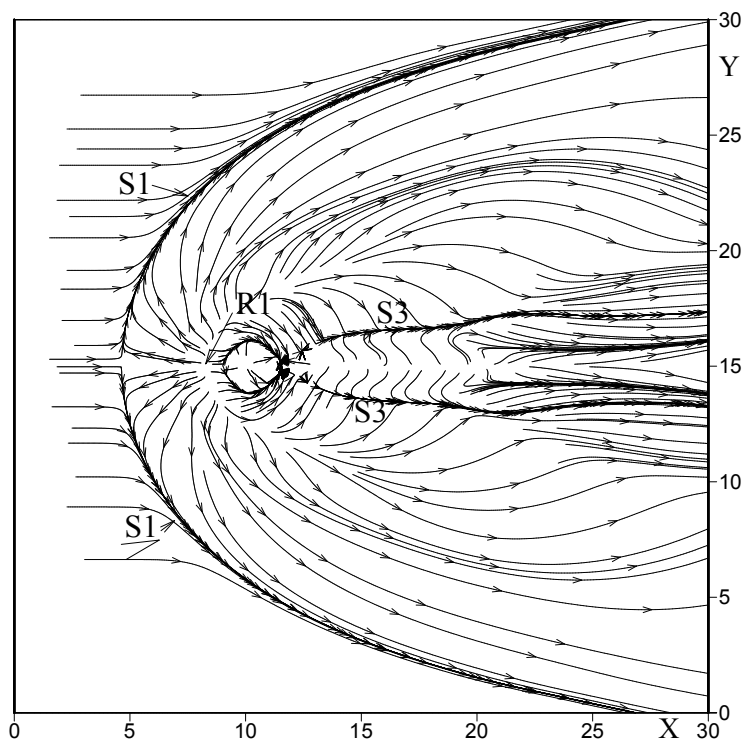
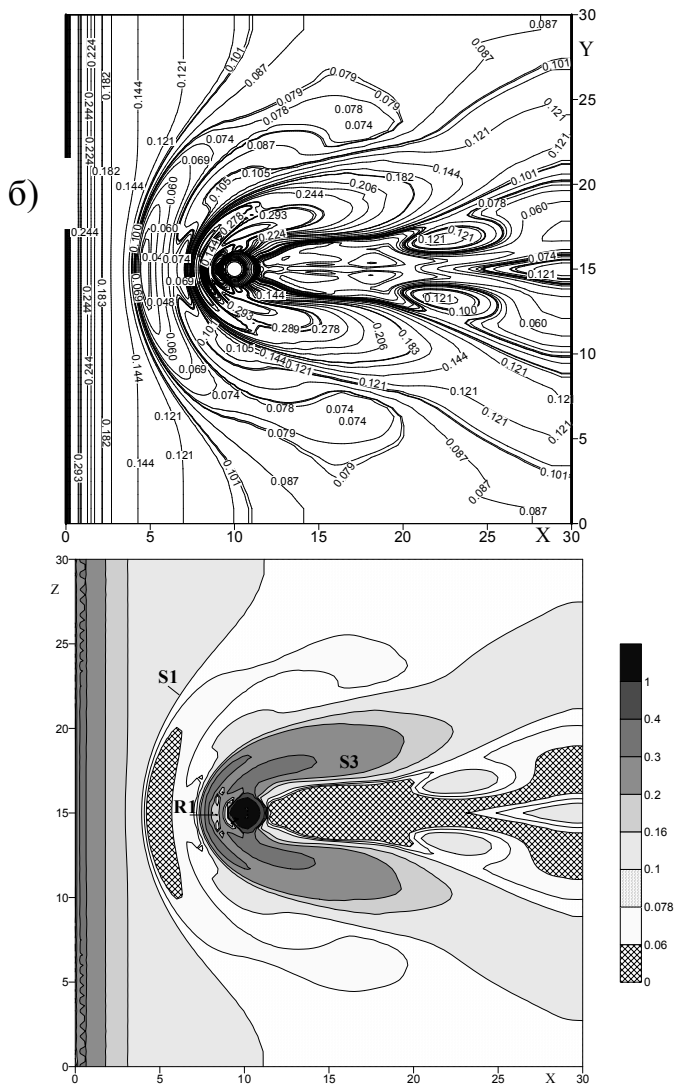


Рисунок 4.7 - Распределение линий тока, а)  $n=10$ , б)  $n=50$  в плоскости  $ux$  в сечении  $z = 0.039$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$







a)  $n=10$ , б)  $n=50$

Рисунок 4.8 - Распределение местного числа Маха в плоскости  $ux$  в сечении  $z = 0.039$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$



а)  $n=10$ , б)  $n=50$

Рисунок 4.9 - Распределение изобар в плоскости  $ux$   
в сечении  $z = 0.988$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$

Также на рисунках можно увидеть линию растекания (R1) расположенную между зонами более высоких значений числа Маха. Также, как и в случае изобар зона взаимодействия в случае нерасчетности 10 намного меньше чем для 50. За струей также существует область самых низких Махов, причем увеличение нерасчетности влияет на рост дозвуковой зоны, а картина течения меняется. Так для  $n = 50$  в область низких значений числа Маха вклиниваются зоны более высоких чисел Маха, что вероятно является следствием излома течения, которое отчетливо можно наблюдать на рисунке 4.7а для  $n = 50$ .

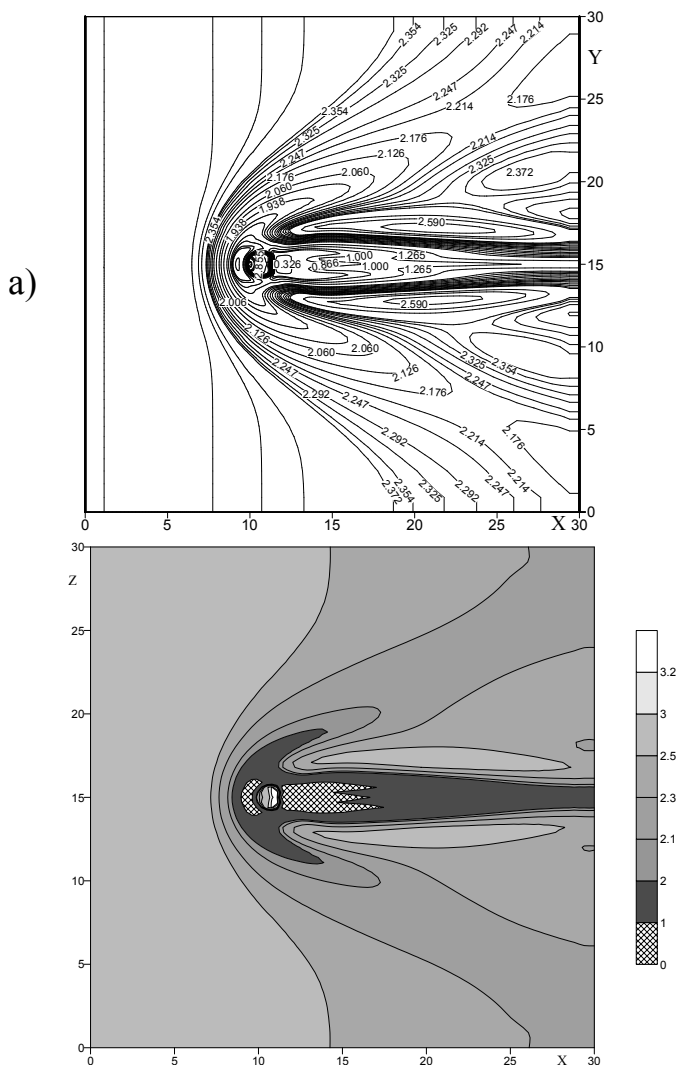
Как видно из вышеприведенных графиков, боковое перетекание струи имеет подковообразную форму, причем такая форма обтекания остается вплоть до высоты перетекания потоком над струей. Дальнейшие результаты течения в плоскости  $xu$  в различных сечениях это наглядно демонстрируют. Так на картине изобар в сечении  $z = 0.988$  (рисунок 4.9, а)  $n = 10$ , б)  $n = 50$ ), для нерасчетности  $n = 10$  замыкающий скачок уплотнения выделен интенсивными линиями в виде полумесяца, в то время как для большей нерасчетности все еще видна линия (R1) а также просматривается граница бочки (B). На этом же уровне из распределения местного числа Маха (рисунок 4.10 а)  $n = 10$ , б)  $n = 50$ ), где течение в натекающем потоке уже сверхзвуковое, можно увидеть, что форма бочкообразной структуры для обеих нерасчетностей имеет округлую форму, причем поток в струе для  $n = 10$  ускоряется до числа Маха равного 3.6, то есть достигает своего максимального значения, в то время как для  $n = 50$  значения числа Маха равны 4.9. За струей имеет место зона торможения, вследствие

существования области разряжения за струей, На картине видно, что для большей нерасчетности дозвуковая зона находится на некотором расстоянии от струи и не столь интенсивна как для  $n = 10$ . Этот факт можно наблюдать на рисунке 4.5, где представлены изомахи на линии симметрии. Здесь видно, что на уровне рассматриваемого сечения  $z = 0.988$  сразу за струей расположена сверхзвуковая зона и имеется небольшой участок дозвуковой зоны.

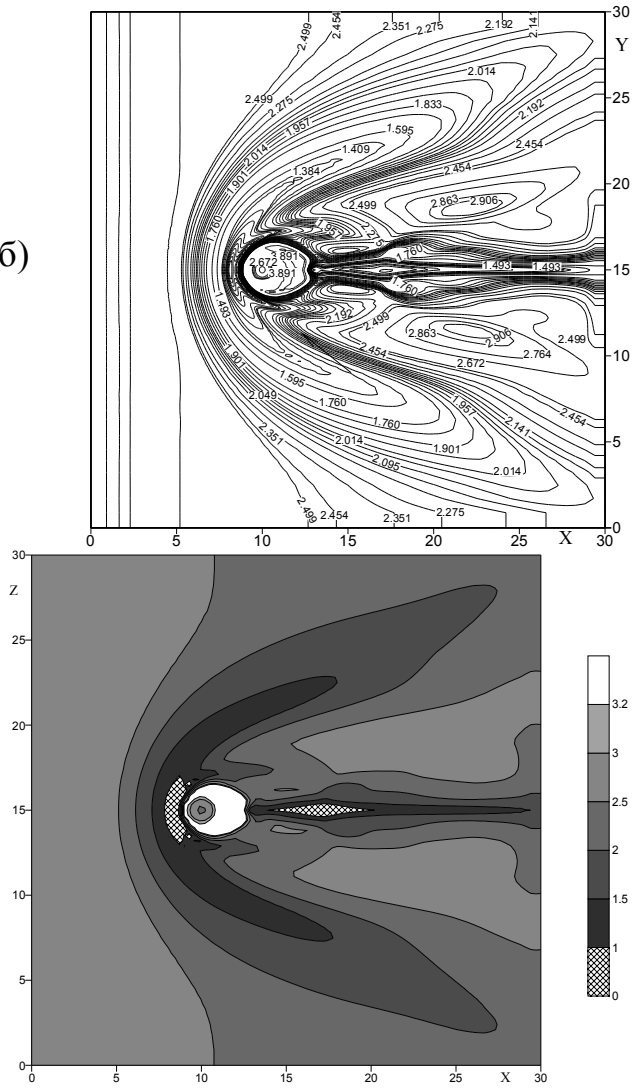
Далее, в сечении  $z = 2.26$  (рисунок 4.11 – поле изобар а)  $n = 10$ , б)  $n = 50$ ), для меньшей нерасчетности головной скачок уплотнения вплотную подходит к зоне замыкающего скачка и сливается с ним, хотя для  $n = 50$  эти скачки находятся на расстоянии и на картине можно наблюдать линии висячего скачка уплотнения в струе (бочки). В это же время из картины распределения местного числа Маха в этом же сечении (рисунок 4.12 а)  $n = 10$ , б)  $n = 50$ ) для  $n = 10$  видно, что бочкообразная структура отсутствует, а для большей нерасчетности бочка становится более продолговатой, что объясняется влиянием бокового перетекания, а поток в струе ускоряется до значений 5.6. На уровне  $z = 3.43$  (рисунок 4.13) поле изобар при  $n = 10$  имеет ярко выраженную клиновидную форму, для  $n = 50$  картина течения становится такой же, как и у  $n = 10$ , однако здесь еще можно наблюдать верхнюю часть бочкообразной структуры, за которой происходит торможение потока. Это можно наблюдать из рисунка 4.14 – распределение местного числа Маха на этой же высоте, где четко прослеживается клиновидная форма скачков уплотнения для обоих случаев.

Глубину проникновения вдуваемой струи и боковое перетекание его потоком наглядно демонстрирует картина поля вектора скорости в плоскостях  $xu$  для нерасчетности  $n = 50$ . Как следует из рисунка 4.15 ( а) линии тока б) вектор скорости, сечение  $z = 0.398$ ), линия стекания (S1) продвинулась по направлению к вдуваемой струе а линия растекания (R1) не просматривается, причем область обтекания струи потоком сужается и линии стекания (S3) вплотную подходят друг к другу. Численные

эксперименты показывают, что при уменьшении степени нерасчетности до  $n = 10$  (рисунок 4.16) в этом сечении линия стекания (S1) вплотную подходит к вдуваемой струе. Для  $n = 50$  аналогичную картину можно наблюдать только в сечении  $z = 0.988$  (рисунок 4.17). На рисунке 4.18 (сечение  $z = 2.26$ ) отчетливо виден только вдув струи и поток за струей, здесь видно, что обтекание потоком сужается до размеров вдуваемой струи. На рисунке 4.19 на уровне  $z = 2.81$  все еще виден вдув струи, причем расчеты показывают, что максимальная глубина проникновения струи составляет 3.4, в то время как для нерасчетности  $n = 10$  глубина составила только 1.8. В дальнейшем, начиная с  $z = 3.43$  (рисунок 4.20), поток полностью проходит над препятствием (струей).



б)

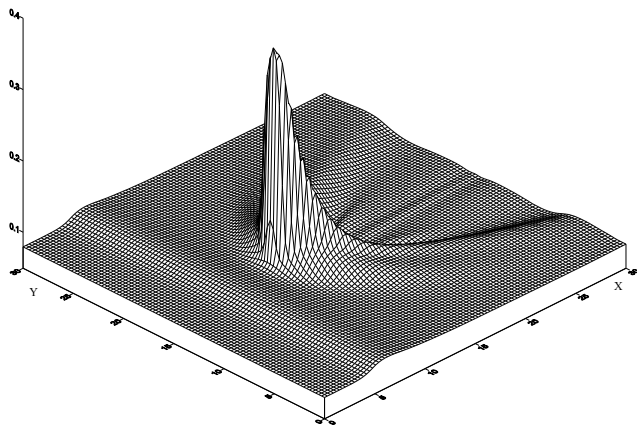
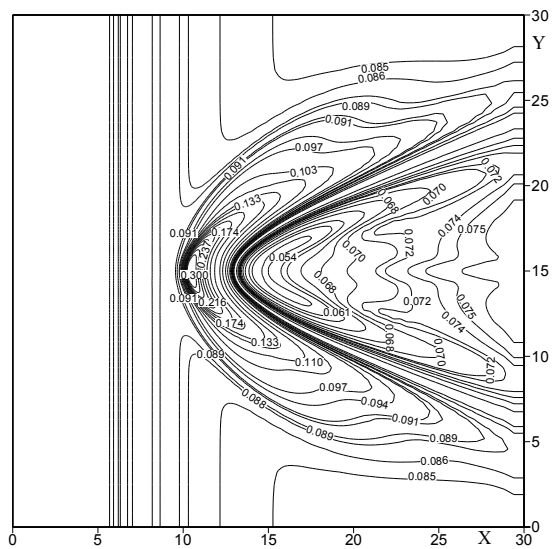


а)  $n=10$ , б)  $n=50$

Рисунок 4.10 - Распределение местного числа Маха в плоскости  $ux$  в сечении  $z = 0.988$

$$\text{Re}=1.87 \cdot 10^7, \text{Pr}=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$

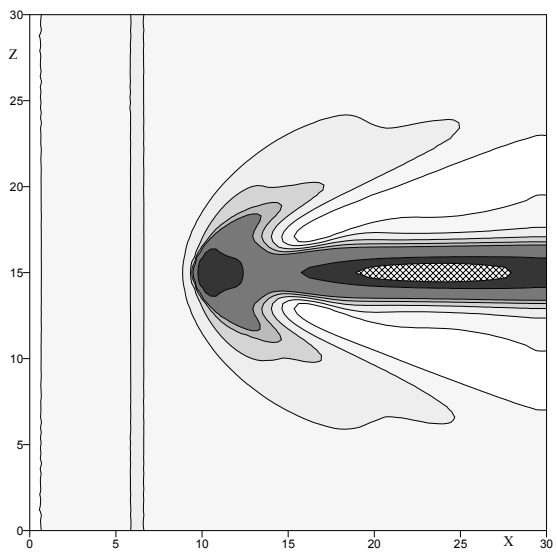
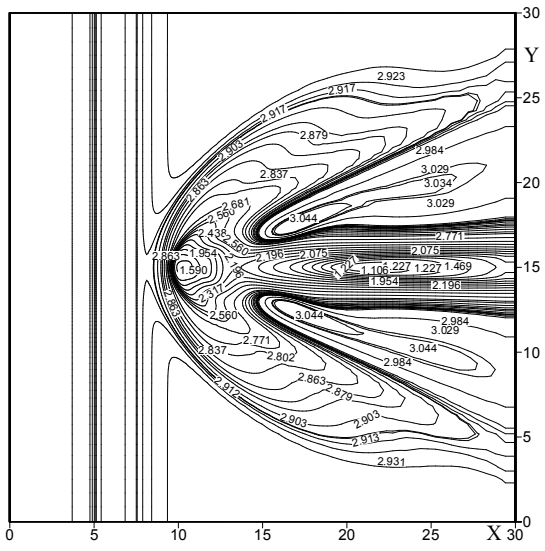
a)



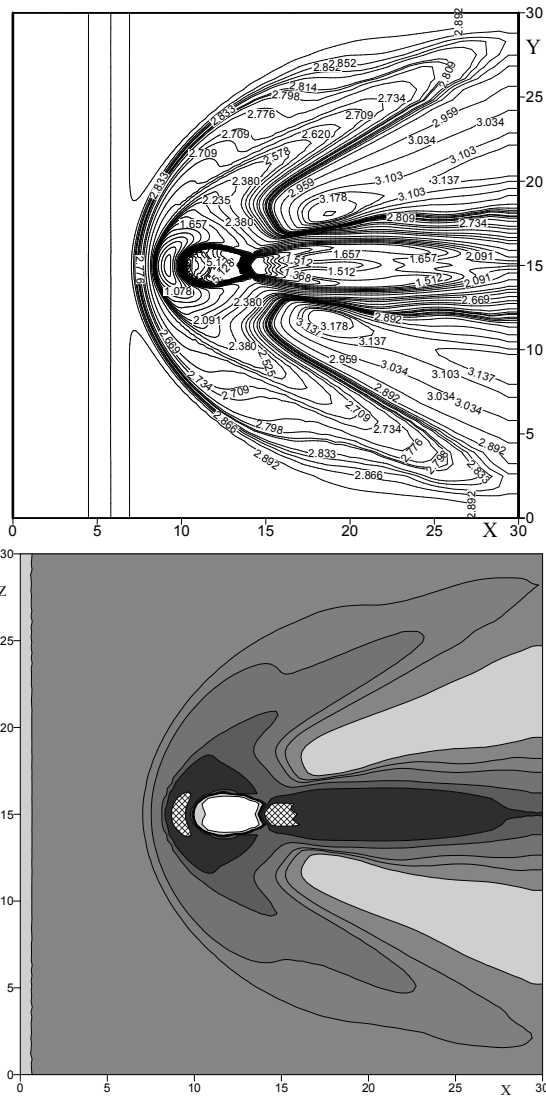




a)



б)

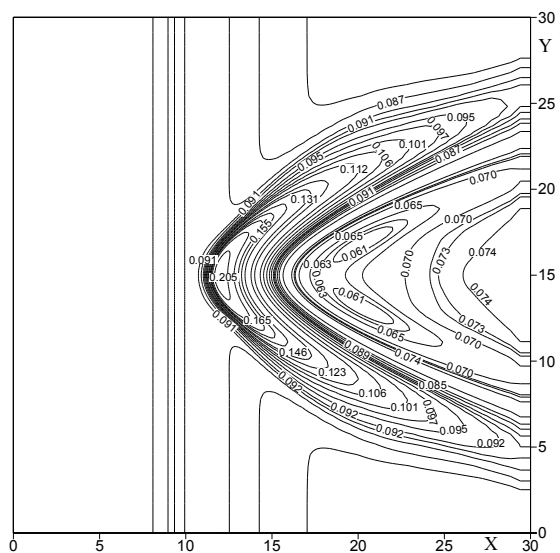


а)  $n=10$ , б)  $n=50$

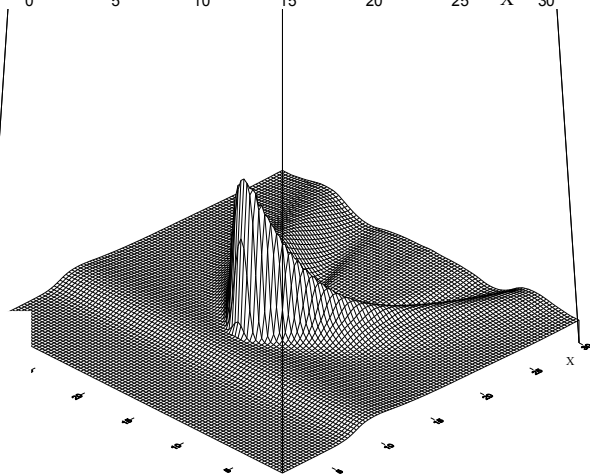
Рисунок 4.12 Распределение местного числа Маха в плоскости  $ux$  в сечении  $z = 2.26$

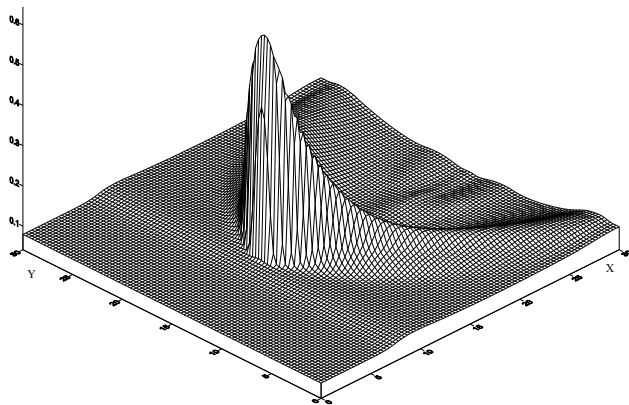
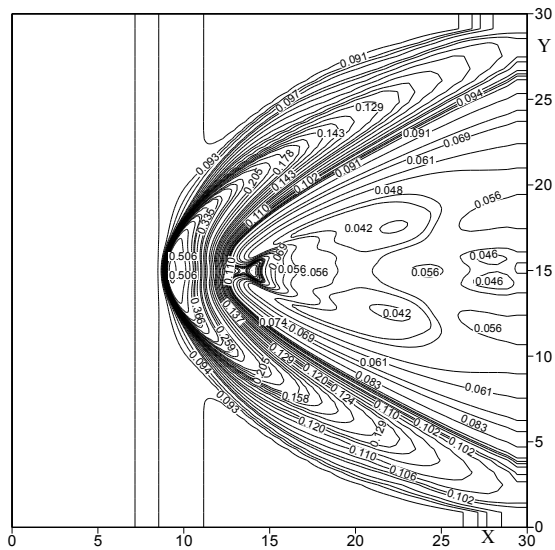
$Re=1.87 \cdot 10^7$ ,  $Pr=0.9$ ,  $M_0=1$ ,  $M_\infty=3$ .

a)



b)



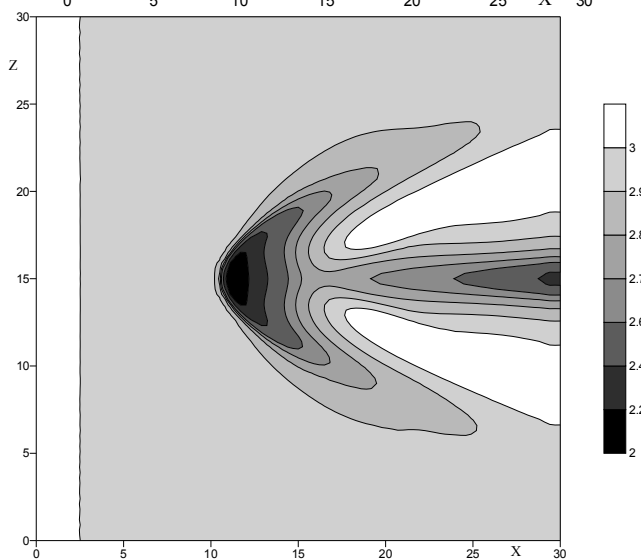
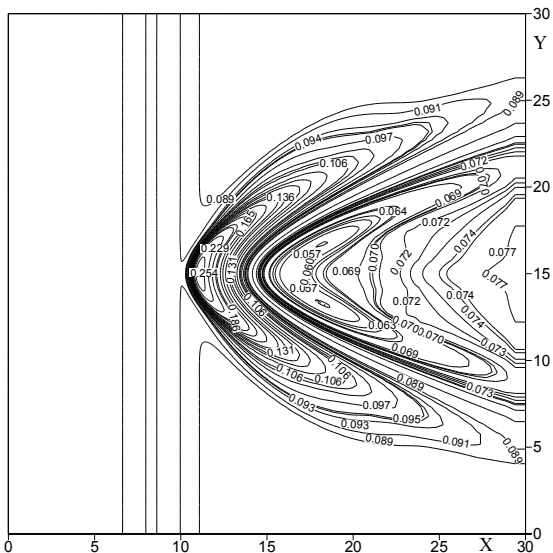


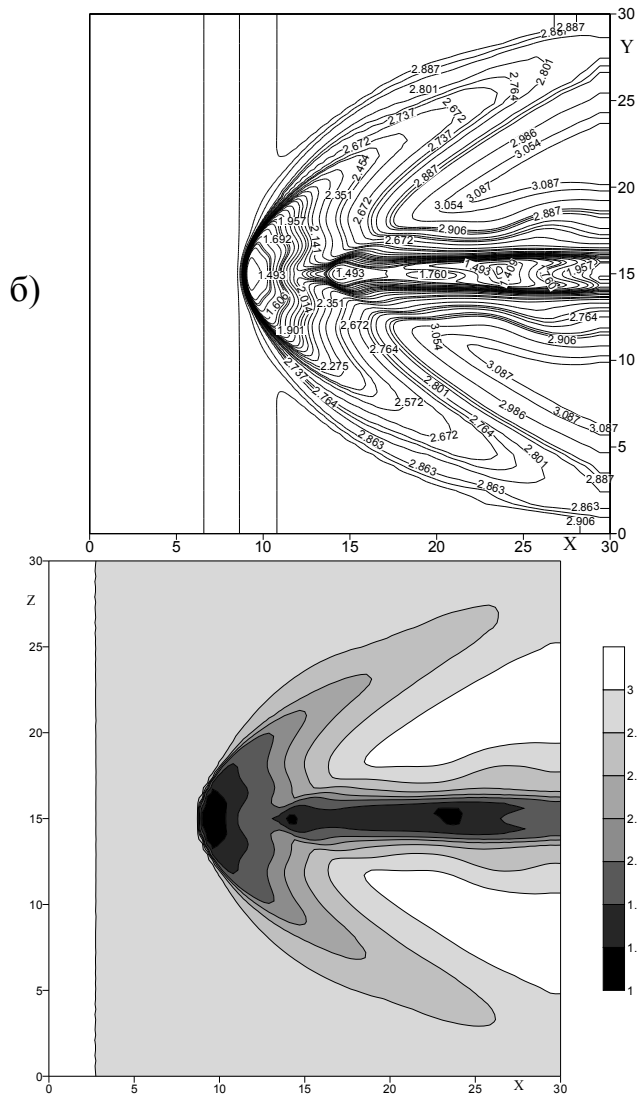
a)  $n=10$ , б)  $n=50$

Рисунок 4.13 - Распределение изобар в плоскости  $ux$   
в сечении  $z = 3.43$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$

a)



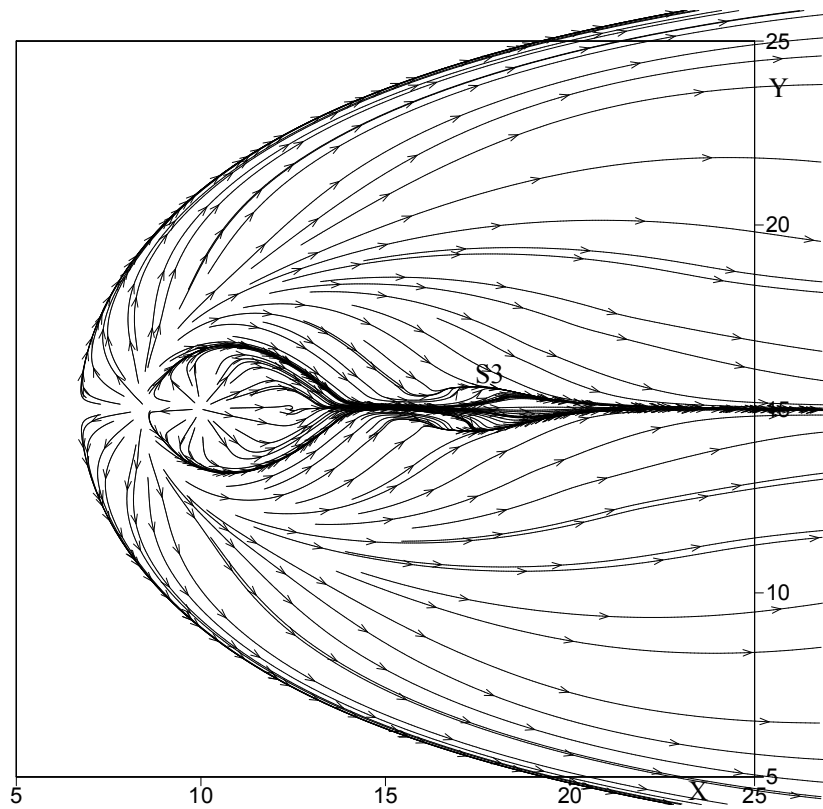


а)  $n=10$ , б)  $n=50$

Рисунок 4.14 Распределение местного числа Маха в плоскости  $xy$  в сечении  $z = 3.43$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3.$$

а)



б)

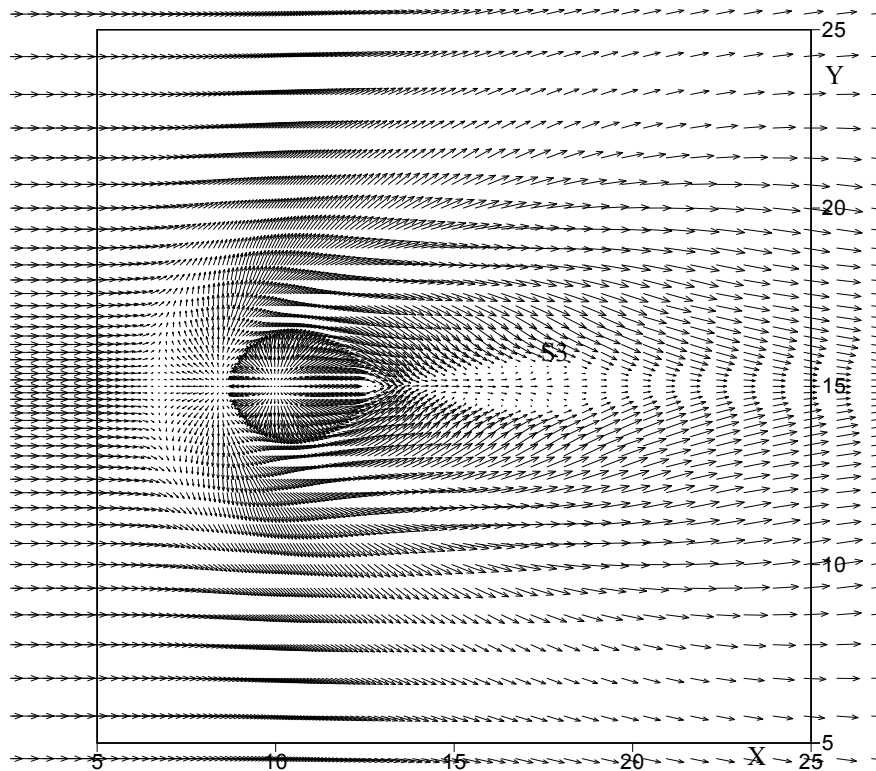
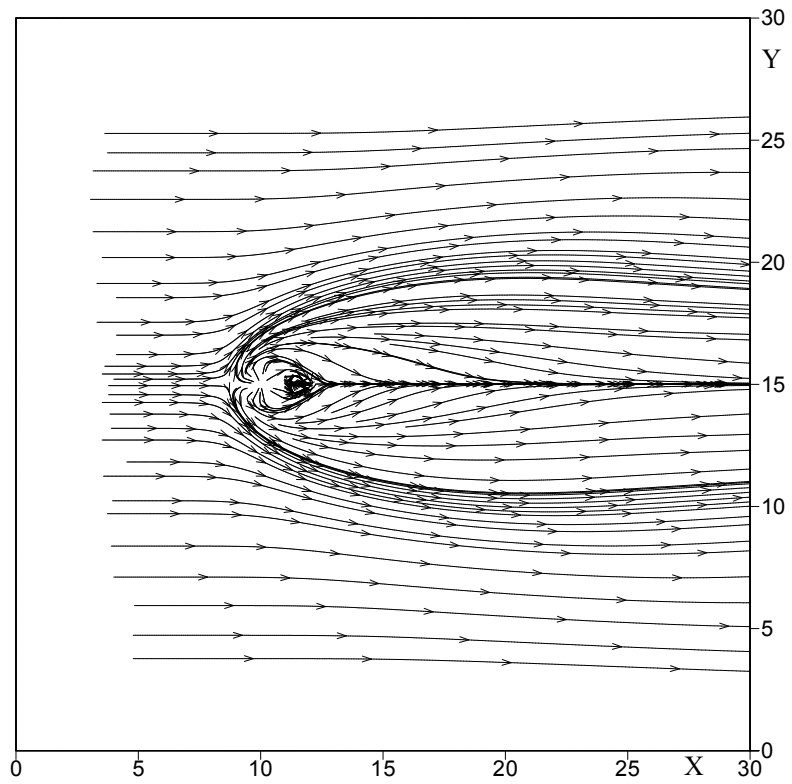


Рисунок 4.15 - Распределение а) линий тока, б) вектора скорости  
в плоскости  $yx$  в сечении  $z = 0.398$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=50$$



а)



б)

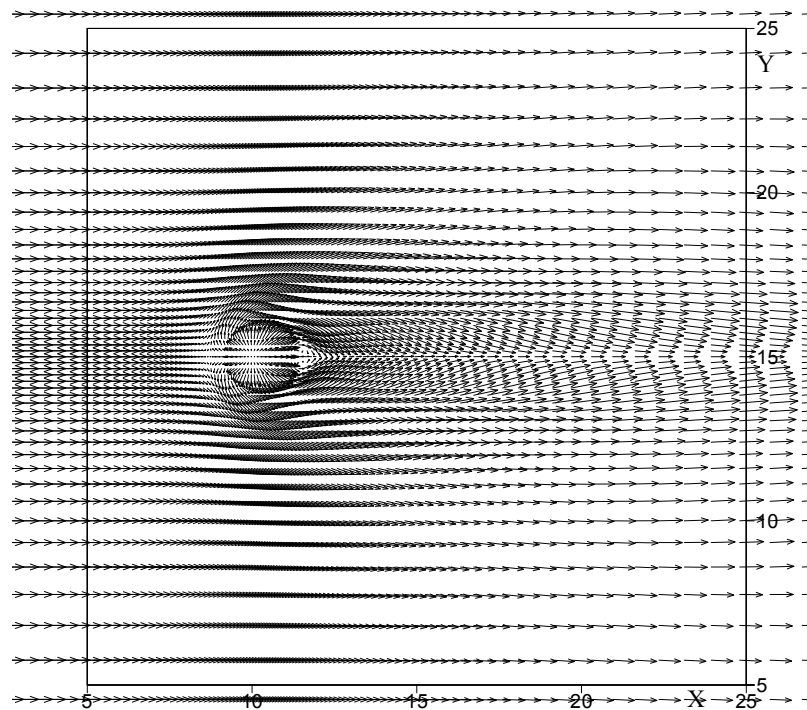
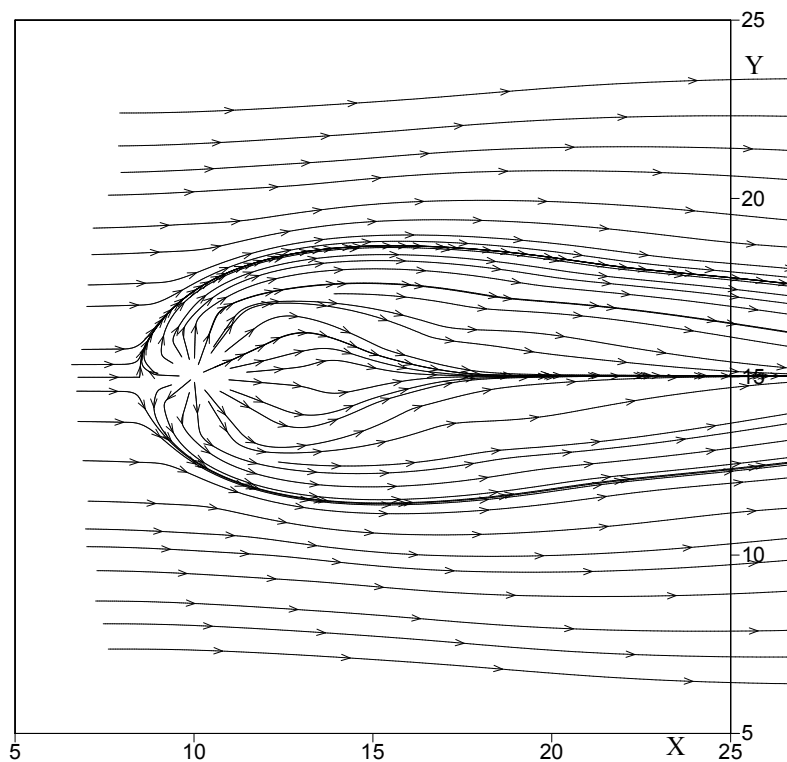


Рисунок 4.16 - Распределение а) линий тока, б) вектора скорости  
в плоскости  $yx$  в сечении  $z = 0.398$

$$\text{Re}=1.87 \cdot 10^7, \text{Pr}=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=10$$

a)



б)

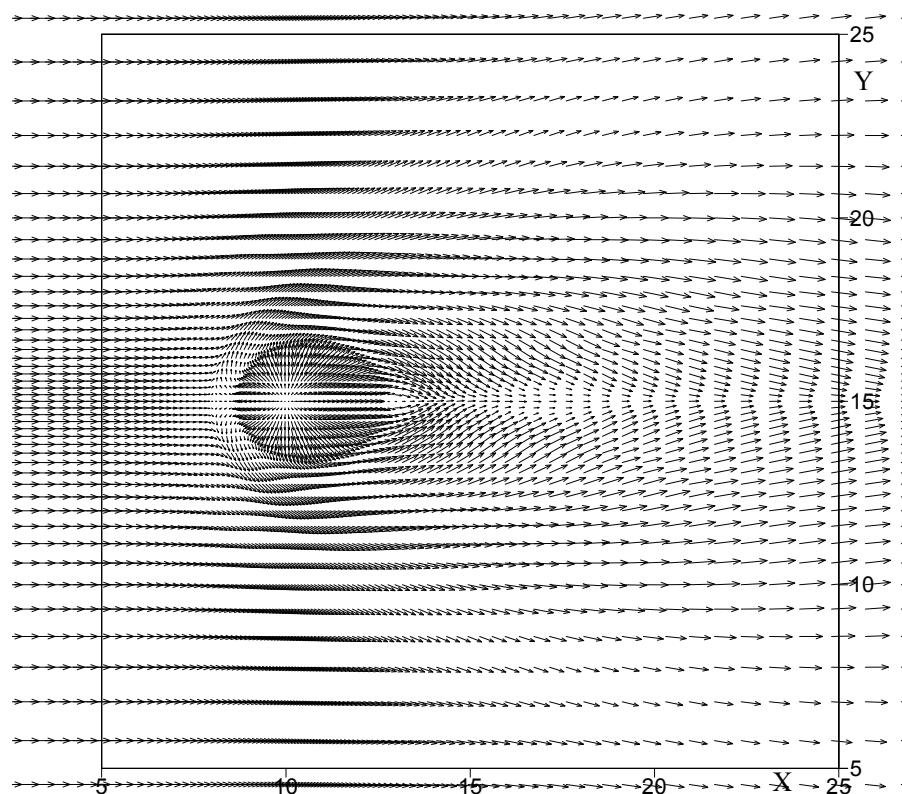
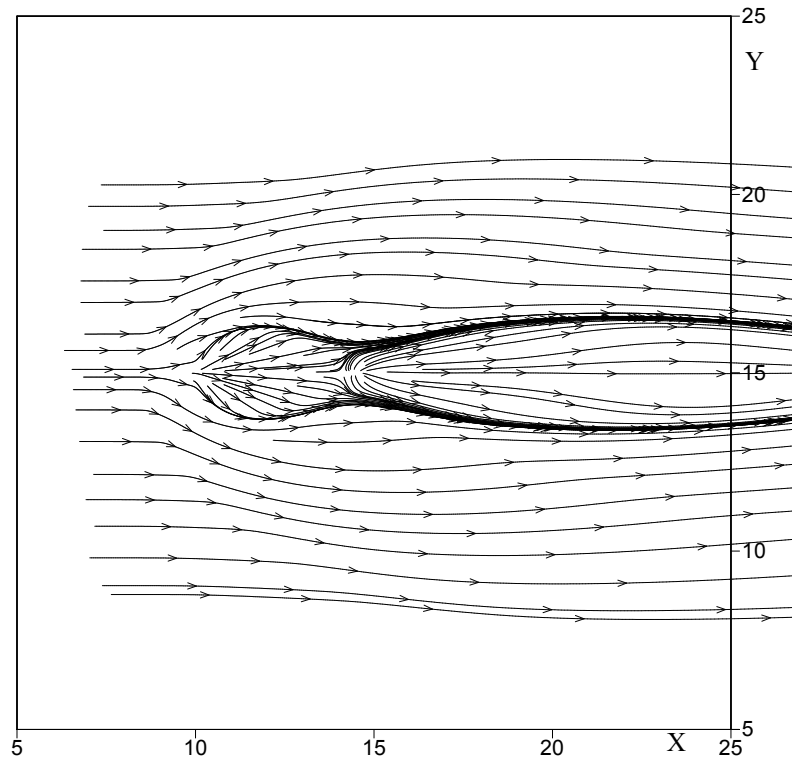


Рисунок 4.17 - Распределение а) линий тока, б) вектора скорости  
в плоскости  $yx$  в сечении  $z = 0.988$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=50$$

a)



б)

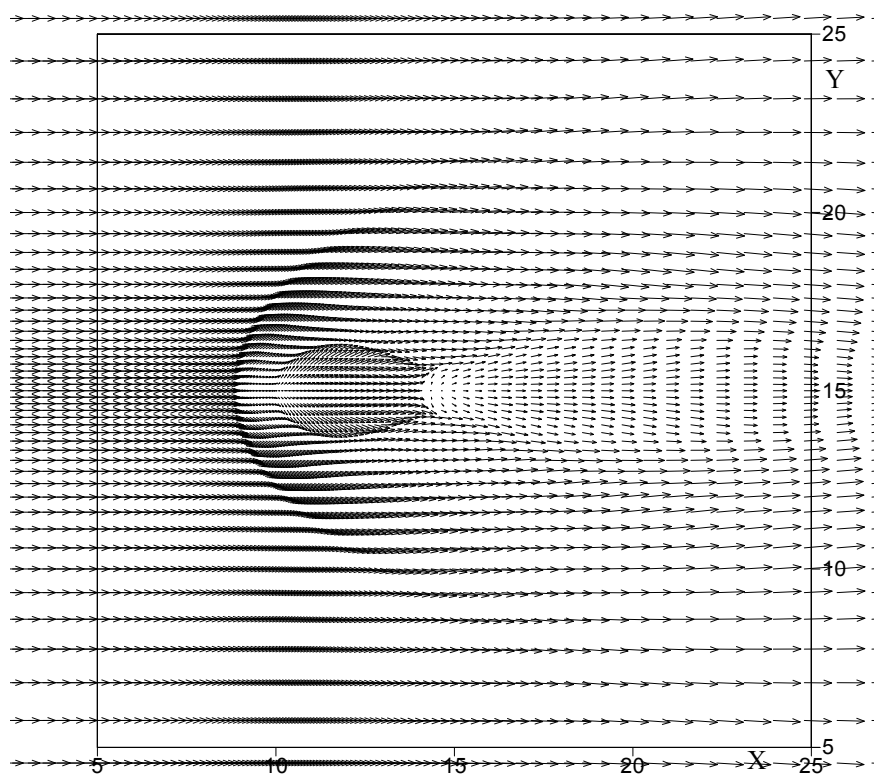
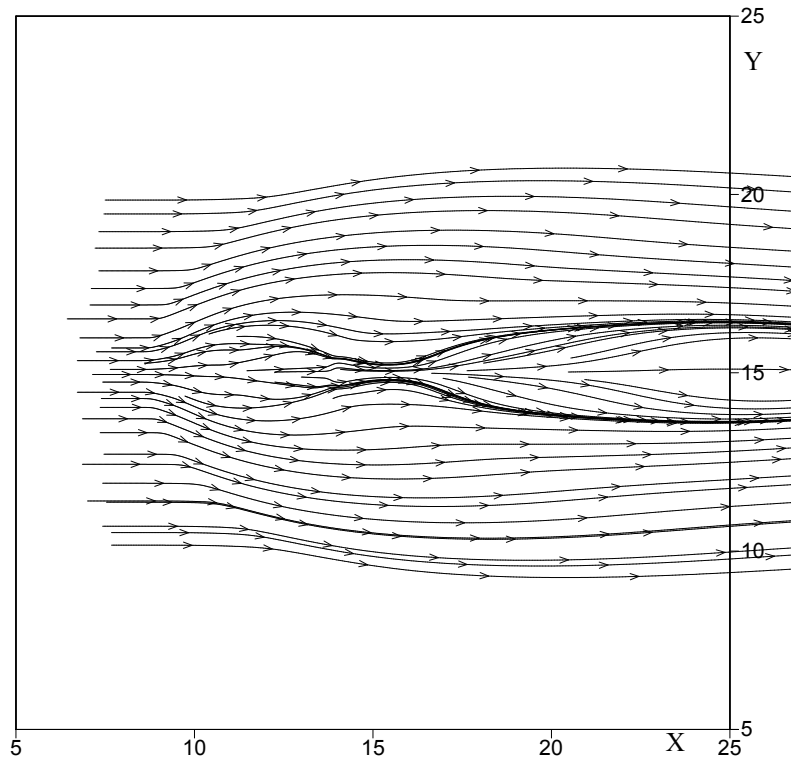


Рисунок 4.18 - Распределение а) линий тока, б) вектора скорости  
в плоскости  $ux$  в сечении  $z = 2.26$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=50$$

a)



б)

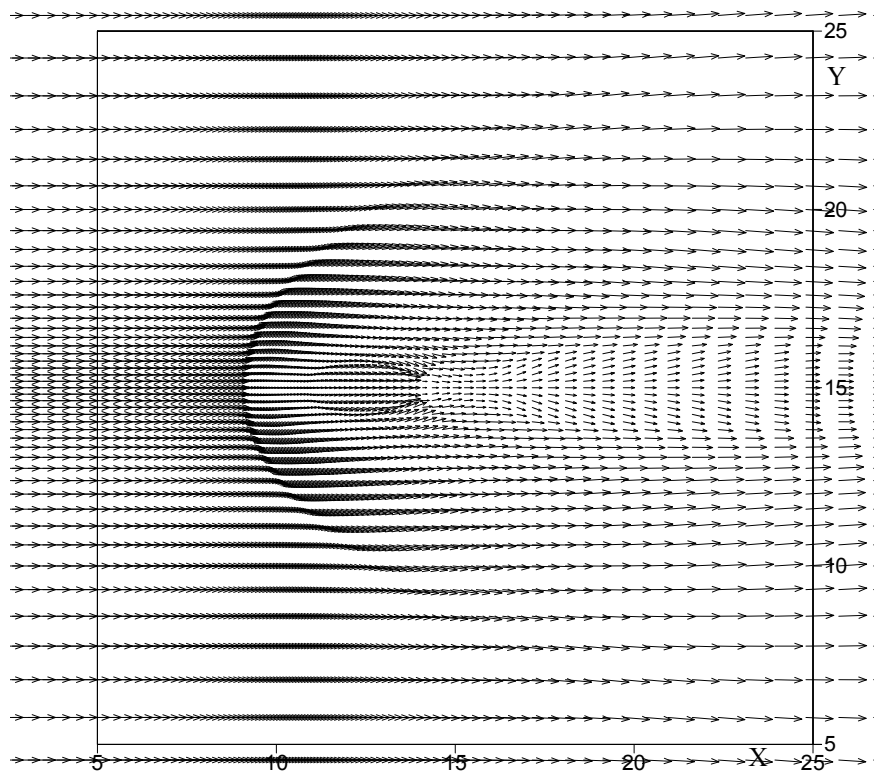
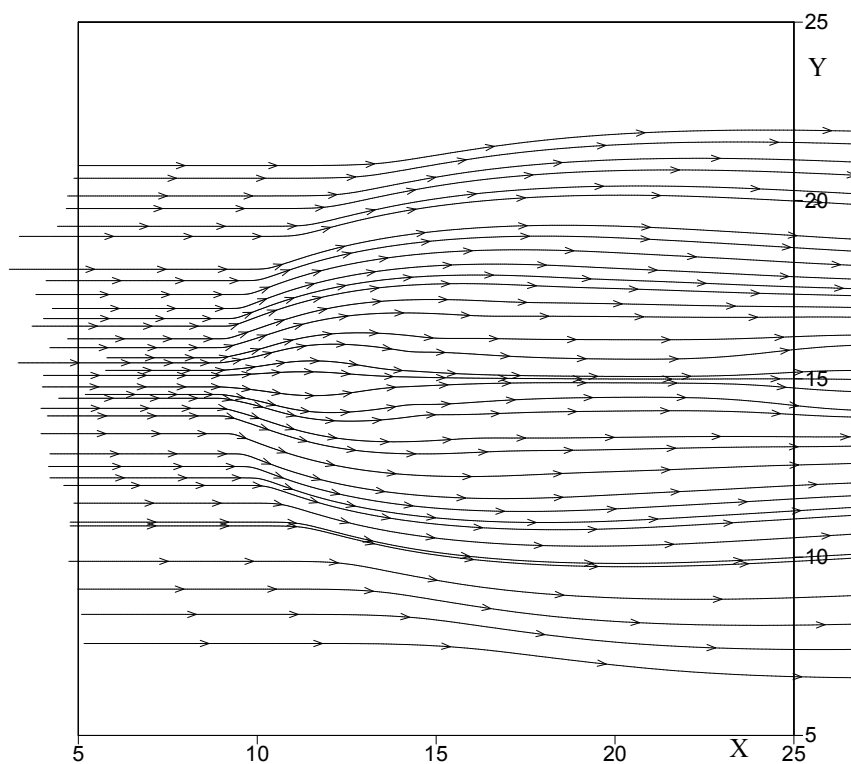


Рисунок 4.19 - Распределение а) линий тока, б) вектора скорости  
в плоскости  $ux$  в сечении  $z = 2.81$

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=50$$

a)



б)

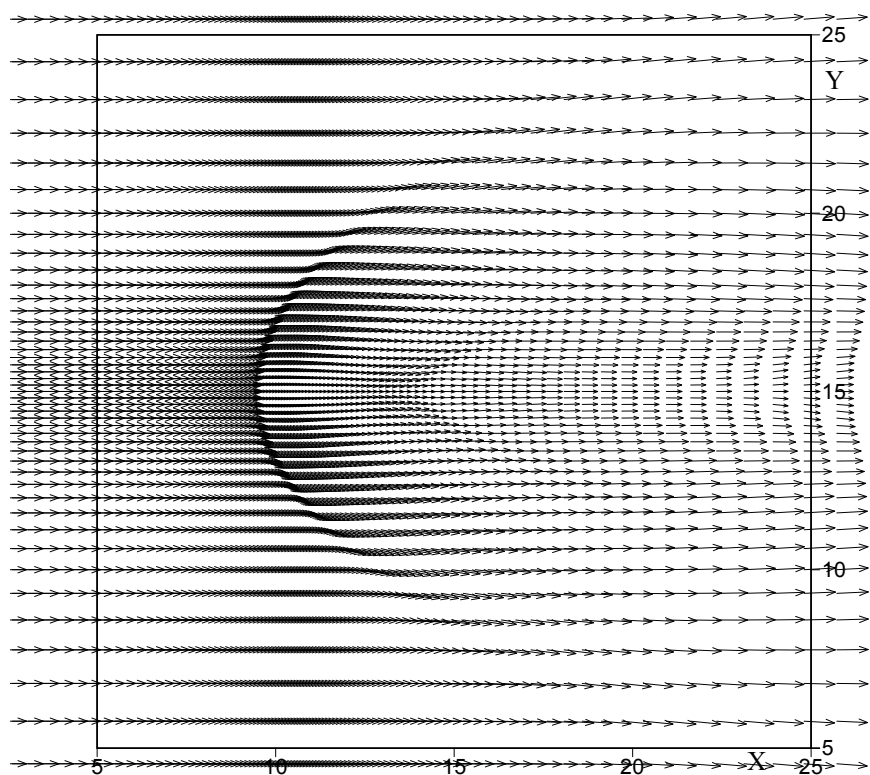


Рисунок 4.20 - Распределение а) линий тока, б) вектора скорости  
в плоскости  $yx$  в сечении  $z = 3.43$

$$\text{Re}=1.87 \cdot 10^7, \text{Pr}=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=50$$

Представленные далее на рисунках 4.21-4.36 численные результаты расчетов для параметре нерасчетности  $n = 50$ ,  $n = 10$  и  $n = 3$ , позволяют изучить вихревые структуры, возникающие как в самой струе, так и в области взаимодействия между струей и набегающим потоком. На графике 4.21, из поля вектора скорости и проекции линий тока на плоскость симметрии, нормальную к оси  $y$  видно, что в зоне, примыкающей к стенке перед струей, формируются два противоположно вращающихся подковообразных вихря в результате отрыва набегающего потока, вызванного  $\lambda$ -образной системой скачков уплотнения. Вихрь (5), примыкающий к струе, вращается против часовой стрелки, а вихрь (4), отстоящий от него, по часовой стрелке, то есть навстречу набегающему потоку, в результате чего образуются линии стекания и растекания потоков [2]. Эти вихри хорошо изучены и изложены многими исследователями в частности авторами, и приведены в работах [1-6]. Концы вихрей простираются по обе стороны струи и на некотором расстоянии от нее по направлению течения вырождаются и сносятся потоком. Здесь для рассматриваемого случая получено, что данные вихри в основном локализованы в передней части струи и практически не распространяются по бокам, поэтому ярко-выраженной подковообразной структуры (7) за вдувом струи, представленной на схеме 4.1б, не наблюдается.

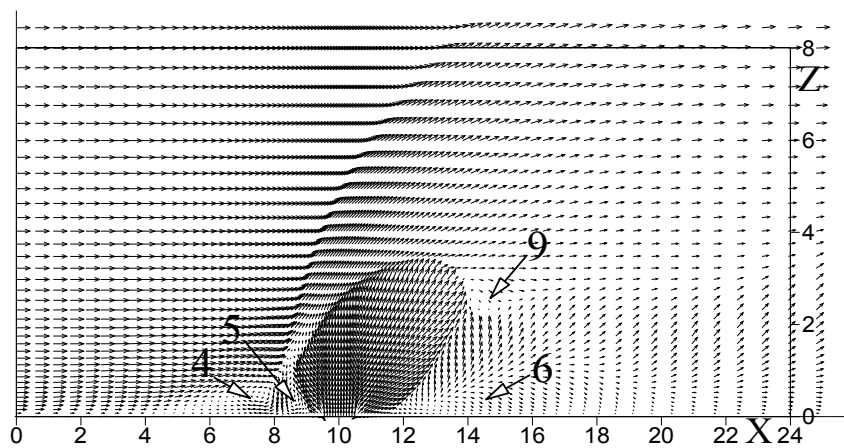
Пара вихрей, возникающая по бокам за вдуваемой струей (вихрь (8), рисунок 4.1б) генерируются вихрем (5). Так, в зоне перед струей, т.е на расстоянии  $x=9.1$  калибров от начала расчетной области (рисунок 4.22 – результаты поля вектора скорости и проекции линий тока на плоскость  $zy$ , нормальную к оси  $x$ ), хорошо видны боковые вихри (8). Численные результаты показывают, что эти вихри, с центрами вращения в слое смешения струи и потока, обтекая струю, увеличиваются в размерах по мере продвижения вниз по потоку. Рост размеров этих вихрей обусловлен прежде

всего тем, что он сосредоточен в зоне, примыкающей к стенке, и соответственно рост пограничного слоя приводит к его увеличению.

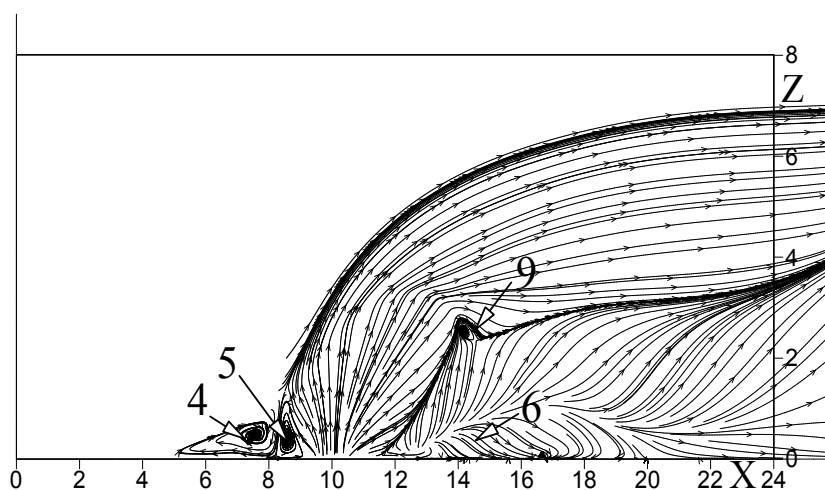
Максимальные размеры бокового вихря наблюдаются в сечении  $x = 11.40$  и представлены на графике 4.23 (а) поле вектора скорости). Ядро вихря расположено около острого угла бочкообразной структуры, возникающей в струе, который можно наблюдать из рисунков 4.23б, где представлено распределение местного числа Маха и проекции линий тока в этом же сечении. Здесь четко прослеживается, что центр вращения вихря находится у боковой острой кромки бочки. Из численных экспериментов следует, что в сечении  $x=13.5$  наблюдается уменьшение интенсивности вихря (8), а также окончание бочкообразной структуры в струе.

Далее, в сечении  $x = 14.70$ , на рисунке 4.24 (а) вектор скорости, б) изомахи и линии тока), показано возникновение вихря (9), который формируется у основания диска Маха и вносит основной вклад в смещение струи и потока. Из графика следует, что эта пара вихрей появляется за диском Маха в результате взаимодействия струи и восходящего потока под струей. На рисунке 4.24б показано, что в точке зарождения вихря поток является дозвуковым. Также на графике 4.24а можно наблюдать вихревой след вблизи стенки, состоящий из симметрично вращающихся вихрей (6).

Как было указано выше, часть вихря (5) порождает боковую вихревую систему (8), и, как следует из графика, оставшаяся его часть, примыкающая к струе, формирует вихревой след (6). Возникновение (6) связано с тем, что непосредственно за струей у стенки образуется область пониженного давления, куда и устремляется натекающий поток. Существование обширных дозвуковых зон за диском Маха и непосредственно за струей у стенки достаточно хорошо иллюстрирует картина местного числа Маха в плоскости симметрии, представленная на рисунке 4.5.



a)  
y=15



б)  
y=15

Рисунок 4.21 - а) Поле вектора скорости, б) линии тока в плоскости



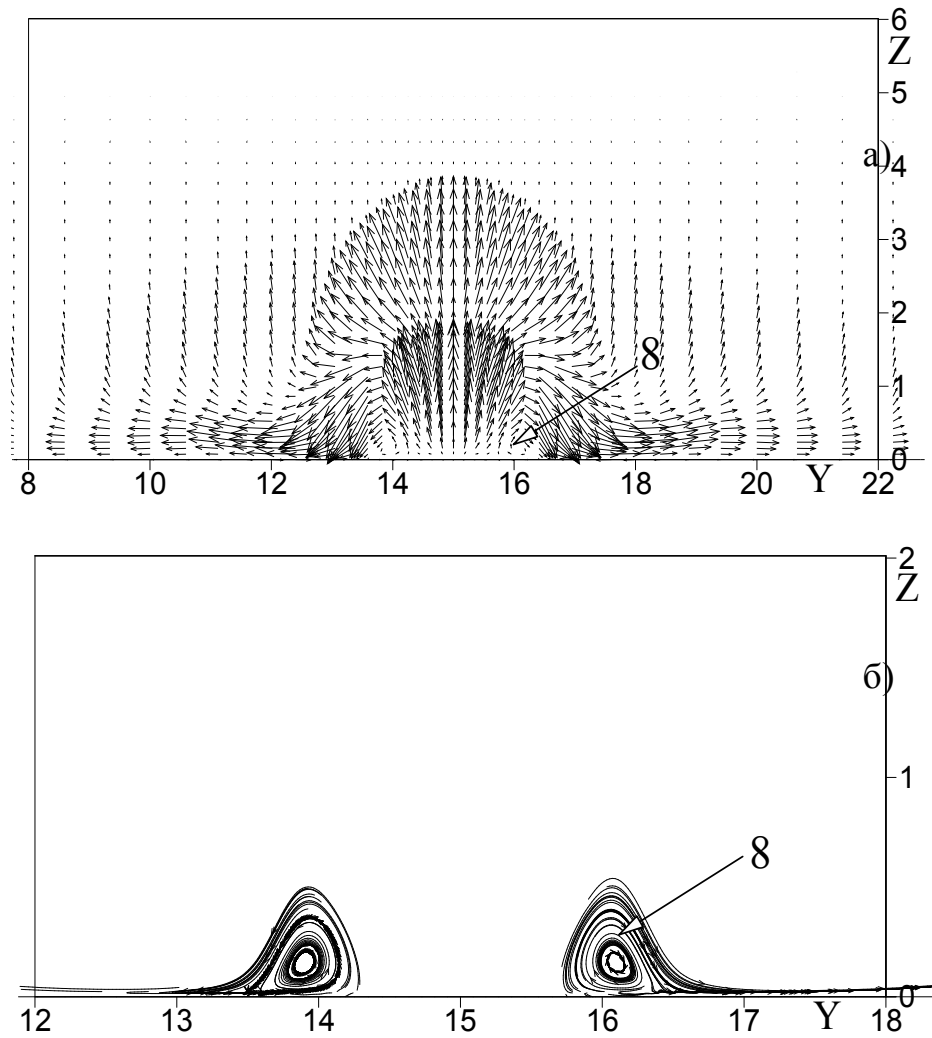
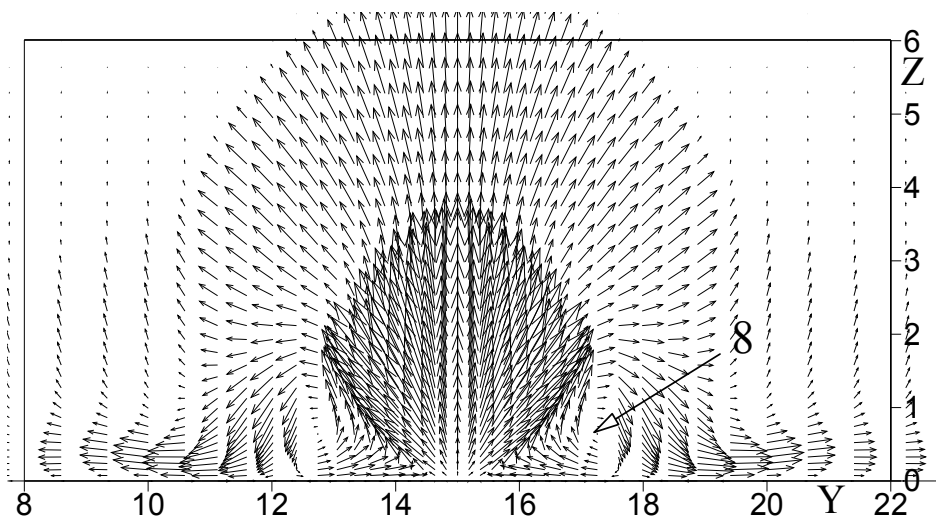
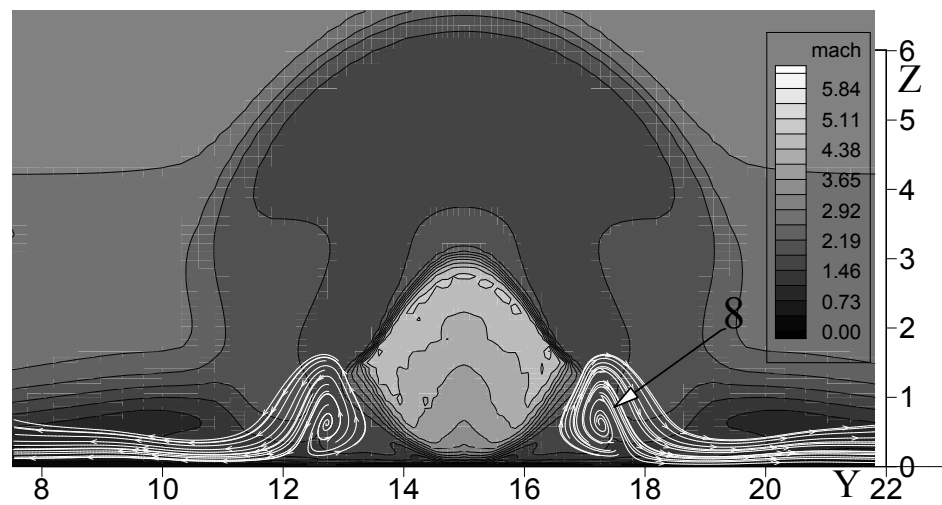


Рисунок 4.22 а) Поле вектора скорости, б) проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=9.1$ .

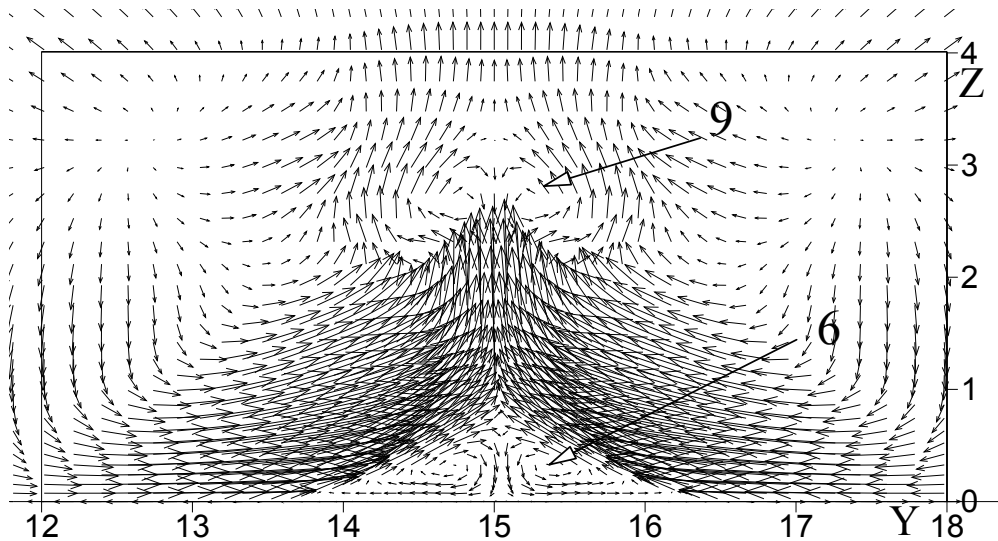


a

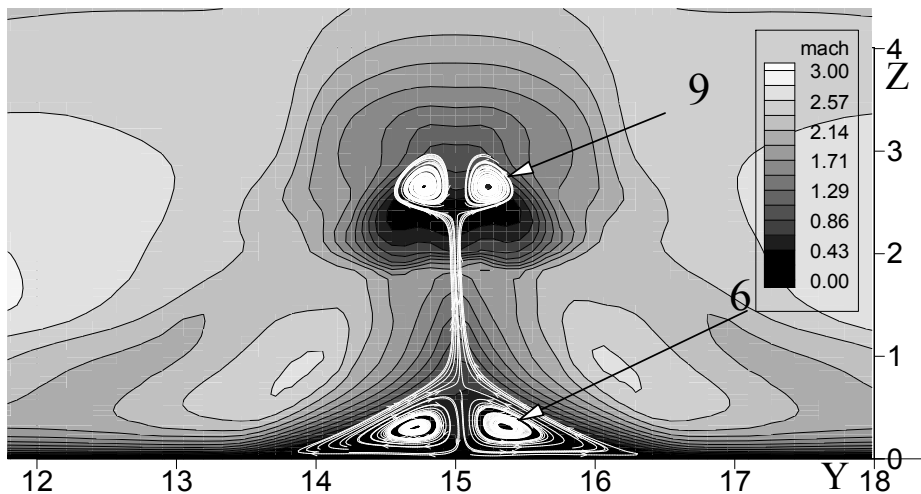


б)

Рисунок 4.23 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=11.4$ .



a)



б)

Рисунок 4.24 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=14.7$ .

На рисунке 4.25, на расстоянии  $x = 15.80$ , представлена картина вихревой системы, уже состоящая из двух пар вращающихся в противоположных направлениях вихрей (8) и (9). Численные результаты показывают что вихрь (8) по мере продвижения его вниз по потоку теряет интенсивность, поэтому он не просматривается в сечениях от  $x=14.1$  до  $x=15.4$ . По всей видимости, дальнейшая интенсификация этого вихря связана с взаимодействием натекающего потока и вдуваемой струи. Здесь же на графике виден вихрь (6), который существенно увеличился в размерах. Из эксперимента следует, что в сечении  $x = 18$  две пары вихрей (8) и (9) сливаются в один вихрь, его направление вращения совпадает с вращением вихря (8) и он просматривается вплоть до конца расчетной области.

В сечении  $x=18.9$  (рисунок 4.26 из распределения проекций линий тока на плоскость  $zy$  и рисунок 4.27 ( а) из изолиний продольной составляющей скорости, б) - из изолиний поперечной составляющей скорости  $v$ , в) из изолиний поперечной составляющей скорости  $w$ )) можно наблюдать вихрь (10), который формируется в результате взаимодействия струи и высокоскоростного натекающего потока, проходящего над бочкообразной структурой. Данный вихрь был впервые численно обнаружен и представлен в работе [128]. Результаты показывают, что вихрь (10) двигается вертикально вдоль линии симметрии и на достаточном расстоянии от поверхности пластины. По всей видимости, появление вихря (10) зависит от интенсивности смещения струи и потока, поскольку ранние численные эксперименты, проведенные с меньшими нерасчетностями, не выявили наличие этой пары вихрей. При сравнении вихревой структуры (8) в сечениях  $x = 18$  и  $x=18.9$  можно наблюдать, что центр вращения сместился к стенке. Это факт можно объяснить тем, что на данном уровне происходит прилипание струи к плоскости пластины, в результате чего формируется новая пара вихрей вблизи стенки, обозначенная как (11) (рисунок 4.27).

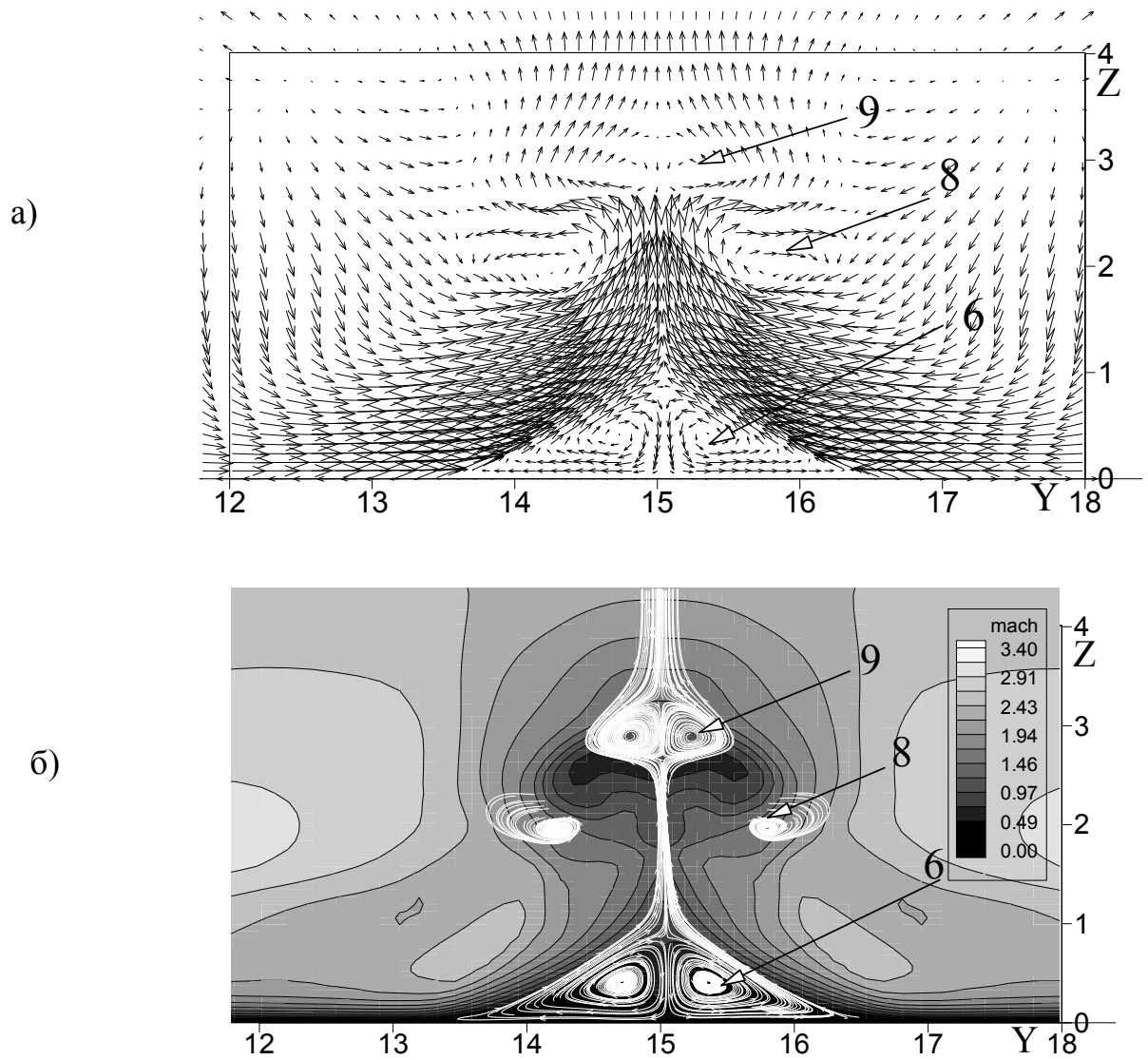


Рисунок 4.25 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=15.8$ .

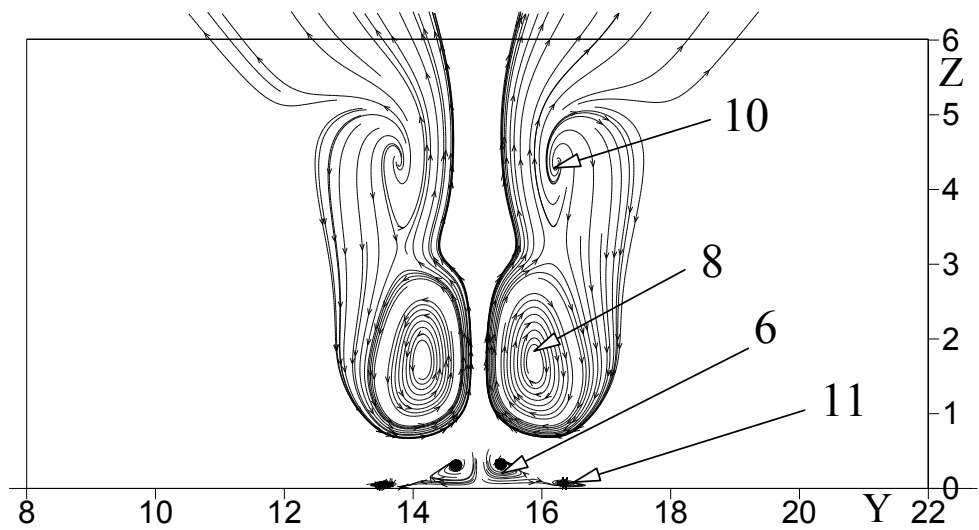


Рисунок 4.26 проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=18.9$ .

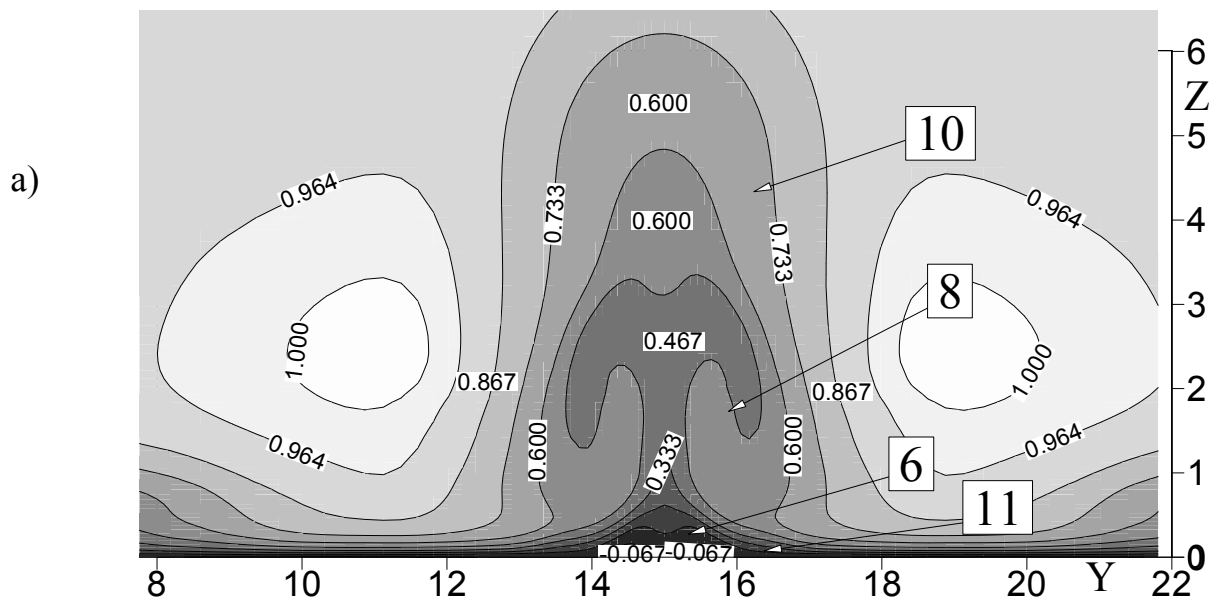
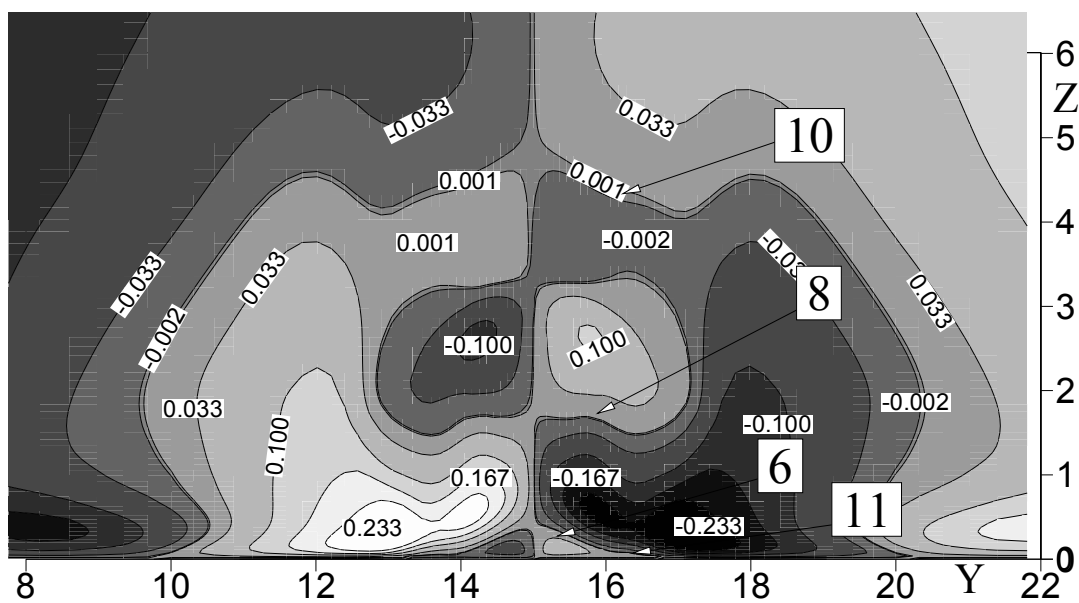


Рисунок 4.27 а) Изолинии продольной составляющей скорости, б) изолинии поперечной составляющей скорости  $v$ , в) изолинии поперечной составляющей скорости  $w$  сечение  $x=18.9$ . (лист 1)

б)



в)

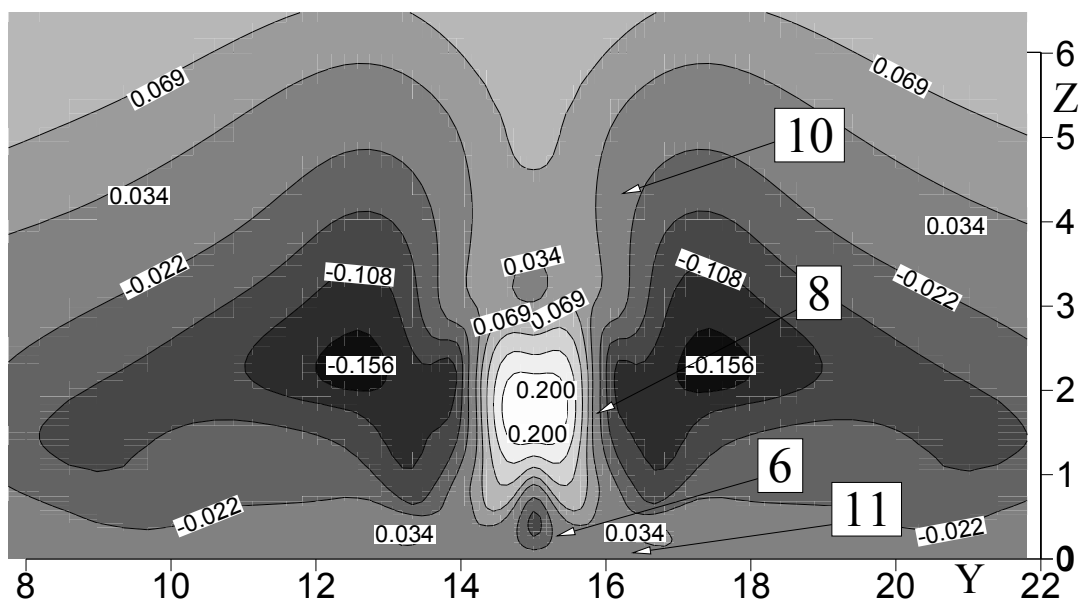


Рисунок 4.27 а) Изолинии продольной составляющей скорости, б) изолинии поперечной составляющей скорости  $v$ , в) изолинии поперечной составляющей скорости  $w$  сечение  $x=18.9$ . (лист 2)

Тем самым подтверждается предположение, сделанное в работе [2], о том, что, вероятно, между струей и областью ее прилипания к стенке существует своего рода каверна, в которой возможно появление двух вихрей с противоположным направлением вращения. И, как следует из рисунка, направление вращения вихря (11) совпадает с вращением следа (6).

На расстоянии  $x=20.6$  (рисунок 4.28) видно, что пара вихрей (11) сместилась от линии симметрии и стала более интенсивной. Так же на этом рисунке показаны вихри (8) и (10). В сечении  $x=24$  (рисунок 4.29) хорошо просматривается вихрь (11), здесь он находится на значительном расстоянии от линии симметрии, а вихрь (10) уже не наблюдается. Численные эксперименты показывают, что при  $x=28$  (рисунок 4.30) вихри (11) и (6) объединяются.

Далее выполнены численные эксперименты с нерасчетностями  $n=10$  и  $n=3$ . Ранние исследования авторов, в деталях изложенные в [134], показали возникновение парной вихревой структуры за струей при малых числах нерасчетностей, которые совпадают с результатами численных экспериментов при  $n \leq 10$ . При параметре  $n=10$  и больше, картина вихревой структуры уже начинается изменяться. Так численный эксперимент показал, что при  $n=10$  вихревая структура почти аналогична случаю с нерасчетностью 50, но в отличие от него здесь не формируются верхний вихрь (10) и вихрь (11), это связано с тем, что при меньших нерасчетностях интенсивность смещения струи и потока уменьшается, что и приводит к невозможности определить эти завихренности, а оставшиеся вихри (6),(8),(9) формируются и представлены на рисунке 4.31-4.36. Так на графике 4.31 (а) вектор скорости, б) распределение местного числа Маха и линии тока) в сечении  $x=10.90$  представлено поле вектора скорости, здесь видно что при уменьшении параметра нерасчетности боковой вихрь (8) существенно уменьшается как в размерах так и по высоте. Данный факт можно объяснить уменьшением бочкообразной структуры, возникающей в самой струе,



сравнение размеров бочек можно наблюдать на рисунке 4.4 и 4.5  
распределения местного числа Маха.

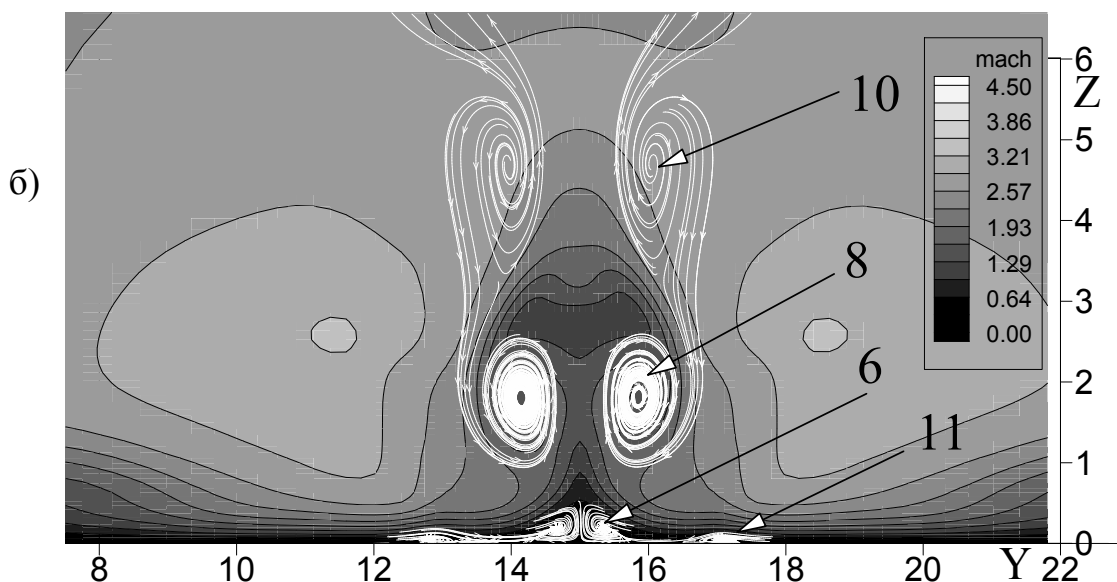
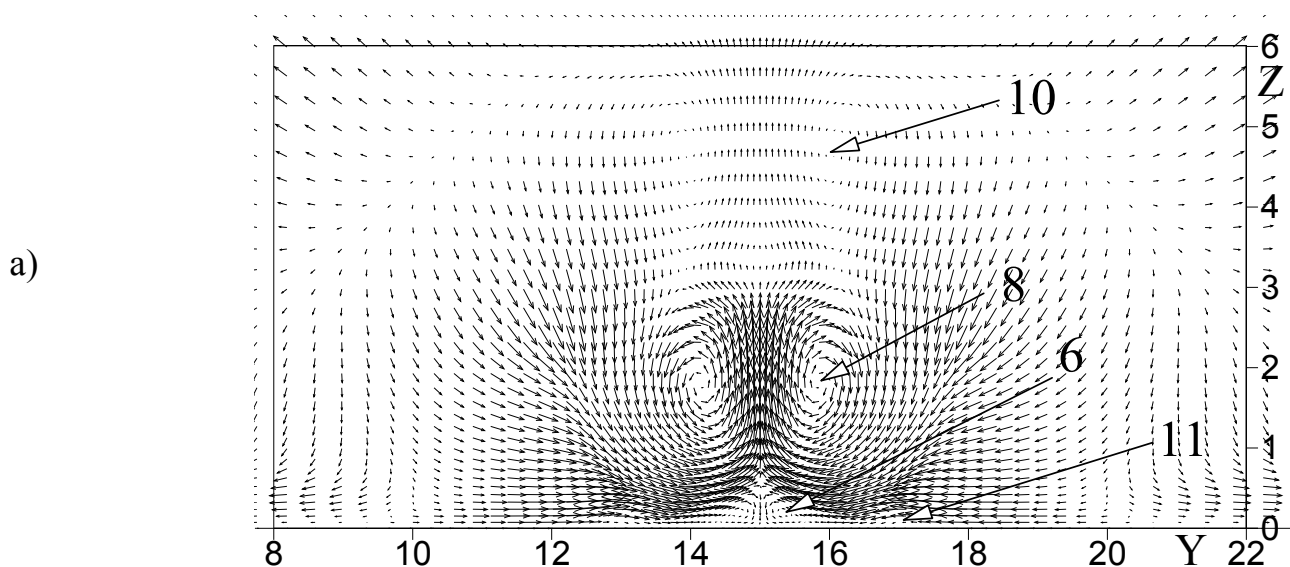
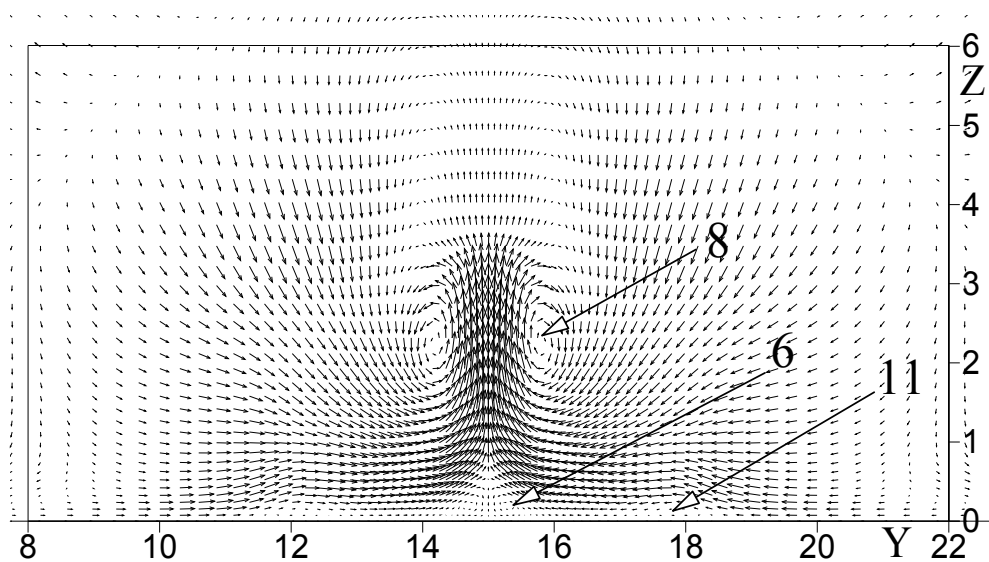


Рисунок 4.28 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного  
числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в  
плоскости  $zy$ , сечение  $x=20.6$ .

a)



b)

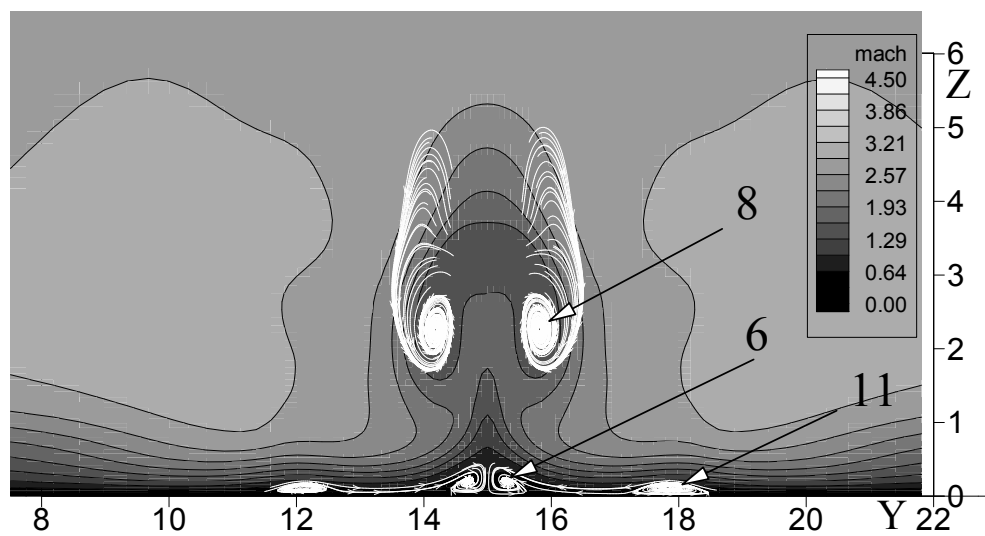
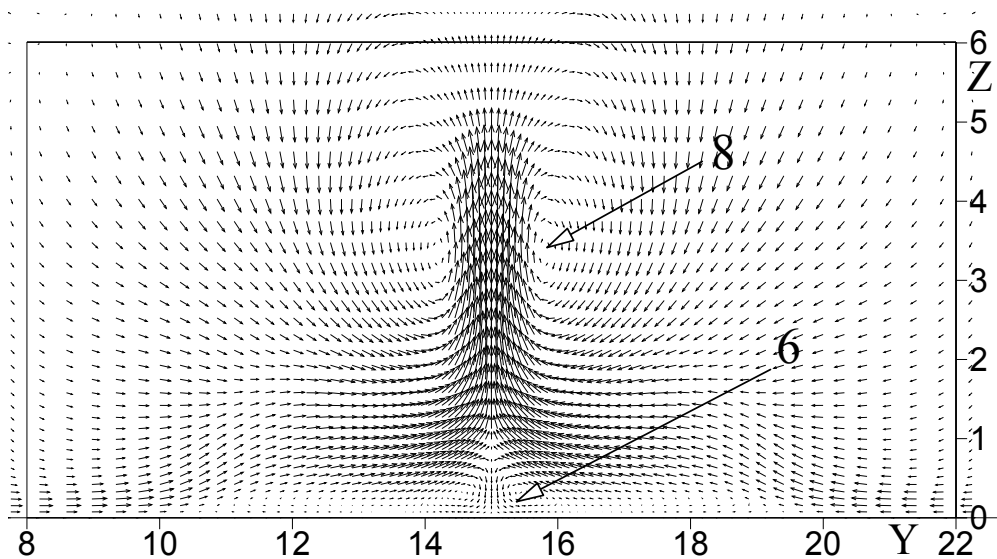


Рисунок 4. 29 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=24$ .

а)



б)

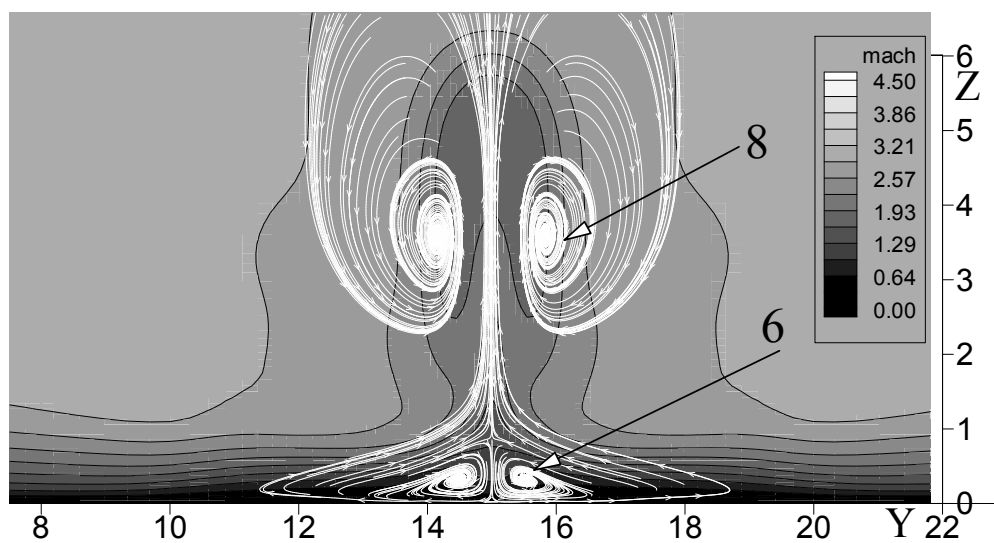
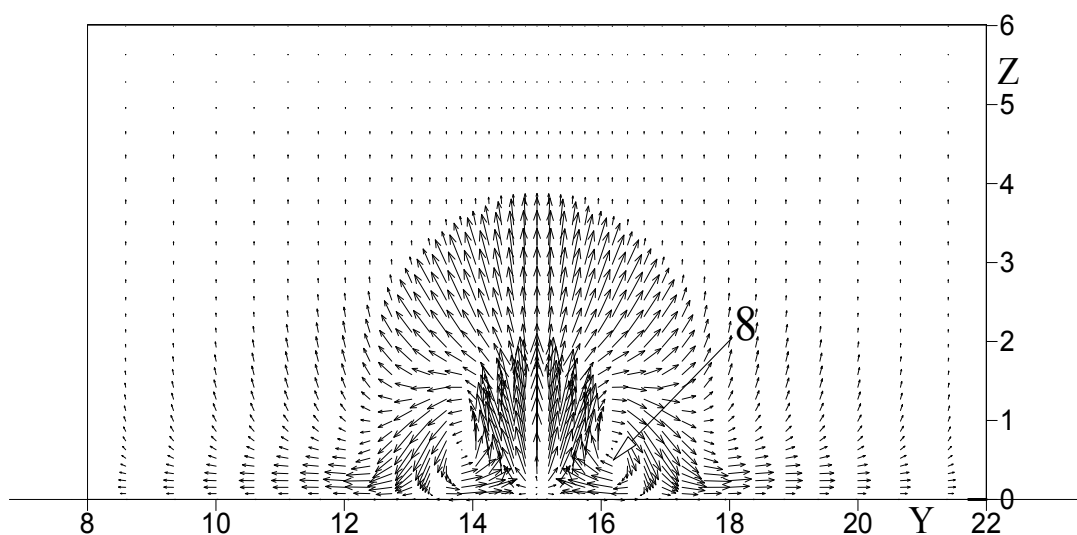


Рисунок 4.30 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=28$ .

а)



б)

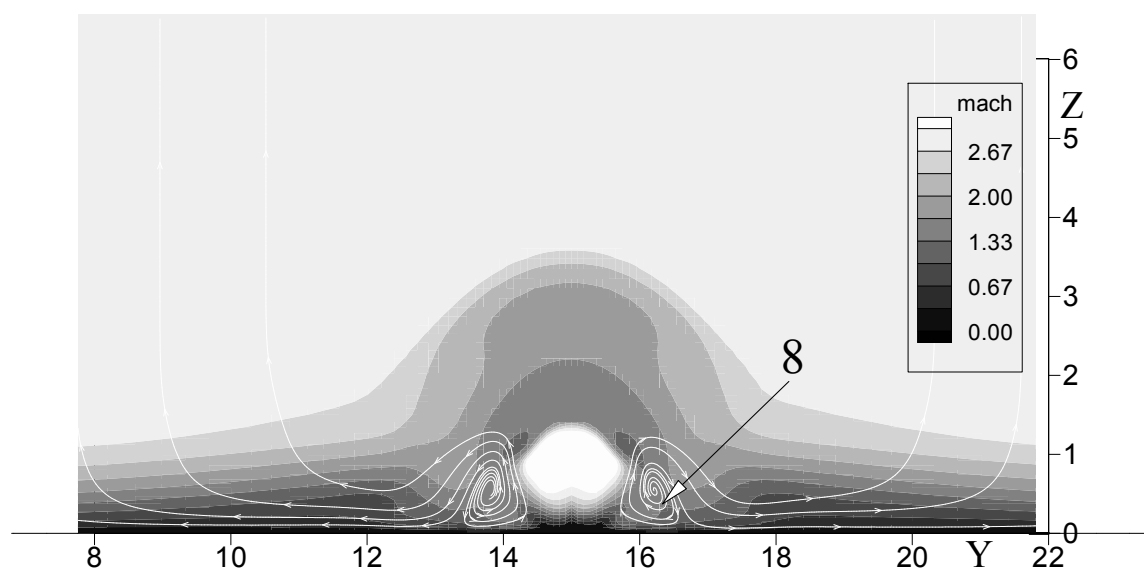


Рисунок 4.31 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси  $x$  для  $n=10$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=10.90$ .

Возникновение вихря (9) иллюстрируется на рисунке 4.32 в сечении  $x=11.90$ , т.е. значительно раньше, чем это происходит для  $n=50$ , причем если при больших нерасчетностях при появлении (9) вихрь (8) уже исчезает, то на картине можно наблюдать обе структуры одновременно. Из рисунка 4.4, где показано распределение местного числа Маха на линии симметрии, видно, что дозвуковая зона над диском Маха, являющаяся причиной зарождения вихря (9) расположена ниже по высоте и ближе к вдуваемой струе, чем это было  $n=50$  (рисунок 4.5). Также на графиках можно наблюдать уменьшение интенсивности системы скачков уплотнения, возникающих в струе. Все это влияет на систему вихрей (9) и (8) - они существенно меньше по размерам в отличие от случая с  $n=50$ .

Далее вниз по течению (рисунок 4.33, сечение  $x=13$ ) видно наличие двух пар вихрей (8) и (6). При сравнении (6) для двух нерасчетностей  $n=50$  и  $n=10$ , видно, что размеры его увеличиваются с ростом нерасчетности, что может говорить об увеличении зоны разряжения за струей (а это связано с увеличением препятствия основному потоку).

Эксперименты, проводимые с малыми параметрами нерасчетности показали, что кроме отсутствия пар вихрей (10) и (11), наблюдается только возникновение бокового (8) и нижнего (6) вихрей, а структура (9) не генерируется что объясняется уменьшением интенсивности бочкообразной структуры в самой струе, за счет чего возможно не происходит образование дополнительного вихря. Наличие только одной вихревой структуры при вдуве струи и было показано авторами в предыдущих исследованиях [134].

Данный факт можно наблюдать на рисунках 4.34-3.36 где представлены результаты расчетов при  $n=3$ . На рисунке 4.34 (а) вектор скорости, б) линии тока) в сечении  $zy$  на расстоянии  $x=10.50$  иллюстрируется формирование бокового вихря. Ниже по течению на рисунках 4.35 (поле вектора скорости и линии тока) на уровне  $x=10.90$  показаны максимальные размеры бокового вихря. В сечении  $x=11.90$  (график 4.36 – а) поле вектора скорости, б) линии тока) также наблюдается вихрь (8), который остается до конца расчетной области.

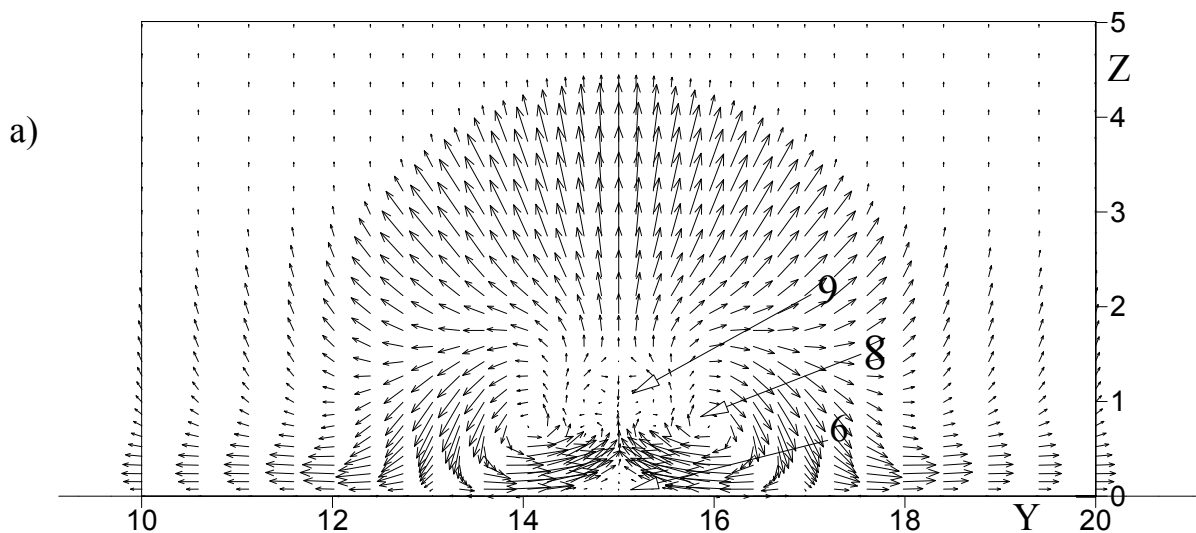
В работе было проведено сравнение численных результатов с опытными данными работы [2] для параметра нерасчетности  $n=40$ . На рисунке 4.37 представлены результаты распределения давления  $P/P_\infty$  на стенке в плоскости симметрии (сплошная линия – численные результаты, « $\circ\circ\circ\circ$ » – эксперимент работы [2]). Здесь начало координат выбранной системы совпадает с центром отверстия для вдува. По оси абсцисс отложена величина  $X_1=(X-\frac{1}{2}d)-L_1$ , где  $L_1$  - расстояние от передней точки струи до начала повышения давления,  $d$  - диаметр струи. Как известно, перед струей вследствие торможения набегающего потока повышается давление и образуются области с различными градиентами давления, что можно наблюдать на графике. Из рисунка следует удовлетворительное согласие результатов расчетов с измерениями опытов [2].

Сравнение рассчитанных значений длины отрывной зоны и опытных данных [2] в зависимости от нерасчетности приведено на рисунке 4.38. На графике кривая - пространственное обтекание, « $\Delta\Delta$ »- эксперименты. Как видно из графика численные результаты трехмерного случая хорошо согласуются с экспериментом.

Также, для подтверждения правильности результатов расчета в области взаимодействия сверхзвуковой струи с набегающим потоком, была определена траектория центральной точки круглой струи, сносимой поперечным потоком по эмпирической формуле [127]:

$$x = \left( \frac{q_{01}}{q_{02}} \right)^{1.3} (z)^3 + z \operatorname{ctg} \alpha, \text{ где } q_{01} = \rho_{\infty} u_{\infty}^2 / 2, \quad q_{02} = \rho_0 w_0^2 / 2 - \text{ скорости напоры}$$

соответственно в сносящем потоке и на начальном участке струи,  $\alpha$  - угол между направлением оси сопла и направлением потока. Из рисунка 4.39, где представлены вычисленная траектория центральной точки струи и местное число Маха в плоскости симметрии, следует, что расчетная траектория соответствует наклону струи, обусловленному набегающим потоком, и проходит через диск Маха.



б)

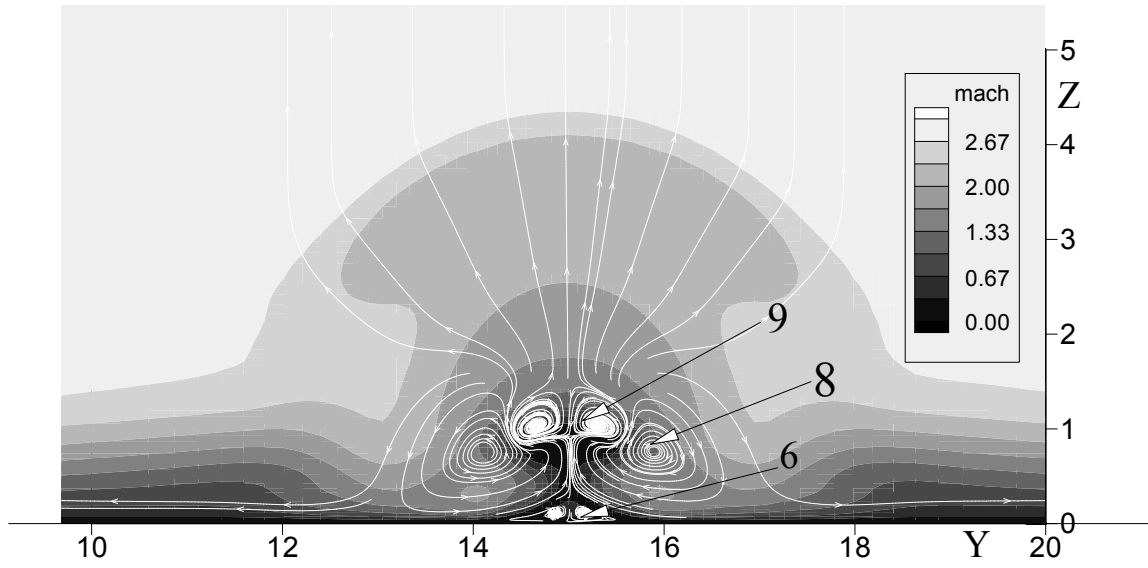
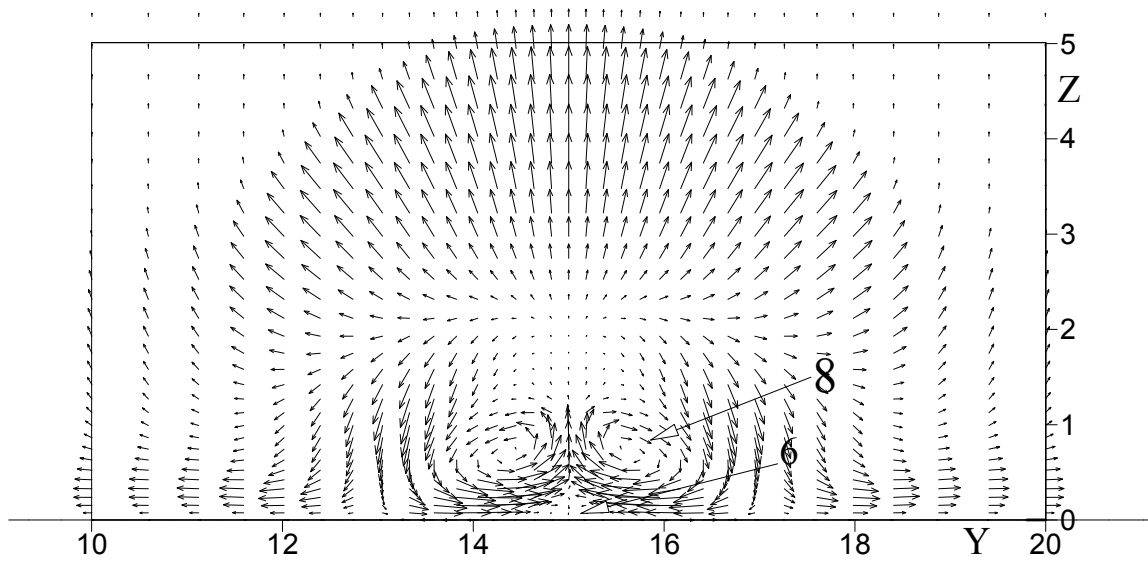


Рисунок 4.32 а) Поле вектора скорости и б) линии тока для  $n=10$  в сечении  $x=11.90$ ,

а)





б)

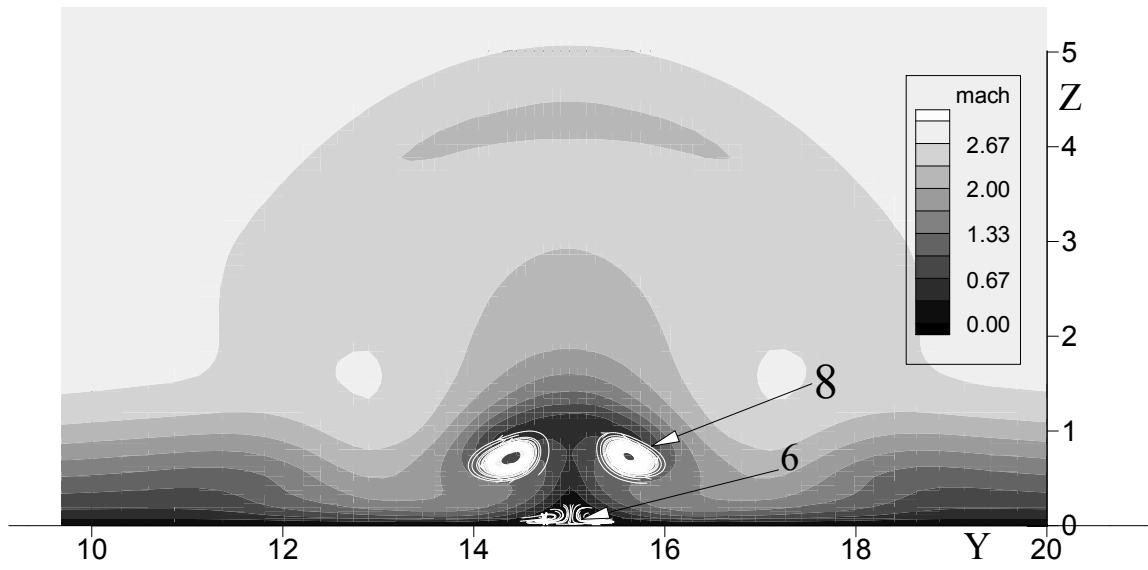
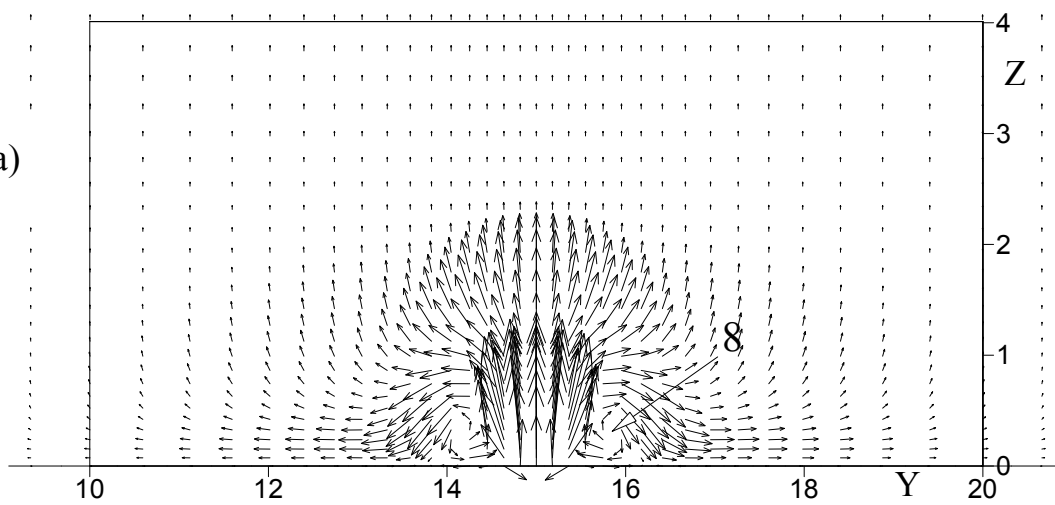


Рисунок 4.33 а) Поле вектора скорости и б) проекции линий тока для  $n=10$  на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=13$ .

а)



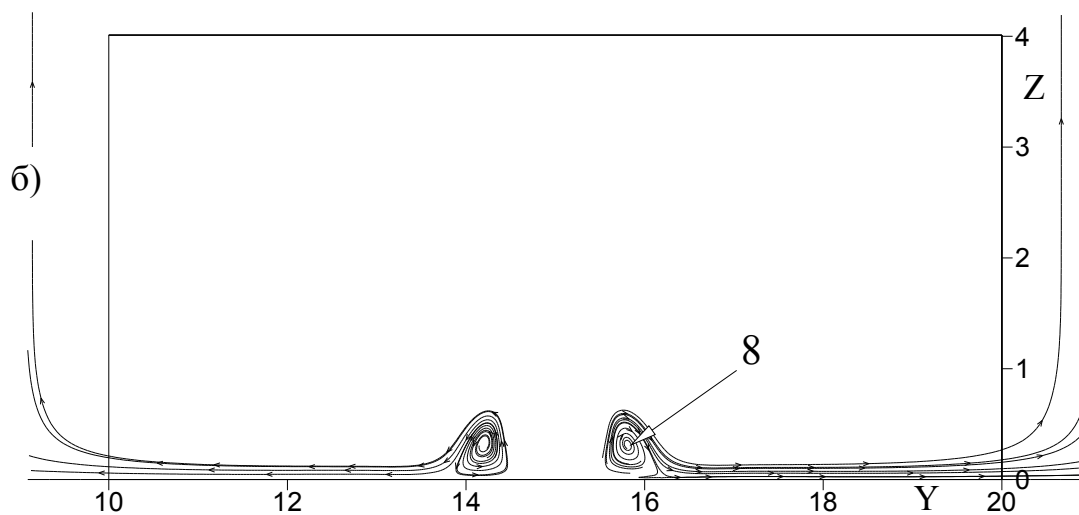
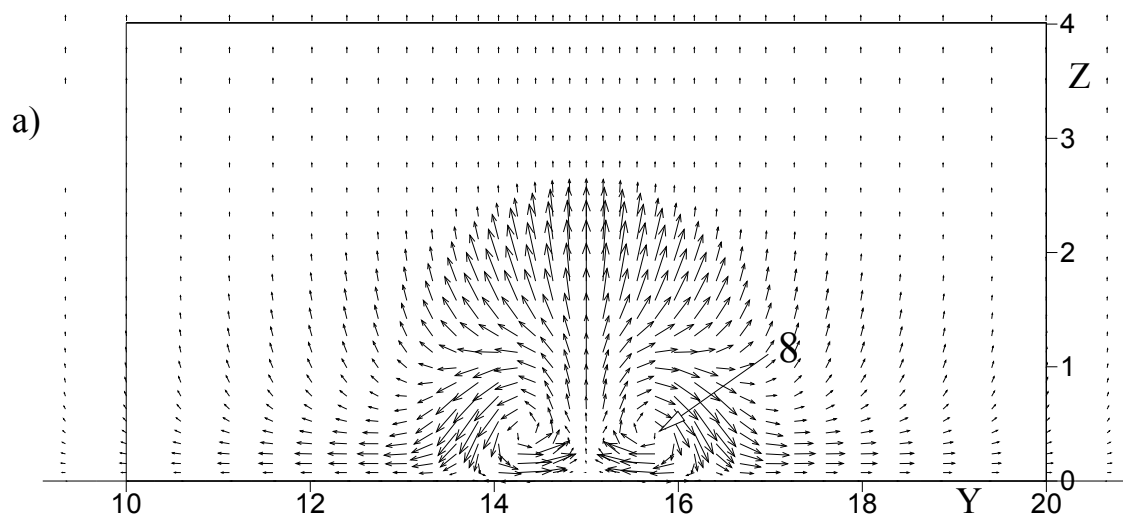


Рисунок 4.34 а) Поле вектора скорости и б) проекции линий тока для  $n=3$  на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=10.5$ .



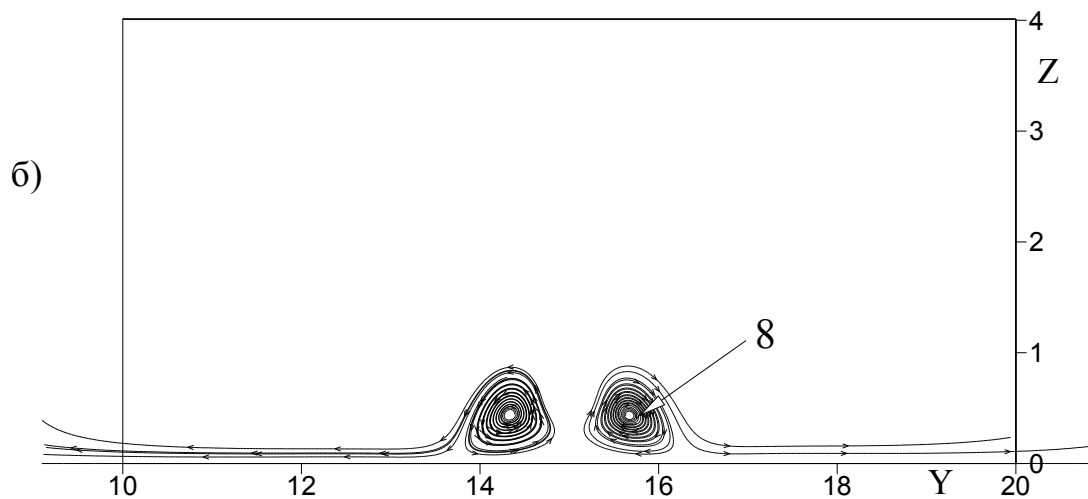
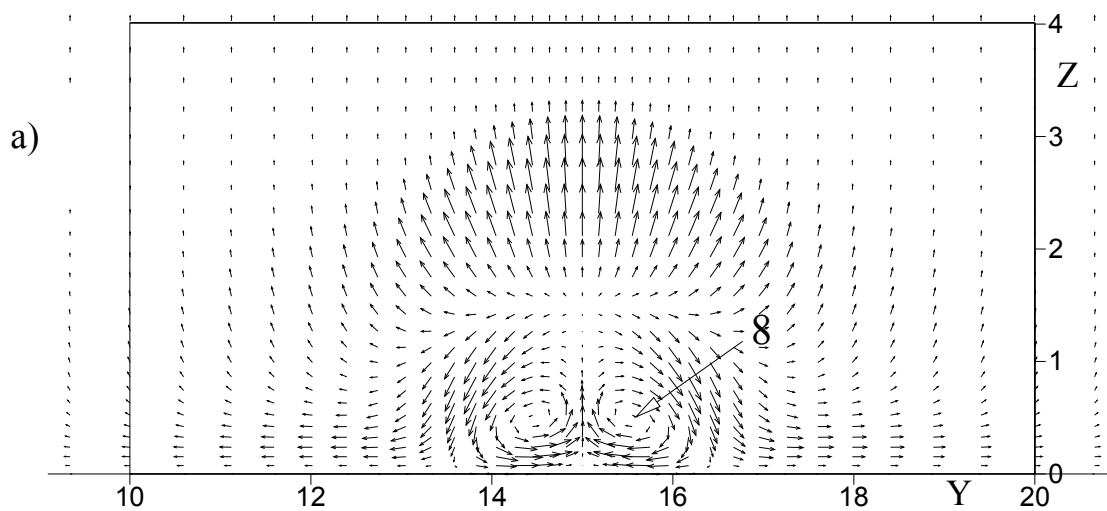


Рисунок 4.35 Поле вектора скорости и проекции линий тока для  $n=3$  на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=10.9$ .



б)

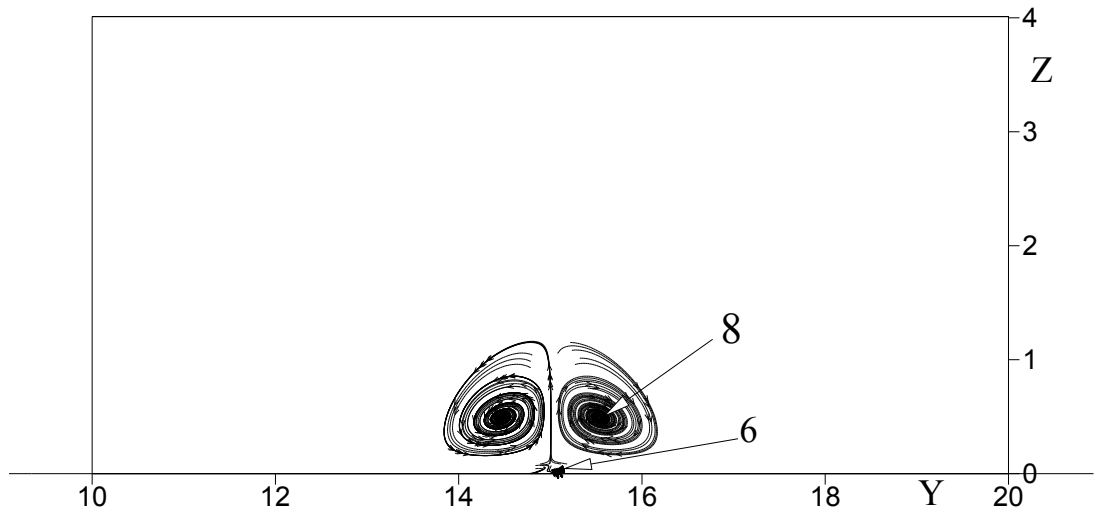


Рисунок 4.36 Поле вектора скорости и проекции линий тока для  $n=3$  на плоскость, нормальную к оси  $x$  в плоскости  $zy$ , сечение  $x=11.9$ .

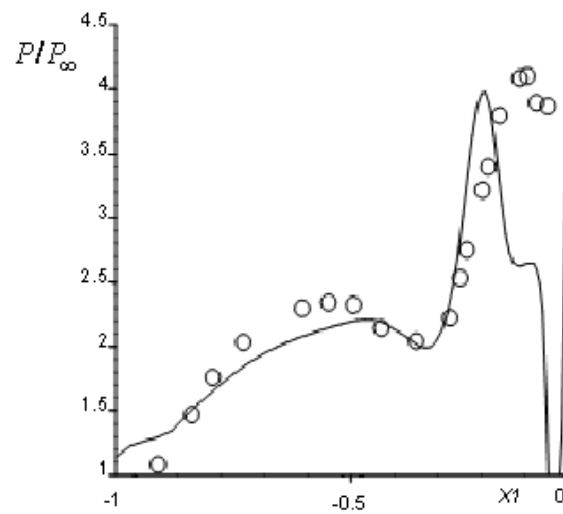
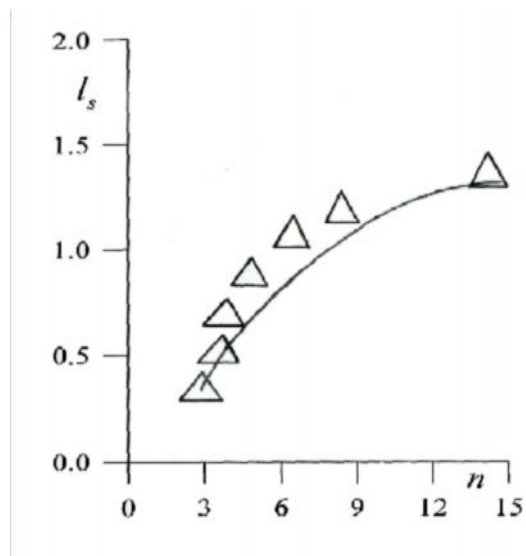


Рисунок 4.37 Распределение давления на стенке на оси симметрии при

$$Re=1.87 \cdot 10^7, Pr=0.9, M_0=1, M_\infty=3, n=40.$$



кривая 1-плоская задача,  
кривая 2- пространственная задача

$$M_\infty=3, M_0=1, Pr=0.9, Re=1.87 \cdot 10^7, \gamma=1.4, h=1.4 \text{ см.}$$

Рисунок 4.38 - Влияние нерасчетности на длину отрывной зоны

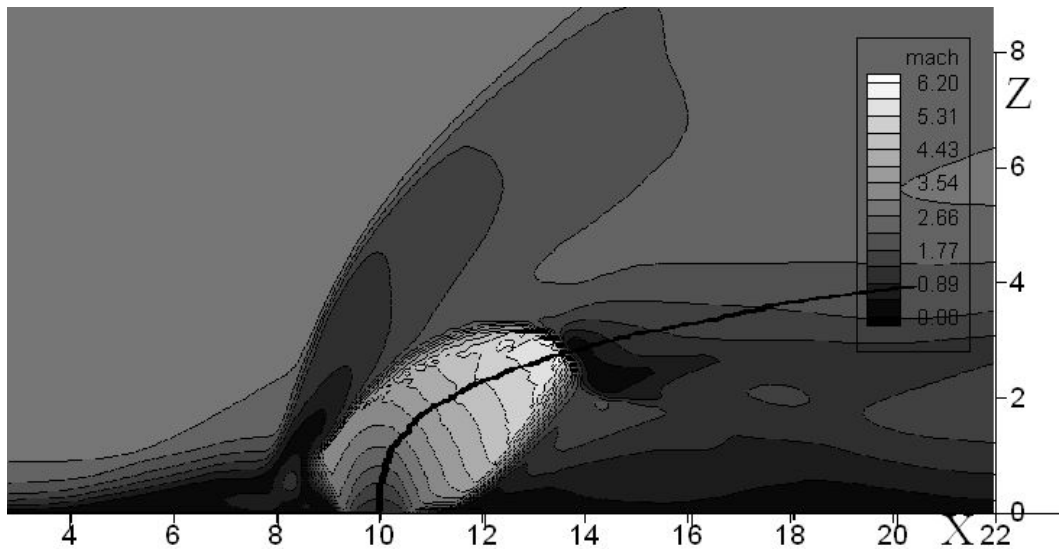


Рисунок 4.39 Распределение местного числа Маха в плоскости симметрии  $Re=1.87 \cdot 10^7$ ,  $Pr=0.9$ ,  $n=40$ ,  $M_0=1$ ,  $M_\infty=3$ .

#### 4.5 Выводы по главе

**ГЛАВА V. ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ СТРУИ ГАЗА В СПУТНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ LES (LARGE EDDY SIMULATION) МЕТОДА.**

Как известно, «реальное» турбулентное течение является трехмерным со случайным изменением физических характеристик потока, как по времени, так и по пространству. Возможны два подхода при численном исследовании турбулентных течений. В первом случае решаются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS). При этом нестационарные турбулентные процессы, осреднены и описываются с помощью полуэмпирических моделей турбулентности. Такие методы достаточно эффективны и не требуют больших вычислительных затрат, поэтому в настоящее время они наиболее распространены. Однако точность расчета струйных течений с помощью RANS и моделей турбулентности невысока. Течения свободной струи из сопел различной конфигурации с помощью RANS не удастся описать даже качественно. Однако именно такие струйные течения встречаются в авиационных приложениях. Для практических приложений, связанных с анализом течений в элементах ПВРД нужно знать турбулентные характеристики течения: пульсации скорости, давления и других параметров течения. При использовании RANS для большинства моделей турбулентности это невозможно, или возможно с привлечением некоторых не универсальных эмпирических соотношений. Повысить точность расчетов турбулентных течений, которые не удастся моделировать с помощью RANS, и получить характеристики турбулентности в полном объеме можно, если использовать методы прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation – DNS). В этом случае решаются неосредненные нестационарные уравнения Навье-Стокса, а турбулентные даже мелкие вихри разрешаются явным образом. Однако для расчетов указанными методами требуются очень большие вычислительные ресурсы. Подход, при котором разрешаются только крупные вихри, определяющие особенности течения, а мелкие, которые более универсальны, описываются с помощью подсеточной (subgrid scale – SGS) модели турбулентности, называется методом моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES).

В данной главе численно моделируется и изучается пространственное истечение круглой струи в спутный турбулентный поток совершенного газа, схема течения показана на рисунке 5.1.

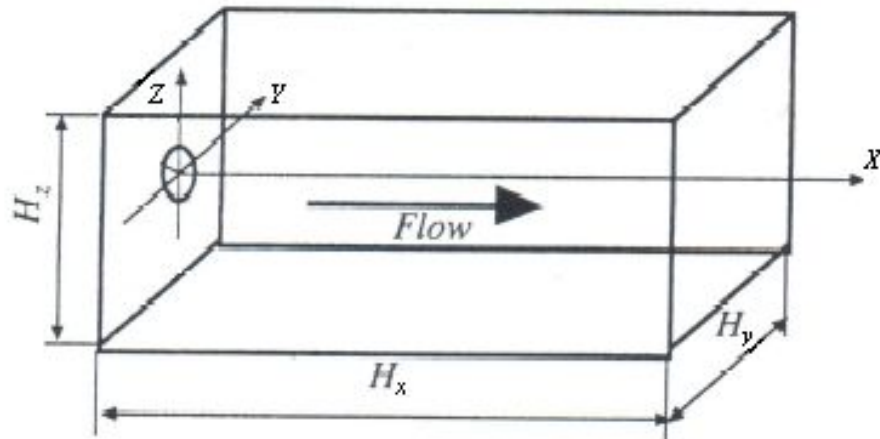


Рисунок 5.1 – схема течения

### 5.1 Постановка задачи

Основными уравнениями для турбулентного течения сжимаемого вязкого совершенного газа является:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div} A_{i1} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div} A_{i2} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho w v}{\partial z} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div} A_{i3} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial u E}{\partial x} + \frac{\partial v E}{\partial y} + \frac{\partial w E}{\partial z} = -\frac{dP}{dt} + \text{div} u_i D_{ij} \quad (5.5)$$

$$P = \rho RT \quad (5.6)$$



$$\begin{aligned} \operatorname{div} A_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$D_{ij} = A_{ij} + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Здесь  $i, j=1,2,3$ ,  $x_1=x$ ,  $x_2=z$ ,  $x_3=y$

Запишем уравнения (5.1) – (5.5) в векторном виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z} + \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial y} = 0$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix} \quad \vec{F}_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 - p \delta_{i1} - A_{i1} \\ \rho u_i u_2 - p \delta_{i2} - A_{i2} \\ \rho u_i u_3 - p \delta_{i3} - A_{i3} \\ E_t u_i - u_j A_{ij} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

$$E_t = \rho e = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

Идея LES (Large Eddy Simulation) состоит в разрешении турбулентных вихрей, чей размер больше размера ячейки расчетной сетки и моделировании мелких. При такой постановке, необходимо создавать расчетную сетку с такими ячейками, которых достаточно что бы разрешить большую часть энергетического спектра турбулентности Сначала выполняется осреднение исходных уравнений, которое позволяет разделить крупномасштабные и мелкомасштабные структуры. Расчеты крупномасштабных структур будут

проводиться в явном виде, в то время как для мелкомасштабных структур необходимо использовать моделирование.

## 5.2 Получение основных уравнений в LES (large eddy simulation).

Любая переменная течения  $\varphi$  может быть разложена на крупномасштабные и мелкомасштабные компоненты и фильтрована соответствующим интегралом [129] следующим образом:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \quad \text{где} \quad \bar{\varphi} = \int_D G(x-z, \Delta) \rho(x, t) dx dy dz \quad (5.7)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'', \quad \text{где} \quad \tilde{\varphi} = \int_D G(x-z, \Delta) \rho(x, t) \varphi(x, t) dx dy dz \quad (5.8)$$

Здесь как в случае осреднения по Фавру [111], для  $\varphi$  применяется осреднение «взвешенное по плотности»:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\int_D G(x-z, \Delta) \rho(x, t) \varphi(x, t) dx dy dz}{\int_D G(x-z, \Delta) \rho(x, t) dx dy dz} = \frac{\overline{\rho \varphi}}{\bar{\rho}},$$

$$\text{тогда} \quad \overline{\rho \varphi} = \bar{\rho} \tilde{\varphi} = \int_D G(x-z, \Delta) \rho(x, t) \varphi(x, t) dx dy dz,$$

где  $\varphi$  - любая функция ( $\varphi = u, v, w, T, P, E_t$ ),  $D$  - область ячейки,  $\Delta$  - ширина “grid-filter”,  $G(x-z, \Delta)$  - функция фильтра с характерной шириной  $\Delta$ , удовлетворяющей условию нормировки:

$$\int_D G(x-z, \Delta) dx dy dz = 1 \quad (5.9)$$

Свойства фильтрации по LES:  $\overline{\varphi''} \neq 0, \tilde{\tilde{\varphi}} \neq \tilde{\varphi}$ .

Для получения основных уравнений для крупномасштабных компонент, необходимо к основным уравнениям (5.1)-(5.6) применить операцию фильтрации. Покажем это на примере уравнения неразрывности и уравнения движения в направлении  $x$ .

### Уравнение неразрывности.

Для применения операции фильтрации к уравнению (5.1), необходимо сначала умножить (5.1) на функцию фильтра  $G(x-z, \Delta)$  с характерной шириной  $\Delta$

$$G \frac{\partial \rho}{\partial t} + G \frac{\partial \rho u}{\partial x} + G \frac{\partial \rho w}{\partial z} + G \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

преобразуем это уравнение, внося  $G$  под знак дифференциала:

$$\frac{\partial G \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G \rho u}{\partial x} - \rho u \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G \rho w}{\partial z} - \rho w \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G \rho v}{\partial y} - \rho v \frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

т.к.  $G$  не зависит от времени, то найдем

$$\frac{\partial G \rho}{\partial t} + \frac{\partial G \rho u}{\partial x} + \frac{\partial G \rho w}{\partial z} + \frac{\partial G \rho v}{\partial y} - \rho \left( u \frac{\partial G}{\partial x} + w \frac{\partial G}{\partial z} + v \frac{\partial G}{\partial y} \right) = 0,$$

Далее проинтегрировать это уравнение по ячейке:

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \frac{\partial G \rho}{\partial t} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \frac{\partial G \rho u}{\partial x} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \frac{\partial G \rho w}{\partial z} dx dz dy + \\ & + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \frac{\partial G \rho v}{\partial y} dx dz dy - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy - \\ & - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy = 0 \end{aligned}$$

(5.10)

Внося интеграл под знак дифференциала, перепишем (5.10) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho dx dz dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho u dx dz dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho w dx dz dy + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho v dx dz dy - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy - \\
 & - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Учитывая (5.7) и (5.8), запишем (5.11) в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \tilde{u} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \tilde{w} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} \tilde{v} &= \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy + \\
 & + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy
 \end{aligned}$$

где  $\bar{\rho} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho dx dz dy,$   $\bar{\rho} \tilde{u} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho u dx dz dy,$

$\bar{\rho} \tilde{w} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho w dx dz dy, \bar{\rho} \tilde{v} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} G \rho v dx dz dy$

Тогда имеем фильтрованное уравнение неразрывности в консервативной форме:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial y} = \\
 & = \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial y} = RHS_{G \rho}, \quad (5.12)$$

где

$$RHS_{G \rho} = \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy.$$

В простейшем случае рассматриваются функция  $G$ , которая не зависит от координат  $\left( \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \right)$ , так что в этом случае операции фильтрации и дифференцирования коммутативны, т.е.

$$G \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial G f}{\partial x_i} \quad (5.13).$$

В этом случае член стоящий в правой части будет равен нулю, тогда (5.12) переписется в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.14)$$

### Уравнение движения в направлении $x$ .

Применим к (5.2) операцию фильтрации (5.7), (5.8), аналогично предыдущему уравнению, умножим на  $G$  и проинтегрируем по ячейке:

$$G \frac{\partial \rho u}{\partial t} + G \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + G \frac{\partial \rho u w}{\partial z} + G \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -G \frac{\partial p}{\partial x} + G \operatorname{div} A$$

вносим  $G$  под дифференциал и учитывая, что  $G = G(x, z, y)$ ,  $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial G \rho u}{\partial t} - \rho u \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G \rho u u}{\partial x} - \rho u u \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G \rho u w}{\partial z} - \rho u w \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial G \rho u v}{\partial y} - \rho u v \frac{\partial G}{\partial y} = \\
& = - \left( \frac{\partial G p}{\partial x} - p \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \operatorname{div} GA - A \operatorname{div} G
\end{aligned} \tag{5.15}$$

и интегрируя его получим

$$\begin{aligned}
& \iiint \frac{\partial G \rho u}{\partial t} dx dz dy + \iiint \frac{\partial G \rho u u}{\partial x} dx dz dy - \iiint \rho u u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy + \\
& + \iiint \frac{\partial G \rho u w}{\partial z} dx dz dy - \iiint \rho u w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy + \iiint \frac{\partial G \rho u v}{\partial y} dx dz dy - \iiint \rho u v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy = \\
& = - \iiint \frac{\partial G p}{\partial x} dx dz dy + \iiint p \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy + \iiint \operatorname{div} GA dx dz dy - \\
& - \iiint A \operatorname{div} G dx dz dy
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Применим условия (5.7), (5.8) к слагаемым (5.16):

$$\begin{aligned}
& \iiint \frac{\partial G \rho u}{\partial t} dx dz dy = \frac{\partial}{\partial t} \iiint G \rho u dx dz dy = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \tilde{u}, \\
& \iiint \frac{\partial G p}{\partial x} dx dz dy = \frac{\partial}{\partial x} \iiint G p dx dz dy = \frac{\partial}{\partial x} \bar{p}, \\
& \iiint \frac{\partial G \rho u u}{\partial x} dx dz dy = \frac{\partial}{\partial x} \iiint G \rho u u dx dz dy = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \tilde{u} u, \\
& \iiint \operatorname{div} GA dx dz dy = \operatorname{div} \iiint GA dx dz dy = \operatorname{div} \bar{A}, \\
& \iiint \frac{\partial G \rho u w}{\partial z} dx dz dy = \frac{\partial}{\partial z} \iiint G \rho u w dx dz dy = \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \tilde{u} w, \\
& \iiint \frac{\partial G \rho u v}{\partial y} dx dz dy = \frac{\partial}{\partial y} \iiint G \rho u v dx dz dy = \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} \tilde{u} v.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Подставляя (5.17) в (5.16), получим следующее отфильтрованное уравнение движения:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \text{div} \bar{A} + \text{RHS}_{G_x},$$

(5.18)

где

$$\begin{aligned} \text{RHS}_{G_x} = & \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u u \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u w \frac{\partial G}{\partial z} dx dz dy + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} \rho u v \frac{\partial G}{\partial y} dx dz dy + \\ & + \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} p \frac{\partial G}{\partial x} dx dz dy - \int_{\Delta x} \int_{\Delta z} \int_{\Delta y} A \text{div} G dx dz dy \end{aligned}$$

Таким образом а уравнении (5.18) появляется среднее значение произведения скоростей  $\tilde{u} \tilde{u}, \tilde{u} \tilde{w}, \tilde{u} \tilde{v}$ . Рассмотрим их подробно.

Согласно работе [129] к полученному отфильтрованному уравнению движению (5.18) добавим и отнимем следующие члены  $\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w}}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v}}{\partial y}$

и запишем уравнение движения в направлении x следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v}}{\partial y} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \text{div} \bar{A} - \frac{\partial \left( \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} - \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} \right)}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial \left( \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} - \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left( \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} - \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} \right)}{\partial y} + \text{RHS}_{G_x} \end{aligned}$$

(5.19)

где

$$\begin{aligned} \text{div} \bar{A} = & \frac{\partial}{\partial x} \bar{\tau}_{xx} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\tau}_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} = \\ = & \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \end{aligned}$$

Применим операцию фильтрования ко всем уравнениям и обозначив выражение  $-\bar{\rho}u_i\tilde{u}_j + \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j = \Gamma_{ij}$  представим подсеточный тензор  $\Gamma_{ij}$  в виде:

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij} - \frac{1}{3}\Gamma_{ll}\delta_{ij} + \frac{1}{3}\Gamma_{ll}\delta_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \frac{1}{3}\Gamma_{ll}\delta_{ij} \quad (5.20)$$

где  $\bar{\tau}_{ij}$  - подсеточные напряжения (subgrid stresses), которые необходимо определить для полного замыкания основных уравнений .

Тогда вектор консервативных переменных примет вид

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u}_i \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_1 + (\bar{p} - \frac{1}{3}T_{ll})\delta_{i1} - \bar{\tau}_{i1} - \overline{2\mu A_{i1}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_2 + (\bar{p} - \frac{1}{3}T_{ll})\delta_{i2} - \bar{\tau}_{i2} - \overline{2\mu A_{i2}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_3 + (\bar{p} - \frac{1}{3}T_{ll})\delta_{i3} - \bar{\tau}_{i3} - \overline{2\mu A_{i3}} \\ \overline{(\rho e + p)u_i} - \overline{2\mu A_{ij}u_j} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Уравнения для полной энергии запишется:

$$\bar{\rho}\tilde{e} = \bar{\rho}C_v\tilde{T} + \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) - \frac{1}{2}T_{ll} \quad (5.21)$$

Введем макродавление и макротемпературы в виде:

$$\bar{P} = \bar{p} - \frac{1}{3}T_{ll} \quad (5.22)$$



$$\bar{g} = \tilde{T} - \frac{1}{2C_v \bar{\rho}} T_{ii} \quad (5.23)$$

Тогда выражение для полной энергии

$$\bar{\rho} \tilde{e} = \bar{\rho} C_v \bar{g} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) \quad (5.24)$$

Вектор консервативных переменных перпишется в виде

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \bar{P} \delta_{i1} - \bar{\tau}_{i1} - \overline{2\mu A_{i1}} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \bar{P} \delta_{i2} - \bar{\tau}_{i2} - \overline{2\mu A_{i2}} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \bar{P} \delta_{i3} - \bar{\tau}_{i3} - \overline{2\mu A_{i3}} \\ (\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{P}) \tilde{u}_i - \overline{2\mu A_{ij} u_j} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

По аналогии с осредненными по Фавру уравнениями Навье-Стокса, согласно гипотезе Бусинеска подсеточные напряжения заменяются следующим выражением

$$\bar{\tau}_{ij} = \rho \nu_t \tilde{A}_{ij} \quad (5.26)$$

здесь  $\nu_t$  -так называемая вихревая вязкость.

С учетом выражения (5.26) вектор (5.25)

$$\bar{F}_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho \tilde{u}}_i \\ \overline{\rho \tilde{u}}_i \tilde{u}_1 + \bar{P} \delta_{i1} - \overline{2(\mu + \nu_t) A_{i1}} \\ \overline{\rho \tilde{u}}_i \tilde{u}_2 + \bar{P} \delta_{i2} - \overline{2(\mu + \nu_t) A_{i2}} \\ \overline{\rho \tilde{u}}_i \tilde{u}_3 + \bar{P} \delta_{i3} - \overline{2(\mu + \nu_t) A_{i3}} \\ (\bar{\rho} \tilde{e} + \bar{P}) \tilde{u}_i - \overline{2\mu A_{ij} u_j} - (\bar{\lambda} + \bar{\rho} C_p) \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Для моделирования  $\bar{\tau}_{ij}$  используется модель вихревой вязкости Смагоринского:

$$\bar{\tau}_{ij} = \Gamma_{ij} - \frac{1}{3} \Gamma_{ll} \delta_{ij} = -2C\bar{\rho}\Delta^2 |\tilde{S}| \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{mm} \delta_{ij} \right) \quad (5.28)$$

где  $\Gamma_{ii}$  - изотропная часть тензора напряжений подсеточного масштаба,

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \tilde{S}_{mm} = \sum_{i=1}^3 S_{ii}, \quad |\tilde{S}| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad i=\overline{1,3}, j=\overline{1,3}.$$

Вихревая вязкость определяется по формуле:

$$\nu_t = (C\Delta)^2 \sqrt{\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$$

где  $C=0,025$  – коэффициент модели,  $\Delta$  - ширина фильтра, равная размеру шага по пространственным координатам.

### 5.3 Постановка начальных и граничных условий.

Поле вектора скорости представляется в иде суммы среднего и пульсационной составляющей

$$\bar{u} = (\bar{u} + u') = \bar{f}$$

(5.29)

Средние величины  $\bar{f}$  - поле средней скорости на входной границе,  $u'$  - поле флуктуаций скорости или поле синтетической турбулентности.. Для моделирование пульсаций скорости аналогично работе [102] примем:

$$\bar{u}'(r,t) = 2\sqrt{3/2} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} \sigma^n \cos(k^n d^n + s^n \frac{t}{\tau})$$

(5.30)

Здесь  $N$  – число мод;  $q^n$  – нормированная амплитуда моды;  $k^n$  – модуль вектор волнового числа  $n$  –ой моды;  $\sigma^n$  – орт, определяющий направление  $n$  –ой моды, задается углом, являющимся случайным числом в интервале  $[0, 2\pi)$ ;  $s^n$  – безразмерная круговая частота  $n$  –ой моды;  $\tau$  – глобальный временной масштаб рассматриваемой задачи.

Входящие в (5.30) нормированные амплитуды мод имеют вид:

$$q^n = \frac{E(k^n) \Delta k^n}{\sum_{n=1}^N E(k^n) \Delta k^n} \quad \sum_{n=1}^N q^n = 1$$

(5.31)

вычисленные с использованием выражения для энергетического спектра фон Кармана

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{[1 + 2.4(k/k_e)^2]^{7/6}} f_\eta f_{cut}$$

(5.32)

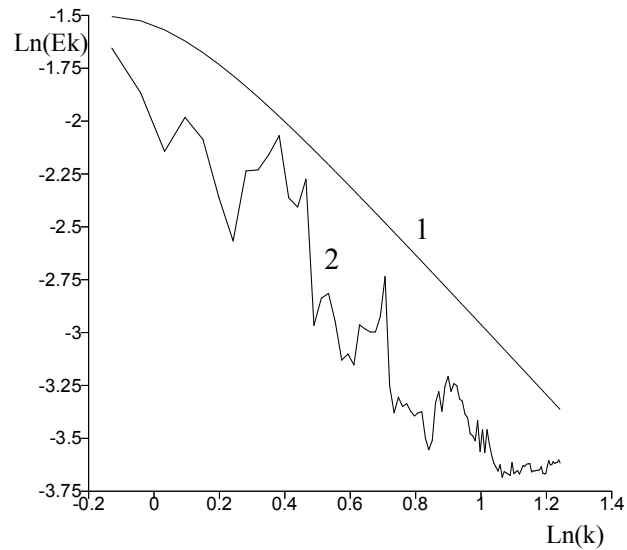


Рисунок 5.2 - Энергетический спектр: линия 1 – спектр фон Кармана, 2- спектр, вычисленный по входным параметрам пульсационных оставляющих скорости.

**Граничные условия имеют следующий вид:**

на входе, а также в качестве начальных данных задаются параметры потока:

$$u = \bar{u} + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad \rho = 1, \quad T = 1 \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq H_y, \quad 0 \leq z \leq H_z$$

на струе:

$$u = \sqrt{T} M_0 / M_\infty + u' \quad v = v', w = w', \quad T = 0.6, \quad P_0 = n P_\infty, \quad x = 0,$$

$$|z^2 + y^2| \leq R;$$

На месте перехода двух потоков газа вышеуказанные физические переменные определяются функцией гиперболического тангенса

$$\phi(z) = 0.5(\phi_0 + \phi_\infty) + 0.5(\phi_0 - \phi_\infty) \tanh(0.5z / \delta_\theta)$$

где  $\phi = (u, v, w, T)$ ,  $\delta_\theta$  - толщина потери импульса.

на боковых границах:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

$$y=0, y=H_y, 0 < x \leq H_x, 0 \leq z \leq H_z$$

$$z=0, z=H_z, 0 < x \leq H_x, 0 \leq y \leq H_y$$

где  $H_x$  - длина,  $H_z$  - высота,  $H_y$  - ширина расчетной области,  $R$  - радиус круглого отверстия;

на выходной границе задается условие неотражения (подраздел 2.2).

## 5.4 Метод решения

Решение исходных уравнений рассматриваемой задачи осуществляется ENO схемой, описанной в главе 4 (раздел 4.3).

$A$  – амплитуда пертурбации, которая определяется из соотношения  $A \cdot \Delta U$ , где данное произведение должно равняться 0.2–0.3 процентов от максимальной скорости из двух потоков газа на входе.  $\Delta w_{factor}$  – есть коэффициент, равный 70% от  $A \cdot \Delta U$ , введенной для продольной пертурбации скорости.  $\omega$  – есть частота возбуждения, которая определяется либо из экспериментов, либо оценивается с использованием линейной теории устойчивости [15, 119].

Далее приводится анализ влияния возмущений на входе на структуру многокомпонентного слоя смешения. Входные возмущения были приняты согласно работе [119]. На рисунке 4.39 приводятся частоты входных возмущений  $\omega_1$  - самая усиливающая частота естественного образования слоя смешения,  $\omega_2, \omega_3, \omega_4$  - ее три субгармоники. Волновое число при  $\omega_1 = 0.09409$  равно  $\alpha_1 = 0.4$ .

В данном случае рассматривался временной анализ устойчивости, т.е. частота – комплексное число, волновое число – действительное число. Согласно работе [119] анализ устойчивости проводится для сжимаемого газа.

Из временного анализа устойчивости [2-3] для несжимаемой жидкости было выявлено, что самая усиливающая частота естественного вихреобразования  $\omega_1 = 0.0949$ , при действительном волновом числе  $\alpha_1 = 0.4446$ . Как видно, усиливающие частоты естественного вихреобразования для сжимаемого газа и несжимаемой жидкости приблизительно совпадают.

На рисунке 4.40 представлены изолинии массовой концентрации водорода с введением возмущений с различными частотами на входе для укороченной физической области.

Из рисунка 4.40 следует, что качественная картина течения немного отличается, в то время как количественная картина для трех случаев одинаковая. Отсюда следует, что частоты естественного вихреобразования, полученные аналитическим путем с использованием линейной теории устойчивости [119] отражает реальную динамику течения, полученную численным путем без введения возмущений на входе (рисунок 4.40 а)).

Значения волнового числа находятся в диапазоне от  $k_{min} = 2\pi/L$  до  $k_{max} = 2\pi/\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

Максимальная частота принимает значение  $\omega = 0,254$

## 5.5 Результаты расчетов и их анализ

Для апробации разработанного алгоритма решения исходных уравнений было проведено сравнение численных результатов с опытными данными работы [132]. Параметры струи и потока имеют следующие значения

$$M_0 = 0.942, T_0 = 300K, p_0 = 100000Pa, u_0 = 287m/c, M_\infty = 1.302, p_\infty = 100000Pa,$$

$$u_\infty = 390m/c, Re_\infty = 3.71 \cdot 10^6, \text{ диаметр круглого сопла } d = 2.334cm$$

Расчеты производятся с использованием расчетной сетки, размером 301x111x111.

Начальная толщина потери импульса  $\delta_0(x) = \int_{-H/2}^{+H/2} (\bar{\rho}(\tilde{u} - u_\infty)(u_0 - \tilde{u})) / (\rho_\infty \Delta u^2) dz$  на

входе составляет 0,4 см. Геометрические параметры рассматриваемой задачи обезразмериваются на начальную толщину потери импульса, таким образом безразмерные длина, ширина и высота канала составляют 250x30x30. На рисунке 5.3 представлено распределение среднего значения продольной составляющей скорости на центр линии рассматриваемой области. Как видно из графика можно отметить удовлетворительное согласие экспериментов [132] и численных расчетов.

Далее производится сравнение полученных турбулентных характеристик с результатами работы [80]. Авторы [80] представили численное решение задачи плоского течения спутной струи с конвективным числом Маха  $M_c = 0.16$  и числом Рейнольдса равным 7123, где безразмерная расчетная область имела размеры 143x40x40 с использованием прямого численного моделирования.

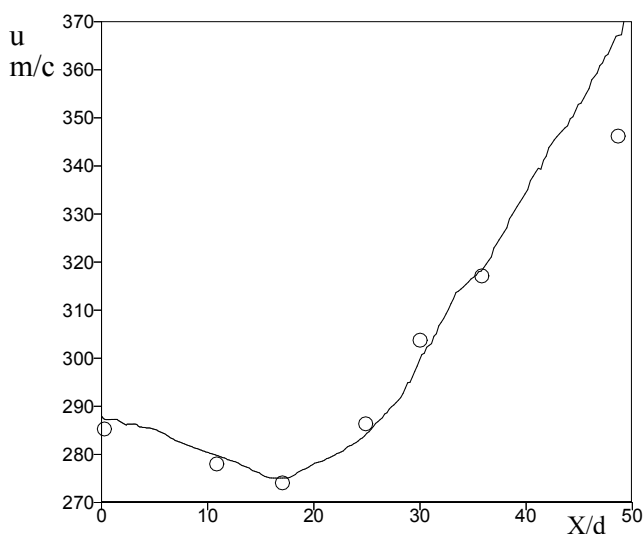


Рисунок 5.3 – Распределение продольной скорости на линии симметрии, сплошная линия- результаты расчетов, «○○○» - эксперимент [132].

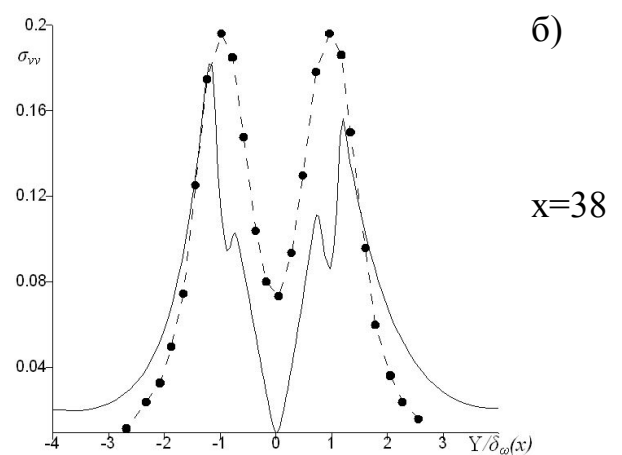
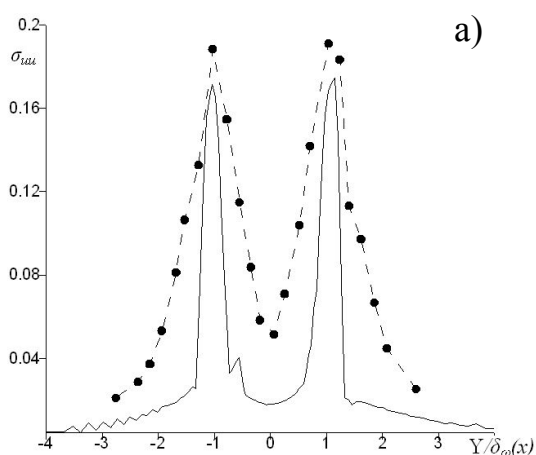
На рисунке 5.4 \ представлены турбулентные касательные напряжения  $\sigma_{uu} = \sqrt{u'^2} / \Delta u$  и  $\sigma_{vv} = \sqrt{v'^2} / \Delta u$  в двух сечениях а,б)  $x=38$ , в,г)  $x=133$ , здесь сплошная линия – результаты расчетов, а), в) -  $\sigma_{uu}$ , б), г) -  $\sigma_{vv}$  и «●●●» - «■■■» – результаты работы[80]. На графиках видно, что рейнольдсовы напряжения в указанных сечениях совпадают качественно, количественно имеют небольшие расхождения поскольку проводилось статистическое

осреднение средних характеристик.  $\bar{\rho}(x, z, \tau') = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \rho(x, z, \tau) d\tau$  ( $\tau_1 \leq \tau' \leq \tau_2$ )

- статистическое осреднение по Рейнольдсу,  $\tilde{u} = \frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}}$  - осреднение по Фавру, что и могло повлиять на полученные результаты.

Далее представлены результаты численного эксперимента для параметров струи и потока  $M_0=1.5$ ,  $T_0=300K$ ,  $p_0=100000Pa$ ,  $M_\infty=1.1$ ,  $p_\infty=100000Pa$ ,  $Re_0=1.18 \cdot 10^6$ ,  $Re_\infty=3.71 \cdot 10^6$ . Длина, ширина и высота канала составляют  $160 \times 30 \times 30$  калибров, а расчетная сетка  $251 \times 111 \times 111$ . Рассматривались два вида истечения круглой струи – варикозное или симметричное и спиральное. На рисунках 5.5-5.8 представлено мгновенное поле плотности и мгновенное распределение завихренности для симметричной и спиральной струи.

На рисунке 5.5-5.6 показан симметричный (варикозный) режим истечения струи. Рисунок 5.5- пространственное распределение а) плотности, б) поля завихренности. Рисунок 5.6 представляет распределение а) плотности, б) поля завихренности в плоскости  $xz$  в сечении  $y=15$ . Такое взаимодействие вихрей ранее наблюдалось в ряде работ [77] [53]. Направление нормали к плоскости симметрии вихрей, во время их движения вниз по течению, не отличается от нормали к оси струи.





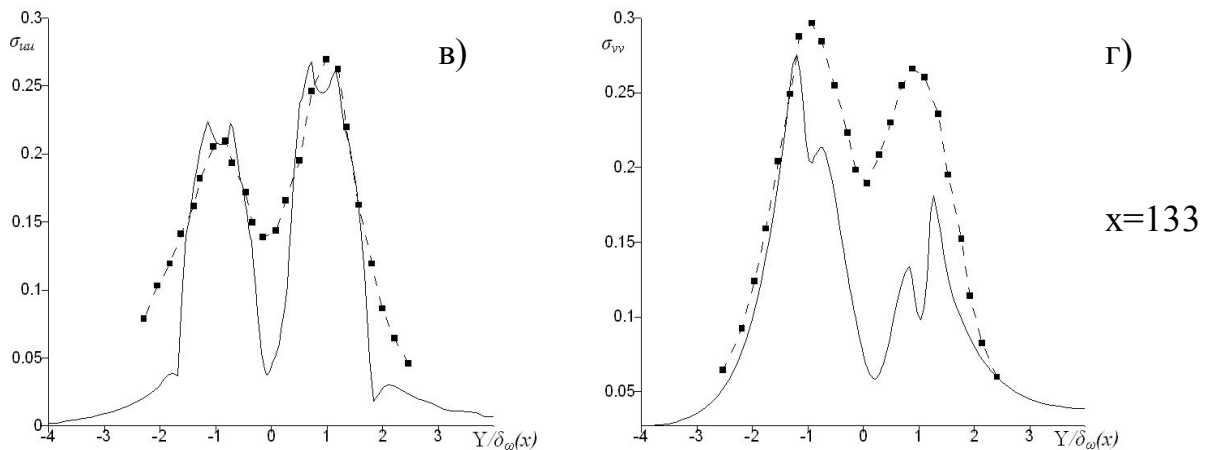


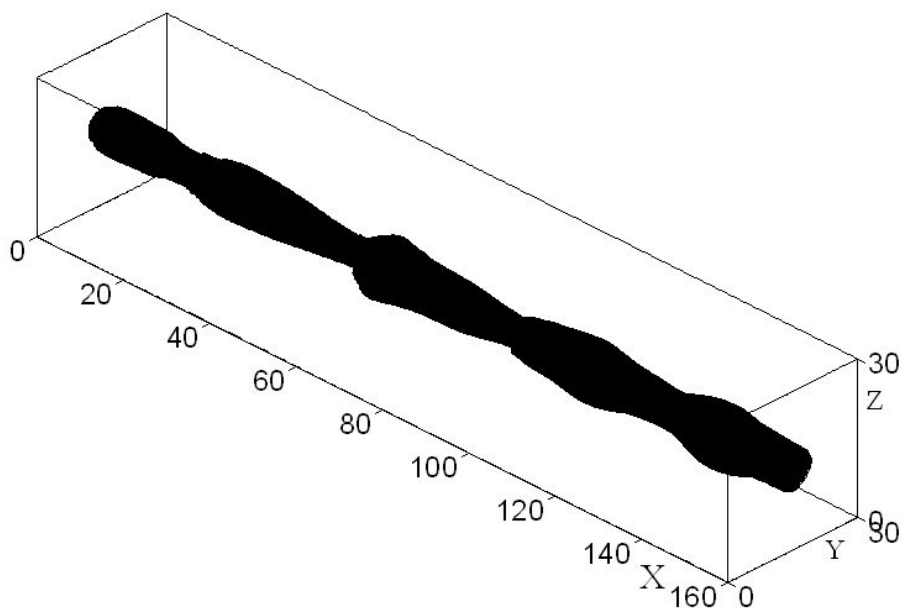
Рисунок 5.4 – Сравнение расчетных данных и результатов работы [80] для профилей турбулентных касательных напряжений, а,б)  $x=38$ , в,г)  $x=133$

Из графика видно формирование так называемых первичных колец, причем каждое последующее кольцо меньше по длине предыдущего. Экспериментальные исследования [134]. показали, что при истечении струей определенного участка, в каждом вихревом кольце будет происходить уменьшение продольной скорости на его внешней стороне по отношению к внутренней стороне, в результате чего наблюдается тенденция наклона колец, последующее их спаривание и турбулизация потока. Как видно из представленных графиков на участке в 160 калибров наблюдается только первичные кольца.

На рисунках 5.7-5.8 представлены результаты спирального истечения струи. Рисунок 5.7 демонстрирует пространственное распределение а) плотности, б) поля завихренности., а рисунок 5.8 - распределение а) плотности, б) поля завихренности в плоскости  $xz$  в сечении  $y=15$ . Известно, что истечение струи с закруткой приводит к более интенсивному расширению струи и росту вихревых колец а также более быстрому затуханию параметров вдоль нее [127]. Рисунок 5.8а наглядно показывает уменьшение значения плотности вниз по потоку.

Представленная на рисунках 5.7б и 5.8б картина завихренности показывает порождение спиральной структуры, которая вращается в направлении против часовой стрелки при удалении от сопла, что, связано с отрицательным значением завихренности. В исследованиях [135] выявлено, что циркуляция скорости по круговому контуру большого радиуса, лежащего в плоскости, перпендикулярной к оси струи будет равна нулю. Из этого следует, что продольный поток завихренности через поверхность, ограниченной этим контуром также примерно равен нулю. Это означает, что отрицательная продольная завихренность должна быть компенсирована положительной завихренностью. Действительно, из графика 5.8б видно появление поочередной отрицательной и положительной продольной завихренности по винтовой линии кромки струи. По сравнению с варикозным режимом истечения струи на участке в 160 калибров спиральный режим течения струи приводит к турбулентному течению.

а)



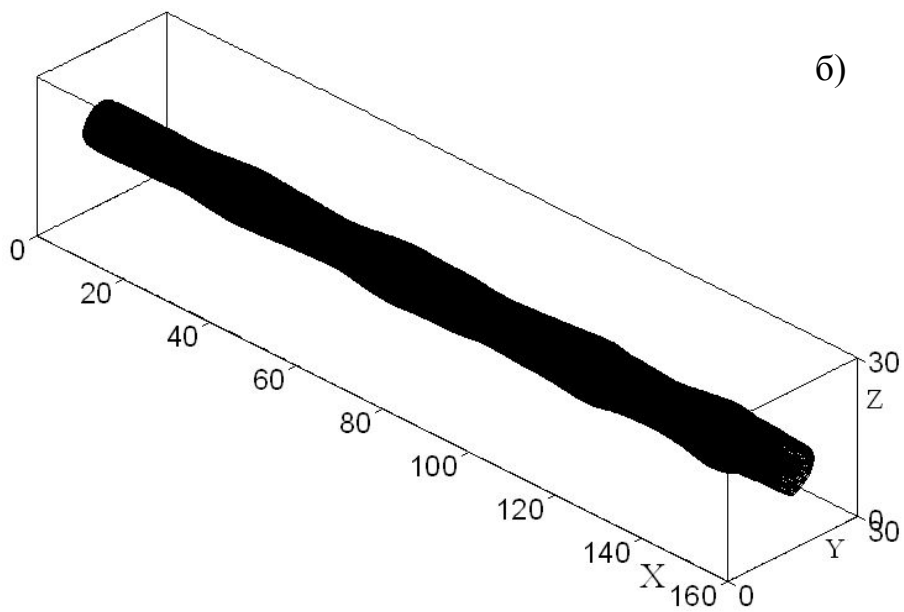


Рисунок 5.5- пространственное мгновенное распределение а) плотности, б) поля завихренности.

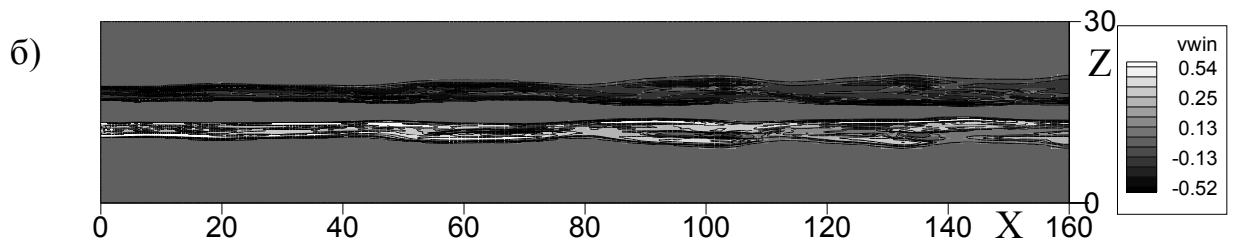
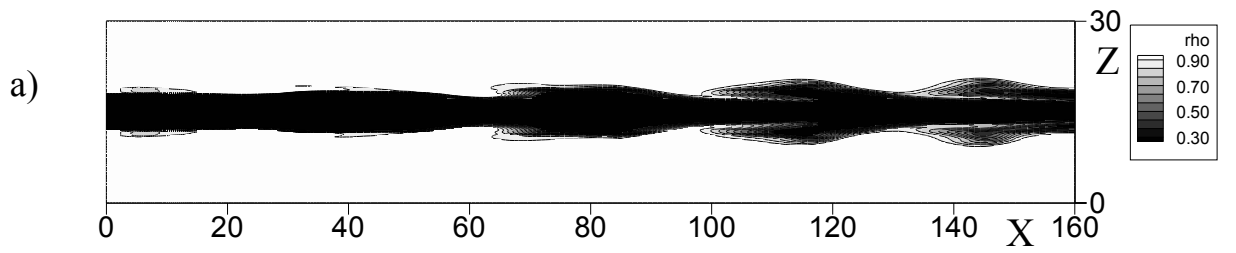
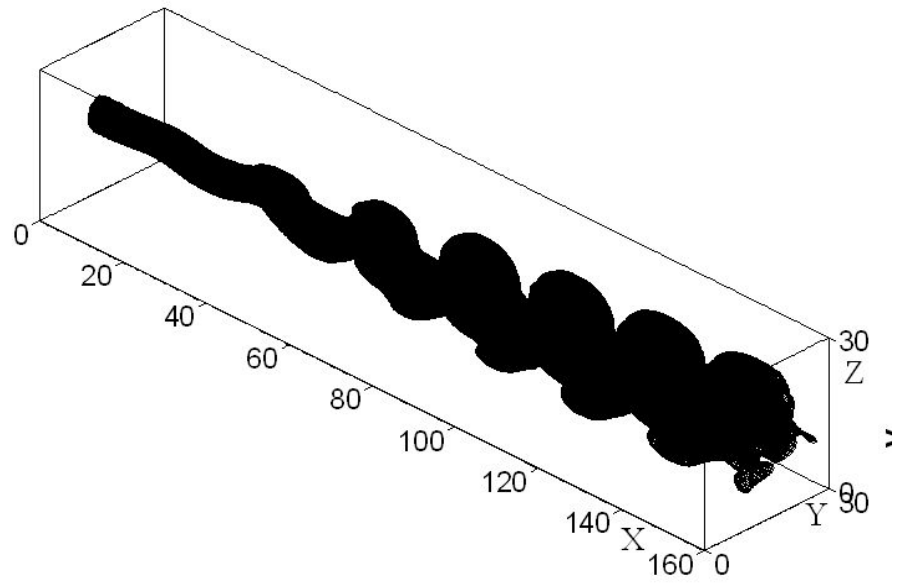


Рисунок 5.6 - Мгновенное распределение а) плотности, б) поля завихренности в плоскости  $xz$  в сечении  $y=15$ .

а)



б)

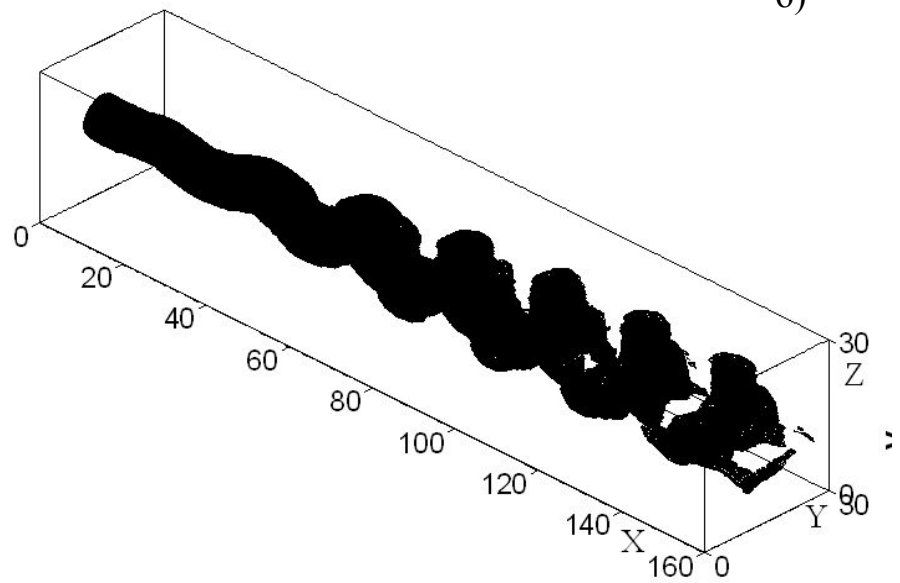


Рисунок 5.7- пространственное мгновенное распределение  
а) плотности, б) поля завихренности

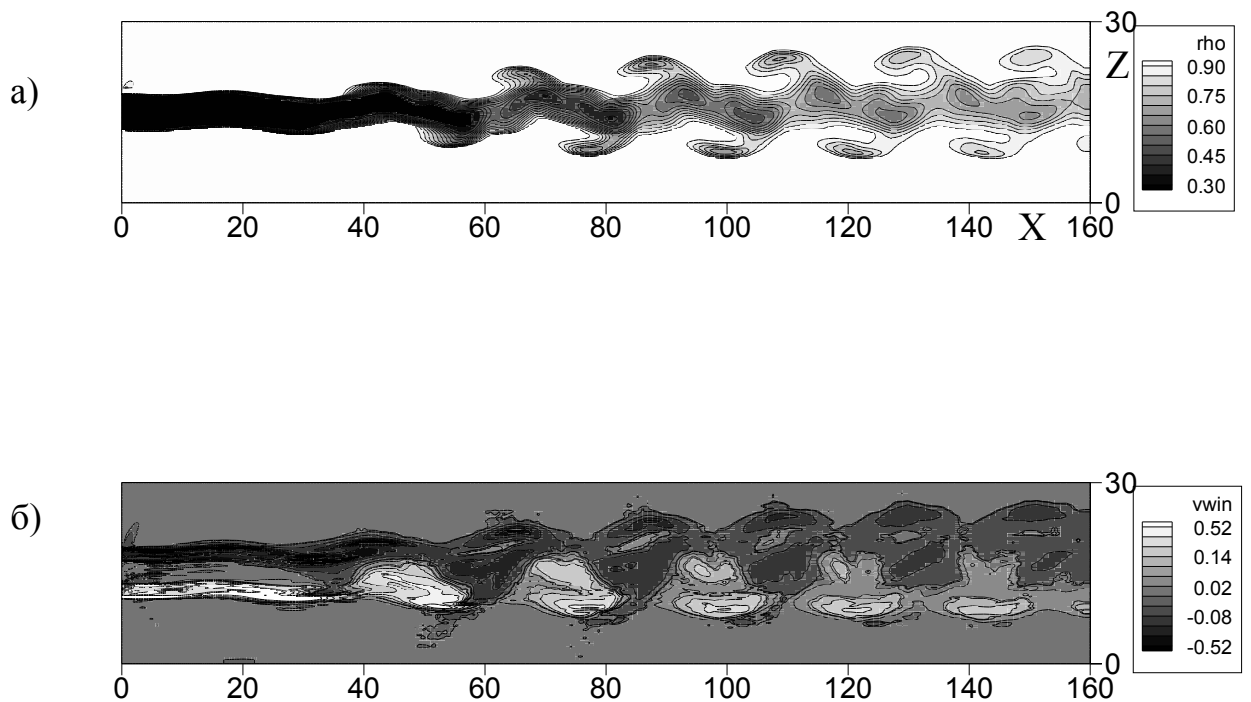


Рисунок 5.8 - Мгновенное распределение а) плотности, б) поля завихренности в плоскости  $xz$  в сечении  $y=15$ .

## 5.6 Выводы по главе

## ВЫВОДЫ

Разработана методика решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения многокомпонентной газовой смеси, основанная на WENO схеме четвертого порядка точности. Проверка метода осуществлялась на примере расчета задачи взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем. Сопоставление расчетов с опытными данными показывает удовлетворительное согласование результатов. С помощью проведенных численных экспериментов выявлено, что с увеличением числа

Маха потока с  $M_\infty=4,5$  и выше формируется безотрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем вследствие уменьшения пограничного слоя вблизи стенки в результате чего интенсивности скачка уплотнения не достаточно для формирования области отрыва. Изучена динамика образования зоны отрыва в зависимости от увеличения скорости набегающего потока а также проведен анализ избыточного давления на стенке в зависимости от числа Маха сверхзвукового течения. С помощью проведенных численных экспериментов выявлено, что с увеличением числа Рейнольдса потока отрывная область существенно уменьшается вследствие уменьшения пограничного слоя у стенки. Получена экспоненциальная зависимость высоты отрывной области от числа Рейнольдса.

Построена численная модель сверхзвукового течения многокомпонентного газа в канале с поперечным вдувом струй. Изучено влияния ширины щели и параметра нерасчетности ударно-волновую структуру течения, на отрыв пограничного слоя в области взаимодействия и на дальнобойность вдуваемой водородной струи. С помощью численных экспериментов изучена ударно-волновая структура и отрывная область, возникающая вследствие взаимодействия скачков уплотнения с пограничным слоем как на верхней, так и на нижней стенках канала, в зависимости от размеров вдуваемой струи. Влияние параметра нерасчетности на высоту вдуваемой струи водорода представлено в виде возрастающей зависимости. Показано уменьшение расширения струи с увеличением ширины щели, которое является следствием возникновения конфузора между вдуваемой струей и отрывной зоной на верхней стенке. Выявлено, что, помимо общеизвестной ударно-волновой картины, здесь появляется дополнительная структура, обусловленная взаимодействием отраженного скачка (б) с пограничным слоем на нижней стенке на некотором расстоянии за струей, что может приводить к повышению смешения воздуха и горючего вследствие обширных зон возвратных течений.

Предложена математическая и численная модель пространственного сверхзвукового турбулентного течения с поперечным вдувом круглых струй. Выявлено влияние степени нерасчетности на глубину проникновения звуковой струи в основной поток. Изучен механизм образования вихревых структур в результате взаимодействия набегающего потока с вдуваемой струей с параметрами нерасчетности  $3 \leq n \leq 50$ . Выявлено, что, начиная с  $n \geq 10$ , в результате взаимодействия струи и обтекающего ее потока появляется дополнительная пара вихрей (10), а также происходит отрыв у стенки, т.е. формируется вихрь (11) в результате прилипания струи к плоскости пластины.

Для сверхзвукового турбулентного течения струи в спутном потоке разработан LES-метод с SGS подсеточной моделью турбулентности. Для решения исходных уравнений была применена ENO схема третьего порядка. При постановке нестационарных граничных условий на входе предложен спектральный генератор флуктуаций скорости для расчета аэродинамического шума, позволяющий воспроизводить анизотропность турбулентных характеристик. Сравнение численных расчетов с опытными данными показали приемлемое совпадение результатов. Численные результаты задания симметричного и спирального режима истечения струи показали, что на одном и том же участке истечения струи спиральный режим быстрее приводит к турбулентному течению.

Предложенные численные модели позволяют изучать сложные физические явления, связанные с возникновением скачков уплотнения и отрывами потока. Полученные результаты демонстрируют широкие возможности при разработке различных схем канала ПВРД. Численные модели могут быть распространены на регазирующие течения газоздушных смесей.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 **Margason, R.J.** Fifty Years of Jet in Cross Flow Research [Текст]/ R.J. Margason// AGARD 72nd FDP Meeting, Paper No. 1- 1993.

2 **Глаголев А.И.** Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком [Текст] / Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. - 1967. - № 3. - С.97-102.

3 **Глаголев А.И.** Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком [Текст] / Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. - 1968.- № 2. - С.99-102.

4 **Спейд Ф.** Исследование взаимодействия газовой струи, вытекающей из поперечной щели, со сверхзвуковым потоком [Текст] / Спейд Ф., Зукоски Е.Е. // Ракетная техника и космонавтика. - 1968. - № 2. - С.16-25.

5 **Шец Д.** Структура поперечных струй, истекающих в сверхзвуковой поток с большой степенью недорасширения [Текст] / Шец Д., Хокинс П.Ф., Леман Х. // Ракетная техника и космонавтика. - 1967. - № 5. - С. 65-69.

6 **Шец Д.** Вдув сверхзвуковой поперечной струи в сверхзвуковой поток [Текст] / Шец Д., Вайнрауб Р.А., Махаффим Р.Е. // Ракетная техника и космонавтика. - 1968. - № 5. - С. 219-221.

7 **McCann G.J.** Experimental Investigation of Supersonic Gaseous Injection into a Supersonic Freestream [Текст] / McCann G.J., Bowersox R.D. // AIAA Journal. - 1996. - Vol. 3, № 2. - P.317-323.

8 **Santiago, J.G.** Crossflow Vortices of a Jet Injected into a Supersonic Crossflow[Текст]/ Santiago, J.G. and J.C. Dutton //AIAA Journal, 35, 5 -1997 - P. 915-917.

9 **Fric T. F.** Vortical structure in the wake of a transverse Jet [Текст]/ Fric T. F., and Roshko A.,// Journal of Fluid Mechanics”, Vol. 279 -1994- P. 1–47.

10 **Gruber M.R.** Transverse Injection from Circular and Elliptic Nozzles into a Supersonic Crossflow [Текст] / Gruber M.R., Nejad A.S., Chen, T.H., and Dutton J.C. // Journal of Propulsion and Power, Vol.16- No.3- 2000- P.449-457.

11 **Ben-Yakar A.** Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows [Текст] / Ben-Yakar A., Mungal M. G., and Hanson, R. K. //Physics of Fluids, 18-026101-2006.

12 **VanLerberghe W. M.** Mixing of a sonic transverse jet injected into a supersonic flow [Текст] / VanLerberghe W. M., Santiago J. G., Dutton J. C. & Lucht R. P. // AIAA Journal, Vol. 38- No. 3- 2000- P. 470–479.

13 **Mays R.B.** Low angle injection into a supersonic flow [Текст] / Mays R.B., Thomas R.H., Schetz J.A. //AIAA Paper 89-2461- July 1989.

14 **McCann G.J** Experimental investigation of supersonic gaseous injection into a supersonic freestream [Текст] / McCann G.J, Bowersox R.D.W. // AIAA journal, 34(2)-1996- P. 317-323.

15 **Eklund D. R.** Study of a supersonic combustor employing swept ramp fuel injectors [Текст] / Eklund D. R., Stouffer S. D., Northam G. B. // J. Propulsion Power. 1997- V. 13- N 6- P. 697–704.

16 **Шец Дж.** Турбулентное течение. Процессы вдува и перемешивания injectors [Текст] / Дж. Шец (Пер. с английского) – М : Мир, 1984 – 247 с.

17 **Tomioka S.** Sonic Injection from Diamond-Shaped Orifices into a Supersonic Crossflow [Текст] / Tomioka S., Jacobsen L.S., and Schetz J.A. // Journal of Propulsion and Power, Vol. 19- No. 1- 2003 - P. 104-114.

18 **Aso S.** A study on mixing phenomena in three-dimensional supersonic flow with circular injection [Текст] / Aso S., Tannou M., Maekawa S., Okuyama S., Ando Y., Yamane Y. and Fukuda M. // Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 32nd, Reno, NV - Jan 10-13- 1994 (AIAA-1994-707)

19 **Mclure T. H.** CFD Analysis of Circular Transverse Injector for a Scramjet Combustor [Текст] / Mclure T. H., Ervin E. // AIAA 34th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV- 1-15-1996.

20 **Kawai S.** Mechanisms of jet mixing in a supersonic crossflow: a study using large-eddy simulation [Текст] / Kawai S. and Lele S. K. // Center for Turbulence Research Annual Research Briefs- 2007.

21 **Kawai S.** Large-eddy simulation of jet mixing in a supersonic turbulent crossflow [Текст] / Kawai S. and Lele S. K. // Center for Turbulence Research Annual Research Briefs- 2008.

22 **Kawai S.** Dynamics and mixing of a sonic jet in a supersonic turbulent crossflow [Текст] / Kawai S. and Lele S. K. // Center for Turbulence Research Annual Research Briefs- 2009.

23 **Chenault C.F.** Numerical investigation of supersonic injection using a Reynolds-stress turbulence model [Текст] / Chenault C.F., Beran P.S., R.D.W. Bowersox. // AIAA J. 37(10) -1999- P.1257-1269

24 **Dickmann D.A.** Jet in Supersonic Crossflow on a Flat Plate [Текст] / Dickmann D.A. and Lu F.K. // AIAA-2006-3451- 2006.

25 **Lu F. K.** Topology of supersonic jet interaction flowfields at high pressure ratios [Текст] / Lu F. K., and Dickman D. A. // 13th International Symposium on Flow Visualization, Nice, France -Paper 235- July 1-4- 2008.

26 **Dickmann D.A.** Shock/Boundary Layer Interaction Effects on Transverse Jets in Crossflow Over a Flat Plate [Текст] / Dickmann D.A. and Lu F.K. // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit 23 - 26 June 2008, Seattle, Washington, AIAA 2008-3723.

27 **Smith B.R.** The  $\kappa - \kappa_l$  turbulence model and wall layer model for compressible flows [Текст] / Smith B.R. //AIAA Paper 90-1483- 1990.

28 **Genin F.** Study of compressible turbulent flows in supersonic environment by Large-Eddy Simulation [Текст] / Genin F. / Ph.D. Dissertation, Georgia Institute of Technology- 2009.

29 **Foster L.E.** Computation of Transverse Injection into Supersonic Crossflow with Various Injector Orifice Geometries [Текст] / Foster L.E., Engblom W.A. // NASA TM/-2003-212878 (AIAA- 2004-1199).

30 **SUN De-chuan** Computation of Supersonic Turbulent Flowfield with Transverse Injection [Текст] / SUN De-chuan, HU Chun-bo, CAI Ti-min. // Applied Mathematics and Mechanics. English Edition. Vol.23, No 1- Jan 2002 - P. 107-113.

31 **Chai X.** Simulations of high speed turbulent jets in crossflow [Текст] / Chai X., Mahesh K. // AIAA paper 2010-4603.

32 **Chai X.** Simulations of high speed turbulent jets in crossflows[Текст] / Chai X., Mahesh K. // AIAA Paper 2011-650.

33 **Park N.** Numerical and modeling issues in LES of compressible turbulent flows on unstructured grids [Текст] / Park N. and Mahesh K. // AIAA Paper –722-2007.

34 **Hao He** Three-Dimensional Simulation of Transverse Injection in a Supersonic Flow by the CESE Method [Текст] / Hao He, S.-T. John Yu. // AIAA 2003-0375.

35 **Chang S.C.** The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element – A New Approach for Solving the Navier Stokes and Euler Equations [Текст] / Chang S.C. // J. Comput. Phys., 119- 1995- P. 295.

36 **Orth R.C.** An experimental and comparative study of jet penetration in supersonic flow [Текст] / Orth R.C, Funk J.A. // J. Spacecraft, Vol. 4, No. 9-1967- P. 1236.

37 **В. Г. Крупа.** О построении разностных схем повышенного порядка точности для гиперболических уравнений [Текст] / В. Г. Крупа. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 38:1-1998- С. 85–98

38 **Harten A.** Uniformly High-Order Nonoscillatory Schemes I[Текст] / Harten A., Osher S. // SIAM J. Numer. Anal., 24-1987- P. 279-309

39 **Amano R.S.** Numerical Simulation of Supersonic Flowfield with Secondary Injection[Текст] / Amano R.S., Sun D. // The 24th Congress of ICAS, Yokohama-September 2004.

40 **Huang W.** Numerical prediction on the interaction between the incident shock wave and the transverse slot injection in supersonic flows [Текст] / Huang

W., Zhen-guo Wang , Wu J., Shi-bin Li. //Aerospace Science and Technology-V. 28, № 1. -2013- P. 91-99.

41 **Kim J.H.** Numerical study of mixing enhancement by shock waves in model scramjet engine [Текст] / Kim J.H., Yoon Y., Jeung I.S., Huh H., Choi J.Y. // AIAA Journal. 41 (6)- 2003- P. 1074–1080.

42 **Liou W.W.** Turbulence model assessment for shock wave/turbulent boundary-layer interaction in transonic and supersonic flows[Текст] / Liou W.W., Huang G., Shih T.H. // Computers & Fluids. № 29-2000- P. 275–299.

43 Knight D. RTO WG 10: CFD validation for shock wave turbulent boundary layer interactions [Текст] / Knight D., Yan H., Panaras A., Zheltovodov A.//AIAA Paper. N 2002-0437.

44 **Федорова Н.Н.** Расчет взаимодействия падающего косоугольного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине [Текст] /Федорова Н.Н. Федорченко И.А. // Прикладная механика и техническая физика Т.45– №3– 2004– С. 61-71.

45 **Dolling D.S.** Fifty years of shock-wave/boundary-layer interaction research: what next [Текст] / Dolling D.S. // AIAA J. – 2001. – Vol.39. – P. 1517–1531.

46 **Settles G.S.** Swept shock wave/boundary layer interactions – tutorial and update [Текст] / Settles G.S., Dolling D.S. // AIAA J. – 1990. – P. 39-0375.

47 **Délery J.** Shock- wave boundary layer interactions [Текст] / Délery J., Marvin J.G. // AGARDograph – 1996. – №.280- ISBN 92-835-159-6.

48 **Fernholz, Н.Н.** A Survey of Measurements and Measuring Techniques in Rapidly Distorted Compressible Turbulent Boundary Layers [Текст] / Fernholz, Н.Н., Smits, A.J., Dussauge, J.P., Finley, P.J. (eds.) // AGARDograph NATO, Neuilly s/Seine – 1989 – 315.

49 **Краснов Н.Ф.** Аэродинамика отрывных течений [Текст] / Краснов Н.Ф., Кошевой В.Р., Калугин В.Т. - Москва: Высш. шк, 1988. - 351 с.

50 **Humble R.A.** Experimental study of an incident shock wave/turbulent boundary layer interaction using PIV[Текст] / Humble R.A., Scarano F.,

Oudheusden B.W. // 36<sup>th</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. – California, 2006- №3361. – P. 1-16.

51 **Holder D.W.** The Interaction Between Shock Waves and Boundary Layers [Текст] / Holder D.W., Percy H.H., Gadd G.E. // ARC Technical Report – 1955.

52 **Kuehn D.M.** Experimental Investigation of the Pressure Rise Required for the Incipient Separation of Turbulent Boundary Layers in Two-Dimensional Supersonic Flow [Текст] /Kuehn D.M // NASA Memo 1-21-59A – 1959.

53 **Huerre P.** Open Shear Flow Instabilities [Текст] / Huerre P. // Chapter 4 of the Book “Perspectives in Fluid Dynamics”, A Collective Introduction to Current Research. - Cambridge University Press – 2000.

54 **Michalke A.** On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile [Текст] / Michalke A. // J. Fluid Mech – 1964. - №19. - P. 543-556.

55 **Michalke A.** On the spatially growing disturbances in an inviscid shear layer [Текст] / Michalke A. // J. Fluid Mech. – 1965. - №23. – P. 521-544.

56 **Monkewitz P. A.** Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers [Текст] / Monkewitz P. A. and Huerre P. // Phys. Fluids. – 1982. - №23. – P. 1137-1143.

57 **Winant C.D.** Vortex pairing: the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number [Текст] / Winant C.D., Browand F.K. // J. Fluid Mech. – 1974. - №63. – P. 237-255.

58 **Brown G.L.** On the density effects and large structures in turbulent mixing layers [Текст] /Brown G.L., Roshko A. // J. Fluid Mech. – 1974. - №64. – P. 775-816.

59 **Bogdanoff D.W.** Compressibility effects in turbulent shear layers [Текст] / Bogdanoff D.W. // AIAA J. – 1983. - №21. - P. 926-927.

60 **Papamoschou D.** The compressible turbulent shear layer: an experimental study [Текст] / Papamoschou D., Roshko A. // J. Fluid Mech. – 1988. - №197. – P. 453-477.

- 61 **Chinzei N.** Spreading of two-stream supersonic turbulent mixing layers [Текст] / Chinzei N., Masuya G., Komuro T., Murakami A., Kudou K. // Phys. Fluids. – 1986. - №29. – P. 1345-1347.
- 62 **Oster D.** The forced mixing layer between parallel streams [Текст] / Oster D., Wygnanski I. // J. Fluid Mech. – 1982. - №123. – P. 91-130.
- 63 **Samimy M.** Effects of compressibility on the characteristics of free shear layers [Текст] / Samimy M., Elliot G.S. // AIAA J. – 1990. - №28. – P. 439-445.
- 64 **Elliot G.S.** Compressibility effects in free shear layers [Текст] / Elliot G.S., Samimy M. // Phys. Fluids. – 1990. - № A 2. – P. 1231-1240.
- 65 **Goebel S. G.** Experimental study of compressible turbulent mixing layers [Текст] / Goebel S. G., Dutton J.C. // AIAA Journal. – 1991. - Vol. 4., №29. – P. 538-546.
- 66 **Cheng T.S.** Numerical simulations of underexpanded supersonic jet and free shear layer using WENO schemes [Текст] / Cheng T.S., Lee K.S. // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2005. - №26. – P. 755-770.
- 67 **Dale A.** Numerical simulation of a confined supersonic shear layer [Текст] / Dale A. Hudson / PhD Thesis. – 1996. – P. 1-181.
- 68 **Reichert R.S.** Numerical simulation of compressible plane jets [Текст] / Reichert R.S., Biringen S. // Mechanics Research Communications. – 2007. -№34. – P. 249-259.
- 69 **Tang W.** Numerical simulation of the Growth of instabilities in Supersonic Free Shear Layers [Текст] / Tang W., Komerath N.M., Sankar L.N. // J. Propulsion. – 1990. - Vol. 6., №4. – P. 455-460.
- 70 **Tang W.** Mixing enhancement in supersonic free shear layers [Текст] / Tang W., Sankar L.N., Komerath N. // AIAA 2<sup>nd</sup> Shear Flow Conference AIAA. - 1989. - №89 (0981).
- 71 **Sarkar S.** The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow [Текст] / Sarkar S. // Journal of Fluid Mechanics. – 1995. - №282. - P. 163-186.
- 72 **Xiao-Tian Shi** Numerical simulations of compressible mixing layers with a discontinuous Galerkin method [Текст] / Xiao-Tian Shi, Jun Chen, Wei-Tao Bi,

Chi-Wang Shu, Zhen-Su She // Acta Mech. Sin. – 2011. – Vol.3, №27. – P. 318-329.

73 **Pope S.B.** Turbulent flows [Текст] / Pope S.B. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 771 p.

74 **Хинце. И.О.** Турбулентность ее механизм и теория flows [Текст] / И.О. Хинце – Москва: Физматгиз, 1963 г. – 680 с.

75 **Монин А.С.** Статистическая гидромеханика: механика турбулентности. Т. 2. [Текст] / Монин А.С., Яглом А. М. – М.: Наука, 1992. – 720 с.

76 **Волков К.Н.** Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений [Текст] / Волков К.Н., Емельянов В.Н. – М.: Физматлит, 2008 г. – 368 с.

77 **Monkewitz P.A.** Mixing by “side jets” in strongly forced and self-excited round jet [Текст] / Monkewitz P.A. Pfizenmaier E. // Phys.fluids–1991–A3(5) –P 1356-1361.

78 **Michalke A.** On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer // J. Fluid Mechanics. – 1965. – Vol. 23. – P. 521-544.

79 **Bruin I.** Direct and Large-Eddy Simulation of the Spatial Turbulent Mixing Layer: thesis [Текст] / Irene de Bruin. PhD: 14.09.2001– Enschede, 2001. – 160 p.

80 **Stanley S.** Simulations of Spatially Developing Two-Dimensional Shear Layers and Jets [Текст] / Stanley S., Sarkar S. // Theoretical Computational Fluid Dynamics. – 1997. – Vol. 9. – P. 121-147.

81 **Sato H.** The stability and transition of a two-dimensional jet [Текст] / Sato H. // J. Fluid Mechanics. –1960. – Vol. 7, No 1. – P. 53-80.

82 **Rockwell D.O.** Natural breakdown of planar jets [Текст] / Rockwell D.O., Niccolls W.O. // Trans. ASME J. Basic Engrg. – 1972. – Vol. 1. – P. 720-730.

83 **Cheng T.S.** Numerical simulations of underexpanded supersonic jet and free shear layer using WENO schemes [Текст] / Cheng T.S., Lee K.S. // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2005. – Vol. 26. – P. 755-770.



84 **Reichert R.S.** Numerical simulation of compressible plane jets [Текст]/ Reichert R.S., Biringen S. // Mechanics Research Communications. – 2007. – Vol. 34. – P. 249-259.

85 **Jarrin N.** Synthetic inflow boundary conditions for the numerical simulation of turbulence: thesis PhD. [Текст] / Nicolas Jarrin.– Manchester, 2008. – 258 p.

86 **Rogers M.M.** The three dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin-Helmholtz roll-up [Текст] / Rogers M.M. and Moser R.D. // Journal of Fluid Mechanics. – 1992. – Vol.243. – P. 183–226.

87 **Kim J.** Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number [Текст] / Kim J., Moin P., and Moser R. // Journal of Fluid Mechanics. – 1987. – Vol. 177. – P. 133–166.

88 **Kaltenbach H.J.** Study of flow in a planar asymmetric diffuser using large eddy simulation[Текст] / Kaltenbach H.J, Fatica MMittal., R., Lund T.S., and Moin P. // Journal of Fluid Mechanics. – 1999. – P. 151–185.

89 **Friedrich R.** Analysing turbulent backward-facing step flow with the lowpass-filtered Navier-Stokes equation [Текст] / Friedrich R., Arnal M. // Journal of Wind Engineering and its Applications. – 1990. – Vol. 35. – P. 101–128.

90 **Breuer M.** Large-eddy simulation of turbulent flow through a straight square duct and a 180 bend [Текст] / Breuer M. and Rodi W. // J. Fluid Mechanics and its Applications. – 2007. – Vol. 26. – P. 273–285.

91 **Akselvoll K.** Large-eddy simulation of turbulent confined coannular jets[Текст] / Akselvoll K. Moin P. // Journal of Fluid Mechanics. – 1996. – Vol. 315. – P. 387–411.

92 **Lund T.** Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations [Текст] / Lund T., Wu X., Squires D. // Journal of Computational Physics. – 1998. – Vol. 140. – P. 233–258.

93 **Klein M.** A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large-eddy simulations [Текст] / Klein M., Sadiki

A., and Janicka J. // Journal of Computational Physics. – 2003. – Vol. 186. – P. 652–665.

94 **Glaze D.J.** Stochastic inlet conditions for large-eddy simulation of a fully turbulent jet [Текст] / Glaze D.J. and Frankel H. // AIAA Journal. – 2003. – Vol. 41, No 6. – P. 1064–1073.

95 **Kraichnan R.H.** Diffusion by a random velocity field [Текст] / Kraichnan R.H. // Physics of Fluids. – 1969. – Vol. 13, No 1. – P. 22–31.

96 **Rogallo R.S.** Numerical experiments in homogeneous turbulence [Текст] / Rogallo R.S. // Nasa TM-81315. – 1981.

97 **Lee S.** Simulation of spatially evolving turbulence and the applicability of Taylor's hypothesis in compressible flow [Текст] / Lee S., Lele S.K., and Moin P. // Physics of Fluids A. – 1992. – Vol. 4, No 7. – P. 1521–1530.

98 **Le H.** Direct numerical simulation of turbulent flow over backward-facing step [Текст] / Le H., Moin P., Kim J // Journal of Fluid Mechanics. – 1997. – Vol. 330. – P. 349–373.

99 **Davidson L.** Hybrid LES-RANS: Inlet Boundary Conditions for flows including recirculation [Текст] / Lars Davidson // TS5 – 5<sup>th</sup> International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena TU Munich – 2007. – Vol. 2. – P. 689–694.

100 **Fung J.C.** Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes [Текст] / Fung J.C., Hunt J.C., Malik N.A. Perkins R.J. // Journal of Fluid Mechanics. – 1992. – Vol. 236. – P. 281–318.

101 **Eggers J.** Effect of dissipation fluctuations on anomalous velocity scaling in turbulence [Текст] / Eggers J., Grossmann S. // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45, No 4. – P. 2360–2369.

102 **Адамьян Д. Ю. К.** Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений. [Текст] / Адамьян Д. Ю., Стрелец М. Х., Травин А. К. // Математическое моделирование. – 2011. – Том 23, № 7. – С.3-19

103 **Smirnov A.** Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling. [Текст] / Smirnov A., Shi S., Celik I. – Morgantown. – WV26506-6106.

104 **Batten P.** Smart sub-grid-scale models for les and hybrid RANS/LES [Текст] / Batten P., Goldberg U., Kang E., Chakravarthy S. // 6<sup>th</sup> AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference. – 27-30 June 2011.

105 **Kee R.J.** CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetics [Текст] / Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A. // SANDIA Report SAND89-8009. - 1989.

106 **Лапин Ю.В.** Внутренние течения газовых смесей [Текст] / Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. - Москва: Наука, 1989. – 366 с.

107 **Гиршфельдер Д.** Молекулярная теория газов и жидкостей [Текст] / Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. - Москва: ИЛ, 1961. - 357с.

108 Методы расчета турбулентных течений [Текст] / Сб. трудов –Москва «Мир», 1984 - 463 с.

109 **Wilcox D.C.** A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-share flow [Текст] / D.C. Wilcox // AIAA – 1993. –р. 93–2905.

110 **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. [Текст] / Г. Шлихтинг - Москва: Наука, 1974. - 698 с.

111 **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. [Текст] / Л.Г. Лойцянский - Москва: Наука, 1987. - 361с.

112 **Poinsot T.J.** Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows [Текст] / Poinsot T.J., Lele S.K. // Journal of Computational Physics. - 1992. - № 101. - P.104-129.

113 **Allen J.S.** Numerical solution of the compressible Navier-Stokes equation for the laminar near weak [Текст] / Allen J.S., Sheng S.I. // Physics of Fluids. - 1970. - Vol.13, №1. - P. 37-52.

114 **Eaton R.R.** Three-dimensional numerical and experimental flow-field comparisons for sphere-cones [Текст] / Eaton R.R. // Journal of Spacecraft. - 1970. - Vol.7, № 2. - P.203-204.

- 115 **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. [Текст] / П. Роуч - Москва: Мир, 1980. - 616 с.
- 116 **Моретти Д.** О новом подходе к расчету дозвуковых течений в каналах [Текст] / Моретти Д., Пандольфи М. // Ракетная техника и космонавтика. - 1981. - № 6. - С.42-52.
- 117 **Кенцер Ч.** Дискретизация граничных условий на движущихся границах В сб. науч. статей: Численные методы в механике жидкостей. [Текст] / Кенцер Ч. - Москва: Мир, 1973. - С.62-72.
- 118 **Шоссе Д.С.** Численное моделирование работы плоского воздухосборника с помощью диагональной неявной схемы [Текст] / Шоссе Д.С., Пуллиам Т.Х // Ракетная техника и космонавтика. - 1981. - № 3. - С.33-41.
- 119 **Чакраварти С.Р.** Уравнения Эйлера, неявные схемы и граничные условия [Текст] / Чакраварти С.Р. // Аэрокосмическая техника. - 1981. - Т.2, № 2. – С.58-67.
- 120 **Thompson K.W.** Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems [Текст] / Thompson K.W. // Journal of Computational Physics - 1987. - № 68. - P.1-24.
- 121 **Harten A.** Uniformly High Order Accurate Non-oscillatory Schemes, III [Текст] / Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.R. // Journal of Computational Physics. - 1987. - № 71. - P.231-303.
- 122 **Liu X.** Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes [Текст]/ Liu X., Osher S., Chan T. // Journal of Computational Physics. - 1994. - Vol.115. – P. 200-212.
- 123 **Fedkiw R.P.** High Accuracy numerical Methods for Thermally Perfect Gas Flows with Chemistry [Текст] / Fedkiw R.P., Merriman B., Osher S. // Journal of Computational Physics. - 1997. - №132. - P. 175-190.
- 124 **Harten A.** Some Results on Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes [Текст]/ Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S.R. // Applied Numerical Mathematics. - 1986. - № 2. - P.347-377.

125 **Шунь Д.Ш.** Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU- факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации [Текст]/ Шунь Дж.Ш., Юнь С. // Аэрокосмическая техника. - 1990. - № 10. - С.102-113.

126 **Кикоина И. К.** Таблицы Физических величин. [Текст]/ И. К. Кикоина Москва: Атомиздат, 1976. 1008с.

127 **Абрамович Г.Н.** Теория турбулентных струй. [Текст]/ Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю. и др. - Москва: Наука, 1984. - 715 с.

128 **Viti V.** Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field. [Текст]/ Viti V., Neel R., Schetz J. // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21. April.

129 **Fureby C.** Large-Eddy Simulation of Turbulent Anisohoric Flows [Текст]/ C. Fureby //AIAA Journal, Vol. 33, No 7- July 1995.

130 **Robinet J. Ch.** Two-dimensional laminar choc wave boundary interaction [Текст]/ Robinet J. Ch., Daru V., Tenaud Ch. // AIAA Journal 2004-P.1-6

131 **Pirozzoli S.** Analysis of unsteady effects in shock boundary layer interaction [Текст] / Pirozzoli S., Larsson J., Nichols J.W. и др. // Center for turbulence research, proceedings of the summer program 2010- P. 153-164

132 **Eggers, J.M.** Turbulent mixing of coaxial compressible hydrogen-air jets [Текст]/ Eggers, J.M. // Tech. Rep. NASA-TN-D-6487-1971.

133 **Schetz J.A.** Interaction Shock Shape for Transverse Injection in Supersonic Flow [Текст] / Schetz J.A // Journal of Spacecraft and Rockets. 1970- Vol. 7. No. 2-P. 143-149

134 **Broze G.** Transition to chaos in a forced jet: Intermittency, Tangent bifurcation and hysteresis [Текст] / Broze G. Hussain F.// J. Fluid mechanics – 1996–№ 311 – P. 37-71

135 **Kusek S.M.** Seeding of helical modes in the initial region of an axisymmetric jet [Текст] /Kusek S.M., Corke T.C., Reisenhel R. //Exp.Fluid – 1990 - №10 – P.116-124.

136 **Бекетаева А.О.** Применение ено-схемы (essentially nonoscillatory) для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси. [Текст] / Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. // Вычислительные технологии, Новосибирск, 2007. Т. 12. № S4. С. 17-25.

137 **Бекетаева А.О.** Пространственное сверхзвуковое течение совершенного газа с поперечным вдувом струй. [Текст] / Бекетаева А.О. // Математический журнал, 2010- т. 10, № 4(38)- С. 19-27.

138 **Бекетаева А.О.** Численное исследование пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом струй. [Текст]/ Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. //Прикладная механика и техническая физика, Новосибирск, 2011 г.- Т.52, №6- С. 1-10

139 **Beketaeva A.O.** Numerical study of spatial supersonic flow of a perfect gas with transverse injection of jets / Beketaeva A.O., A. Zh. Naimanova // JOURNAL OF APPLIED MECHANICS AND TECHNICAL PHYSICS- 2011- V: 52,I: 6 -P. 896-904 DOI : 10.1134/S0021894411060071

140 **Бекетаева А.О.** Исследование вихревых структур за поперечной струей в сверхзвуковом потоке[Текст]/ Бекетаева А.О., Дуйшеналиев Т.Б. // Доклады 2-я международная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» 5-7 сентября 2013, Бишкек. 5

141 **Бекетаева А.О.** Пространственное сверхзвуковое течение совершенного газа с поперечным вдувом струй [Текст] / Бекетаева А.О., Дуйшеналиев Т.Б. // Известия КГТУ, ISSN 1694-55-57- 2013-№ 29-С. 124-132

142 **Бекетаева А.О.** Numerical simulation of the mixing in planar shear layer. [Текст] / Makasheva A., Belyayev Ye., Beketaeva A. // Совместный выпуск: Вычислительные технологии, Новосибирск, Том 20 и Вестник КазНУ им. Аль-Фараби, Серия математика, механика и информатика, 2015-№ 3 (86)- С. 59-64.

143 **Beketaeva A.** Investigation of Vortex Structures for Supersonic Jet Interaction Flowfield [Текст] / Beketaeva A., A.H. Abdalla, Ye. Moisseyeva. // Applied Mechanics and Materials, 2015-Vol.798-P.546-550.

144 **Beketaeva A.** Third order ENO Scheme on Non-uniform Grid for Supersonic Flows II [Текст] / Ye. Moisseyeva, A. Naimanova, A. Beketaeva. A // Applied Mechanics and Materials, 2015-Vol.798-P.518-522.

145 **Beketaeva A.** Non-uniform ENO Scheme for Simulation of Supersonic Flows [Текст] /Ye. Moisseyeva, A. Naimanova, A. Beketaeva.//the International Conference “Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education” (CITech–2015) Almaty, part III-V. 98,№ 3-P. 33-42.

146 **Бекетаева А.О.** Построение ENO-схемы на неравномерной сетке [Текст] / Моисеева Е.С., Найманова А.Ж., Бекетаева А.О. // Тезисы докладов Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», Алматы, 1-5 июня 2015 г. - с. 349-352.

147 **Бекетаева А.О.** Метод предобуславливания для существенно дозвуковых течений[Текст] / Бекетаева А.О., Елубаева Ш.М. //Международная конференция «Актуальные проблемы математики и математического моделирования» , Алматы, Казахстан, 1-5 июня 2015 г. – с. 338-342.

148 **Beketaeva A.O.** Mathematical modeling of shock-wave structures in interaction of shocks with the boundary layers on the bottom and top walls[Текст] / Beketaeva A.O., Shakhan N.S.// Abstracts of International science conference «Actual problems of mathematics and mathematical modeling», Almaty, 1-5 of June 2015. - p. 364.

149 **Бекетаева А.О.** Построение WENO-схемы для решения задачи сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси [Текст] / Бекетаева А.О., Абдалла А., Шахан Н.Ш. // Математический журнал Института математики и математического моделирования МОН РК, Алматы. – 2015. – Том 15, №2 (56). – с.5-21.

150 **Бекетаева А.О.** Влияние параметра нерасчетности на ударно-волновую структуру в сверхзвуковом канале со вдувом струи [Текст] / Бекетаева А.О., Шахан Н.Ш. // Вестник КазНУ. Серия математики, механика, информатики, Алматы "Қазақ университеті". – 2015. – №2 (85). – с.58-68.

151 **Бекетаева А.О.** Математическое моделирование ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения с пограничными слоями нижней и верхней стенки [Текст] / Бекетаева А.О., Шахан Н.Ш. // Совместный выпуск научных журналов «Вестник КазНУ. Серия математики, механика, информатики» (Казахстан) и «Вычислительные технологии» (Новосибирск). – 2015.

152 **Бекетаева А.О.** Моделирование взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем [Текст]/ Бекетаева А.О. // Математический журнал, 2015- т. 15 № 3(57)-С. 56-71.

153 **Бекетаева А.О.** Математическое моделирование сверхзвукового течения при наличии поперечного вдува струи с применением  $k-\omega$  модели турбулентности [Текст]/ Моисеева Е.С., Бекетаева А.О. // В сборнике: Science and Practice: new Discoveries Proceedings of materials the international scientific conference. Czech Republic, Karlovy Vary - Russia, Moscow, 24-25 October 2015. Editors I.M. Shvec, L.A. Ismagilova, V.A.Gur'eva, E.A.Telegina, V.I.Sedenko. Киров 2015 - С. 35-42.

154 **Бекетаева А.О.** Модели пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом струй [Текст] / Бекетаева А.О., Дуйшеналиев Т.Б.//Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. 2015 - № 2 (30) - С. 119-129.

155 **Бекетаева А.О.** Вихревые структуры за поперечной струей в сврхзвуковом потоке при больших значениях параметра нерасчетности. [Текст] / Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Боуель П. // Прикладная механика и техническая физика, Новосибирск 2015-Т.56, №5- С. 1-14.

156 **Beketaeva A.O.** Vortical structures behind a transverse jet in a supersonic flow at high jet to crossflow pressure ratios[Текст] / Beketaeva A.O., P. Bruel, and



A. Zh. // ISSN 0021-8944 Journal of Applied Mechanics and Technical Physics-2015-Vol. 56, No. 5-P. 777–788

157 **Бекетаева А.О.** Исследование структуры взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым потоком [Текст] / Бекетаева А.О. // Наука, новые технологии и инновации, 2015 - №6 - С. 3-11.

158 **Бекетаева А.О.** Влияние толщины пограничного слоя на структуру сверхзвукового течения с ударной волной [Текст] / Бекетаева А.О. // Наука, новые технологии и инновации, 2015- №6 - С. 15-24

159 **Бекетаева А.О.** Построение ENO-схемы на неравномерной сетке для моделирования сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси [Текст] / Моисеева Е.С., Бекетаева А.О. // Математический журнал Институт математики МОН РК, КАЗАХСТАН, рекомендуемый ККСОН МОН РК. - 2015. - Т.15, №4. - С. 78-93.

160 **Бекетаева А.О.** Численное моделирование взаимодействия ударной волны с пограничным слоем в плоском сверхзвуковом потоке с вдувом струи [Текст] / Бекетаева А.О., Моисеева Е.С., Найманова А.Ж. // Теплофизика и аэромеханика- – 2016 – том 23, № 1 – С.181-191.

161 **Beketaeva A.O.** Numerical simulations of shock-wave interaction with a boundary layer in the plane supersonic flows with jet injection [Текст] / Beketaeva A.O., Moisseyeva Ye.S., A. Zh. Naimanova. // Thermophysics and Aeromechanics. – 2016. – Vol. 23, No. 2. – P. 173-183.

162 **Бекетаева А.О.** Исследование взаимодействий поперечной струи со сверхзвуковым потоком в зависимости от параметра нерасчетности [Текст] / Бекетаева А.О. // Известия Национальной академии наук Республики Казахстан серия физико-математическая № 1.(305) 2016 с 46-58

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Определим  $R(\cdot; \bar{w}^n)$  следующим образом:

$$R(x; \bar{w}) = \frac{d}{dx} H_m(x; W) \quad (\text{A.1})$$

где  $H_m(x; W)$  - есть кусочно-полиномиальная функция степени  $m$ , которая интерполирует функцию  $W(x)$  на  $\{x_j\}$  точках, т.е.:

$$H_m(x_j; W) = W(x_j).$$

Согласно [121, с.242] полином  $H_m(x; W)$  должен удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} 1) \frac{d^k}{dx^k} H_m(x; W) &= \frac{d^k W}{dx^k} + O(h^{m+1-k}) \\ 2) TV(H_m(\cdot; W)) &\leq TV(W) + O(h^{m+1}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Функция  $W(x)$  является первообразной для функции  $w(x)$ , то есть:

$$W(x) = \int_{x_0}^x w(y) dy$$

Используя среднее  $\bar{w}_j$  для кусочно-гладкой функции  $w(x)$ :

$$\bar{w}_j = \frac{1}{h_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w(y) dy, \quad \text{где} \quad h_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$$

можно определить дискретные значения функции  $W(x)$  следующим образом:

$$W(x_{j+1/2}) = \sum_{i=i_0}^j h_i \bar{w}_i, \quad W(x_{j-1/2}) = \sum_{i=i_0}^j h_i \bar{w}_i - \bar{w}_j h_j, \quad (\text{A.3})$$

$$W(x_{j+3/2}) = \sum_{i=i_0}^j h_i \bar{w}_i + \bar{w}_{j+1} h_{j+1}, \quad W(x_{j-3/2}) = \sum_{i=i_0}^j h_i \bar{w}_i - \bar{w}_j h_j - \bar{w}_{j-1} h_{j-1}$$

Функция  $R(\cdot; \bar{w}^n)$ , определенная согласно (Б.1), будет удовлетворять свойствам (2.31) следующим образом.

Из (А.1) и первого свойства (А.2) вытекает следующее равенство:

$$\frac{d^l}{dx^l} R(x; \bar{w}) = \frac{d^l}{dx^l} w(x) + O(h^{m-l})$$

Если в этом равенстве положить  $l = 0$ , то получим:

$$R(x; \bar{w}) = w(x) + O(h^m)$$

которое удовлетворяет первому свойству (2.31).

Второе из условий (2.31) для функции  $R(x; \bar{w})$  вытекает из (А.1) и (А.2) следующим образом:

$$\bar{R}(x; \bar{w}) = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} R(x; \bar{w}) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{d}{dx} H_m(x; W) dx = \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{h} (H_m(x_{j+1/2}; W) - H_m(x_{j-1/2}; W)) = \frac{1}{h} (W(x_{j+1/2}) - W(x_{j-1/2})) = \bar{w}_j$$

И, наконец, третье свойство (2.31) следует из того, что полином  $H_m(x; W)$  удовлетворяет второму условию (A.2).

Обратимся к выбору полинома  $H_m(x; W)$ . В качестве него примем формулу Ньютона, которая имеет вид:

$$H_m(x; W) = H_{m-1}(x; W) + c^m \prod_{k=k_{min}^{m-1}}^{k_{min}^{m-1}+m-1} (x - x_{k-1/2}) \quad (A.5)$$

$c^m = W[x_{k_{min}^{m-1}-1/2}, \dots, x_{k_{min}^{m-1}+m-1/2}]$  - есть функция разделенных разностей

степени  $m$ , где

$$\begin{aligned} W[x_i] &= W(x_i) \\ W[x_i, x_{i+1}] &= (W(x_{i+1}) - W(x_i)) / (x_{i+1} - x_i) \\ W[x_i, \dots, x_{i+k}] &= (W[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - W[x_i, \dots, x_{i+k-1}]) / (x_{i+k} - x_i) \end{aligned}$$

Построим полином  $H_m(x; W)$ , удовлетворяющий свойству (A.2). Из работы [124] следует, что для этого необходимо осуществлять выбор точек  $(x_j, \dots, x_{j+m})$  на которых строиться полином так, чтобы функция  $W(x)$  оставалась постоянно гладкой в этом интервале.

Основная идея выбора интервала состоит в применении адаптирующегося (с помощью некоторого алгоритма) к решению шаблона: интерполяция полинома проводится на том шаблоне, на котором решение ведет себя наиболее гладко.

Как следует из [121, с. 242] мерой гладкости функции  $W(x)$  на  $(m+1)$  точках служит ее разделенная разность  $m$ -го порядка  $W[x_j, \dots, x_{j+m}]$ . Если функция  $W(x)$  гладкая в интервале  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{1+m}})$ , но разрывная в  $(x_{j_2}, \dots, x_{j_{2+m}})$ , то для достаточно малого  $h$  должно выполняться следующее условие:

$$|W[x_{j_1}, \dots, x_{j_{1+m}}]| \leq |W[x_{j_2}, \dots, x_{j_{2+m}}]| \quad (\text{A.6})$$

Проблема выбора шаблона точек, в котором функция  $W(x)$  является гладкой, основывается на нахождении интервала, на котором она имеет наименьшую разделенную разность. То есть, если выполняется условие (A.6), то выбирается отрезок  $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{1+m}})$ . Таким образом, строится ENO схема, однако для WENO схем при построении многочлена  $H_m(x; W)$  в интервале  $I_j$  необходимо использовать все  $m$  полиномов  $\{H_m^k(x; W)\}_{k=1}^m$  на всех шаблонах  $\{S_{j+k}\}_{k=0}^{m-1}$  в которых  $S_{j+k}$  охватывают  $I_j$ . Таким образом полином  $H_m(x; W)$  будет равен линейной комбинацией всех  $\{H_m^k(x; W)\}_{k=1}^m$  с весом, который определяется с помощью соответствующего индикатора  $\{IS_{j+k}\}_{k=0}^{m-1}$  являющимся суммой всех средних квадратичных значений разделенных разностей [122, P.202].

Рассмотрим формулу Ньютона 3-й степени и построим полином  $H_m(x; W)$  с  $m=0,1,2,3$ .

Пусть  $\lambda > 0$ , тогда в соответствии с предложенным алгоритмом (2.35)-(2.39), имеем  $k_{\min}^1 = j$  и для  $m=0$

$$H_0(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = W[x_{j+1/2}]$$

для  $m=1$

$$H_1(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = H_0(x_{j+1/2} - \lambda t; W) + W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}](x_{j+1/2} - \lambda t - x_{j+1/2}).$$

Коэффициенты  $a^2$  и  $b^2$  определяются через функции разделенных разностей  $W(x)$  следующим образом:

$$a^2 = W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \tag{A.6}$$

$$b^2 = W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$$

$c^2$  примет вид:

$$c^2 = \begin{cases} b^2 & \text{if } |a^2| \geq |b^2| \\ a^2 & \text{if } |a^2| < |b^2| \end{cases} \text{ and } k_{\min}^2 = \begin{cases} k_{\min}^1 - 1 = j - 1 & \text{if } |a^2| \geq |b^2| \\ k_{\min}^1 = j & \text{if } |a^2| < |b^2| \end{cases} \tag{A.7}$$

Полином 2-го порядка запишется:

$$\begin{aligned} H_2(x_{j+1/2} - \lambda t; W) &= H_1(x_{j+1/2} - \lambda t; W) + c^2 \prod_{k=j}^{j+1} (x_{j+1/2} - \lambda t - x_{k-1/2}) \\ &= H_1(x_{j+1/2} - \lambda t; W) + \begin{cases} (-\lambda t)(h - \lambda t)W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \geq W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \\ (-\lambda t)(h - \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] < W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \end{cases} \end{aligned}$$

Далее определяются значения  $a^3$  и  $b^3$  для двух значений  $k_{\min}^2$ ,

a)  $k_{\min}^2 = j - 1$

$$a^3 = W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}], \quad b^3 = W[x_{j-5/2}, x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$$

где  $c^3$  имеет вид:

$$c^3 = \begin{cases} b^3 & \text{if } |a^3| \geq |b^3| \\ a^3 & \text{if } |a^3| < |b^3| \end{cases}$$

Су учетом этого 3-го порядка полином  $H_3(x_{j+1/2} - \lambda t; W)$  примет форму:

$$\begin{aligned} H_3(x_{j+1/2} - \lambda t; W) &= H_2(x_{j+1/2} - \lambda t; W) + c^3 \prod_{k=j-1}^{j+1} (x_{j+1/2} - \lambda t - x_{k-1/2}) \\ &= W[x_{j+1/2}] + (-\lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] + (-\lambda t)(h - \lambda t)W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] + \\ &\quad + \begin{cases} (-\lambda t)(h - \lambda t)(2h - \lambda t)W[x_{j-5/2}, x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \\ \text{if } W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \geq W[x_{j-5/2}, x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \\ (-\lambda t)(h - \lambda t)(2h - \lambda t)W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ \text{if } W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] < W[x_{j-5/2}, x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Здесь разделенные разности (A.8) расположены на шаблоне

$$\left\{ x_{j-\frac{5}{2}}, x_{j-\frac{3}{2}}, x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{3}{2}} \right\}.$$

b)  $k_{\min}^2 = j$

$$a^3 = W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}], \quad b^3 = W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}]$$

для данного значения  $k_{\min}^2$   $c^3$  примет вид :

$$c^3 = \begin{cases} b^3 & \text{if } |a^3| \geq |b^3| \\ a^3 & \text{if } |a^3| < |b^3| \end{cases}$$

Полином  $H_3(x_{j+1/2} - \lambda t; W)$  запишется в виде:

$$\begin{aligned}
H_3(x_{j+1/2} - \lambda t; W) &= H_2(x_{j+1/2} - \lambda t; W) + c^3 \prod_{k=j-1}^{j+1} (x_{j+1/2} - \lambda t - x_{k-1/2}) \\
&= W[x_{j+1/2}] + (-\lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] + (-\lambda t)(h - \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] + \\
&\quad + \begin{cases} (-\lambda t)(h - \lambda t)(2h - \lambda t)W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ \text{if } W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \geq W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ (-\lambda t)(h - \lambda t)(2h - \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \\ \text{if } W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] < W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \end{cases} \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

В данном случае разделенные разности (A.8) расположены на шаблоне  $\{x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}\}$ .

Разделенные разности в построенных полиномах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
W[x_{j+1/2}] &= W_{j+1/2} \\
W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] &= \frac{1}{h}(W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) \\
\end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned}
W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] &= \frac{1}{2h^2}(W_{j+3/2} - 2W_{j+1/2} + W_{j-1/2}) \\
W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] &= \frac{1}{6h^3}(W_{j+5/2} - 3W_{j+3/2} + 3W_{j+1/2} - W_{j-1/2})
\end{aligned}$$

Используя (A.10) в (A.8) запишем:

$$\begin{aligned}
H_3(x_{j+1/2} - \lambda t; W) &= W_{j+1/2} - \sigma(W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) - \sigma \frac{(1-\sigma)}{2}(W_{j+1/2} - 2W_{j-1/2} + W_{j-3/2}) + \\
&\quad + \begin{cases} \frac{(-\sigma)(1-\sigma)(2-\sigma)}{6}(W_{j+1/2} - 3W_{j-1/2} + 3W_{j-3/2} - W_{j-5/2}) \\ \text{if } |W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}| \geq |W_{j+1/2} - 3W_{j-1/2} + 3W_{j-3/2} - W_{j-5/2}| \\ \frac{(-\sigma)(1-\sigma)(2-\sigma)}{6}(W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}) \\ \text{if } |W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}| < |W_{j+1/2} - 3W_{j-1/2} + 3W_{j-3/2} - W_{j-5/2}| \end{cases} \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$



Где  $\sigma = \frac{\lambda t}{h}$

Аналогично (A.9) переписывается:

$$\begin{aligned}
 H_3(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = & W_{j+1/2} - \sigma(W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) - \sigma \frac{(1-\sigma)}{2}(W_{j+1/2} - 2W_{j-1/2} + W_{j-3/2}) + \\
 & + \left[ \begin{aligned} & \frac{(\sigma)(1-\sigma)(1+\sigma)}{6}(W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}) \\ & \text{if } |W_{j+5/2} - 3W_{j+3/2} + 3W_{j+1/2} - W_{j-1/2}| \geq |W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}| \\ & \frac{(\sigma)(1-\sigma)(1+\sigma)}{6}(W_{j+5/2} - 3W_{j+3/2} + 3W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) \\ & \text{if } |W_{j+5/2} - 3W_{j+3/2} + 3W_{j+1/2} - W_{j-1/2}| < |W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}| \end{aligned} \right] \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

Теперь перепишем выражения (A.11) и (A.12) в виде трех полиномов без выбора адаптивного шаблона, который использовался при построении ENO схемы:

$$\begin{aligned}
 H_3^1(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = & W_{j+1/2} - \sigma(W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) - \frac{\sigma}{2}(1-\sigma)(W_{j+1/2} - 2W_{j-1/2} + W_{j-3/2}) + \\
 & + \frac{1}{6}(-\sigma)(1-\sigma)(2-\sigma)(W_{j+1/2} - 3W_{j-1/2} + 3W_{j-3/2} - W_{j-5/2}) \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

с разделенными разностями на шаблоне  $S_j = \{x_{j-5/2}, x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\}$  и с соответствующим индикатором вида:

$$IS_j = (\Delta^2[w_{j-2}])^2 + \frac{1}{2}(\Delta[w_{j-1}])^2 + (\Delta[w_{j-2}])^2 = \quad (A.14)$$

$$= (w_j - 2w_{j-1} + w_{j-2})^2 + \frac{1}{2}((w_j - w_{j-1})^2 + (w_{j-1} - w_{j-2})^2) =$$

$$= (W_{j+1/2} - 3W_{j-1/2} + 3W_{j-3/2} - W_{j-5/2})^2 + \frac{1}{2}((W_{j+1/2} - 2W_{j-1/2} + W_{j-3/2})^2 + (W_{j-1/2} - 2W_{j-3/2} + W_{j-5/2})^2)$$

В (A.11) второй полином запишется:

$$H_3^2(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = W_{j+1/2} - \sigma(W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) - \frac{\sigma}{4}(1 - \sigma)(W_{j+3/2} - W_{j+1/2} - W_{j-1/2} + W_{j-3/2}) - \\ - \frac{\sigma}{12}[(1 - \sigma)(2 - \sigma) + (\sigma - 1)(\sigma + 1)](W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2}) \quad (A.15)$$

на шаблоне  $S_{j+1} = \{x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}\}$  с индикатором :

$$IS_j = (\Delta^2[w_{j-1}])^2 + \frac{1}{2}(\Delta[w_j])^2 + (\Delta[w_{j-1}])^2 = \quad (A.16) \\ = (w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1})^2 + \frac{1}{2}((w_{j+1} - w_j)^2 + (w_j - w_{j-1})^2) =$$

$$= (W_{j+3/2} - 3W_{j+1/2} + 3W_{j-1/2} - W_{j-3/2})^2 + \frac{1}{2}((W_{j+3/2} - 2W_{j+1/2} + W_{j-1/2})^2 + (W_{j+1/2} - 2W_{j-1/2} + W_{j-3/2})^2)$$

И наконец третий полином примет вид:

$$H_3^3(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = W_{j+1/2} - \sigma(W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) - \frac{\sigma}{2}(1 - \sigma)(W_{j+5/2} - 2W_{j+3/2} + W_{j+1/2}) - \\ - \frac{\sigma}{6}(\sigma - 1)(\sigma + 1)(W_{j+5/2} - 3W_{j+3/2} + 3W_{j+1/2} - W_{j-1/2}) \quad (A.17)$$

здесь шаблон  $S_{j+2} = \{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}\}$  и индикатор:

$$IS_{j+2} = (\Delta^2[w_j])^2 + \frac{1}{2}((\Delta[w_{j+1}])^2 + (\Delta[w_j])^2) = \quad (A.18) \\ = (w_{j+2} - 2w_{j+1} + w_j)^2 + \frac{1}{2}((w_{j+2} - w_{j+1})^2 + (w_{j+1} - w_j)^2) =$$

$$= (W_{j+5/2} - 3W_{j+3/2} + 3W_{j+1/2} - W_{j-1/2})^2 + \frac{1}{2}((W_{j+5/2} - 2W_{j+3/2} + W_{j+1/2})^2 + (W_{j+3/2} - 2W_{j+1/2} + W_{j-1/2})^2)$$

Используя следующие операторы:

$$\Delta_+ W_{j+1/2} = W_{j+3/2} - W_{j+1/2} \text{ and } \Delta_- W_{j+1/2} = W_{j+1/2} - W_{j-1/2} \quad (\text{A.19})$$

Полиномы (A.13), (A.15) и (A.16) переписутся:

$$H_3^1(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = W_{j+1/2} - \sigma \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{2}(1-\sigma) \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{6}(1-\sigma)(2-\sigma) \Delta_- \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} \quad (\text{A.20})$$

$$H_3^2(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = W_{j+1/2} - \sigma \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{4}(1-\sigma)(\Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2}) - \frac{\sigma}{12}[(1-\sigma)(2-\sigma) + (\sigma-1)(\sigma+1)] \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \quad (\text{A.21})$$

$$H_3^3(x_{j+1/2} - \lambda t; W) = W_{j+1/2} - \sigma \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{2}(1-\sigma) \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{6}(\sigma-1)(\sigma+1) \Delta_- \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} \quad (\text{A.22})$$

Значение функции  $H_3(x_{j+1/2} - \lambda t, W)$  определим как комбинацию трех полиномов в следующем виде:

$$H_3(x_{j+1/2} - \lambda t, W) = \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} H_3^1(x_{j+1/2} - \lambda t, W) + \frac{\alpha_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} H_3^2(x_{j+1/2} - \lambda t, W) + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} H_3^3(x_{j+1/2} - \lambda t, W) \quad (\text{A.23})$$

где  $\alpha_{0j}, \alpha_{1j}$  и  $\alpha_{2j}$  определяются в соответствии с работой [49]:

$$\alpha_{0j} = \frac{1}{12(\delta + Is_j)^3}, \quad \alpha_{1j} = \frac{1}{2(\delta + Is_{j+1})^3}, \quad \alpha_{2j} = \frac{1}{4(\delta + Is_{j+2})^3} \quad (\text{A.24})$$

Подстановка (A.20), (A.21) и (A.22) в (A.23) определит полином  $H_3(x_{j+1/2} - \lambda t, W)$  в следующей форме:

$$\begin{aligned}
H_3(x_{j+1/2} - \lambda t, W) = & W_{j+1/2} - \sigma \Delta_- W_{j+1/2} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2} \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \right. \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} (\Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2}) + \left. + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \right] - \\
& - \frac{\sigma}{6} (1-\sigma)(2-\sigma) \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \right] - \\
& - \frac{\sigma}{6} (1-\sigma)(1+\sigma) \left[ \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} \right]
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Аналогично для грани  $x_{j-1/2}$  с помощью замены индекса  $j$  на  $j-1$  запишется полином  $H_3(x_{j-1/2} - \lambda t, W)$

$$\begin{aligned}
H_3(x_{j-1/2} - \lambda t, W) = & W_{j-1/2} - \sigma \Delta_- W_{j-1/2} - \frac{\sigma(1-\sigma)}{2} \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \right. \\
& + \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} (\Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2}) + \left. + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} \right] - \\
& - \frac{\sigma}{6} (1-\sigma)(2-\sigma) \left[ \frac{\alpha_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} \right] - \\
& - \frac{\sigma}{6} (1-\sigma)(1+\sigma) \left[ \frac{\alpha_{1j}}{2 \sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} + \frac{\alpha_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \Delta_+ \Delta_+ W_{j-1/2} \right]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Теперь рассмотрим случай  $\lambda < 0$  и применим алгоритм построения (2.35)-(2.39)

$$K_{\min}^1 = j+1$$

и для  $m = 0$

$$H_0(x_{j+1/2} + \lambda t; W)W[x_{j+3/2}]$$

для  $m = 1$

$$H_1(x_{j+1/2} + \lambda t; W) = H_0(x_{j+1/2} + \lambda t; W) + W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}](x_{j+1/2} + \lambda t - x_{j+3/2})$$

В соответствии с алгоритмом построения (2.35)-(2.39) коэффициенты  $a^2$  и  $b^2$  определяются с помощью функции  $W(x)$  в виде:

$$a^2 = W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}], \quad b^2 = W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \quad (\text{A.27})$$

где  $c^2$  примет вид :

$$c^2 = \begin{cases} b^2 & \text{if } |a^2| \geq |b^2| \\ a^2 & \text{if } |a^2| < |b^2| \end{cases} \text{ and } K_{\min}^2 = \begin{cases} K_{\min}^1 = j & \text{if } |a^2| \geq |b^2| \\ K_{\min}^1 = j+1 & \text{if } |a^2| < |b^2| \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Полином 2-го порядка запишется следующим образом:

$$H_2(x_{j+1/2} + \lambda t; W) = H_1(x_{j+1/2} + \lambda t; W) + c^2 \prod_{k=j+1}^{j+2} (x_{j+1/2} + \lambda t - x_{k-1/2})$$

$$= H_1(x_{j+1/2} + \lambda t; W) + \begin{cases} (\lambda t)(-h + \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \geq W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ (\lambda t)(-h + \lambda t)W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] < W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \end{cases}$$

Из уравнения (2.38) значения  $a^3$  и  $b^3$  для двух случаев of  $k_{\min}^2$  определяют два вида полинома  $H_3(x_{j+1/2} + \lambda t; W)$ ,

$$\text{a) } K_{\min}^2 = j$$

$$a^3 = W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}], \quad b^3 = W[x_{j-5/2}, x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$$

$$c^3 = \begin{cases} b^3 & \text{if } |a^3| \geq |b^3| \\ a^3 & \text{if } |a^3| < |b^3| \end{cases}$$

$H_3(x_{j+1/2} + \lambda t; W)$  примет форму:

$$\begin{aligned} H_3(x_{j+1/2} + \lambda t; W) &= H_2(x_{j+1/2} + \lambda t; W) + c^3 \prod_{k=j}^{j+1} (x_{j+1/2} + \lambda t - x_{k-1/2}) \\ &= W[x_{j+1/2}] + (\lambda t)W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] + (\lambda t)(-h + \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] + \\ &\quad + \begin{cases} (\lambda t)(h + \lambda t)(-h + \lambda t)W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \geq W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \\ (\lambda t)(h + \lambda t)(-h + \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] < W[x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Разделенные разности в (A.27) определены на шаблоне

$$\{x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}\}.$$

$$\text{б) } K_{\min}^2 = j+1$$

$$a^3 = W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}, x_{j+7/2}], \quad b^3 = W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}]$$

$$c^3 = \begin{cases} b^3 & \text{if } |a^3| \geq |b^3| \\ a^3 & \text{if } |a^3| < |b^3| \end{cases}$$

Для данного случая  $H_3(x_{j+1/2} + \lambda t; W)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} H_3(x_{j+1/2} + \lambda t; W) &= H_2(x_{j+1/2} + \lambda t; W) + c^3 \prod_{k=j+1}^{j+3} (x_{j+1/2} + \lambda t - x_{k-1/2}) = \\ &= W[x_{j+1/2}] + (\lambda t)W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}] + (\lambda t)(-h + \lambda t)W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] + \\ &+ \begin{cases} (\lambda t)(-h + \lambda t)(-2h + \lambda t)W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}, x_{j+7/2}] \geq W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \\ (\lambda t)(-h + \lambda t)(-2h + \lambda t)W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}, x_{j+7/2}] \\ \quad \text{if } W[x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}, x_{j+7/2}] < W[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}] \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Функция в (A.30) определена на шаблоне  $\{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}, x_{j+7/2}\}$ .

Аналогично случаю  $\lambda > 0$  можно найти три полинома  $H_3^1(x_{j+1/2} + \lambda t; W)$ ,  $H_3^2(x_{j+1/2} + \lambda t; W)$  и  $H_3^3(x_{j+1/2} + \lambda t; W)$  на трех соответствующих шаблонах:

$$\begin{aligned} S_{j+1} &= \{x_{j-3/2}, x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}\}, S_{j+2} = \{x_{j-1/2}, x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}\} \text{ and} \\ S_{j+3} &= \{x_{j+1/2}, x_{j+3/2}, x_{j+5/2}, x_{j+7/2}\} \end{aligned}$$

$$H_3^1(x_{j+1/2} + \lambda t; W) = W_{j+1/2} + \sigma \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{2}(1-\sigma)\Delta_+ \Delta_- W_{j+1/2} + \frac{\sigma}{6}(\sigma-1)(\sigma+1)\Delta_+ \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} H_3^2(x_{j+1/2} + \lambda t; W) &= W_{j+1/2} + \sigma \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{4}(1-\sigma)(\Delta_+ \Delta_- W_{j+1/2} + \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2}) + \\ &+ \frac{\sigma}{12}[(1-\sigma)(2-\sigma) + (\sigma-1)(1+\sigma)]\Delta_+ \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$H_3^3(x_{j+1/2} + \lambda t; W) = W_{j+1/2} + \sigma \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{2}(1-\sigma)\Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} + \frac{\sigma}{6}(\sigma-1)(2-\sigma)\Delta_+ \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} \quad (\text{A.33})$$

)

Теперь запишем выражение для  $H_3(x_{j+1/2} + \lambda t, W)$  как выпуклую комбинацию полученных ранее трех полиномов:

$$H_3(x_{j+1/2} + \lambda t, W) = \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} H_3^1(x_{j+1/2} + \lambda t, W) + \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} H_3^2(x_{j+1/2} + \lambda t, W) + \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} H_3^3(x_{j+1/2} + \lambda t, W) \quad (\text{A.34})$$

Где  $\bar{\alpha}_{0j}$ ,  $\bar{\alpha}_{1j}$  и  $\bar{\alpha}_{2j}$  определяются в соответствии с работой [122] :

$$\bar{\alpha}_{0j} = \frac{1}{4(\delta + Is_j)^3}, \bar{\alpha}_{1j} = \frac{1}{2(\delta + Is_{j+1})^3} \text{ and } \bar{\alpha}_{2j} = \frac{1}{12(\delta + Is_{j+2})^3} \quad (\text{A.35})$$

Подставляя (A.31), (A.32) и (A.33) в выражение (A.34) функция  $H_3(x_{j+1/2} + \lambda t, W)$  переписется в виде:

$$H_3(x_{j+1/2} + \lambda t, W) = W_{j+1/2} + \sigma \Delta_+ W_{j+1/2} - \frac{\sigma}{2} (1 - \sigma) \left[ \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- W_{j+1/2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} (\Delta_+ \Delta_- W_{j+1/2} + \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2}) + \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} \right] + \frac{(\sigma^2 - 1)}{6} \left( \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- \Delta_- W_{j+1/2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} \right) + \frac{(2 + 3\sigma^- + (\sigma^-)^2)}{6} \left( \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- \Delta_+ W_{j+1/2} + \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_+ \Delta_+ W_{j+1/2} \right) \quad (\text{A.36})$$

Для грани  $x_{j-1/2}$  построение  $H_3(x_{j-1/2} + \lambda t, W)$  производится аналогично грани  $x_{j+1/2}$  заменой индекса  $j$  на  $j-1$  в выражении (A.36) то есть,



$$\begin{aligned}
H_3(x_{j-1/2} + \lambda t, W) = & W_{j-1/2} + \sigma \Delta_+ W_{j-1/2} - \frac{\sigma}{2} (1 - \sigma) \left[ \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- W_{j-1/2} + \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} (\Delta_+ \Delta_- W_{j-1/2} + \Delta_+ \Delta_+ W_{j-1/2}) + \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_+ W_{j-1/2} \left. \right] + \\
& + \frac{(\sigma^2 - 1)}{6} \left( \frac{\bar{\alpha}_{0j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- \Delta_- W_{j-1/2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} \right) + \\
& + \frac{(2 + 3\sigma^- + (\sigma^-)^2)}{6} \left( \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}_{1j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_- \Delta_+ W_{j-1/2} + \frac{\bar{\alpha}_{2j}}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \Delta_+ \Delta_+ W_{j-1/2} \right) \left. \right]. \tag{A.37}
\end{aligned}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Определение матриц Якоби

Для того, чтобы определить матрицы Якоби  $A = \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{U}}$  и  $B = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}}$  необходимо вычислить частные производные от давления по всем независимым переменным. Точное вычисление этих производных в случае термически совершенного газа сопряжено с трудностями, связанными с определением давления явным образом через искомые переменных. Один из путей преодоления этих трудностей приведено в [125, с.105]. Аналогично этой работе вводится эффективный показатель адиабаты газовой смеси:

$$\bar{\gamma} = \frac{h_{sm}}{e_{sm}}$$

в котором:

$$h_{sm} = \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{p_i} dT - \text{энтальпия смеси за вычетом теплоты образования} \quad (\text{Б.1})$$

$$e_{sm} = \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{v_i} dT - \text{внутренняя энергия смеси за вычетом энергии образования}$$

$T^0 = 293\text{K}$  - стандартная температура образования.

Чтобы определить эффективный показатель адиабаты газовой смеси  $\bar{\gamma}$  необходимо найти значения  $h_{sm}$  и  $e_{sm}$ , для этого рассматривается выражение для внутренней энергии через давление:

$$e = \frac{h}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \frac{p}{\rho} \quad (\text{Б.2})$$

Удельная энтальпия смеси  $h$  определяется согласно (2.4), а внутренняя энергия смеси  $e$  определяется следующим образом:

$$e = \sum_{i=1}^N Y_i e_i \quad \text{где} \quad e_i(T) = e_i^0 + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \int_{T^0}^T c_{v_i} dT \quad (\text{Б.3})$$

Приравнивание (Б.3) и (Б.2) с учетом (2.2) приводит к выражению:

$$\begin{aligned} e &= \sum_{i=1}^N Y_i e_i = \sum_{i=1}^N Y_i \left( e_i^0 + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \int_{T^0}^T c_{v_i} dT \right) = e^0 + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{v_i} dT = \\ &= \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \left( h^0 + \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{p_i} dT \right) - \frac{T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} \end{aligned}$$

где  $e^0 = \sum_{i=1}^N Y_i e_i^0$  - удельная внутренняя энергия при стандартных

условиях

$h^0 = \sum_{i=1}^N Y_i h_i^0$  - удельная энтальпия образования при стандартных

условиях.

Значение  $e^0$  тогда примет вид:

$$e^0 = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \left( h^0 + \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T \left( c_{p_i} - \frac{1}{W} \right) dT \right) - \frac{T^0}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} - \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{v_i} dT$$

Учитывая, что для термически совершенного газа  $c_{v_i} = c_{p_i} - \frac{1}{W_i}$ , получается

следующее выражение:

$$e^0 = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \left( h^0 + \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{v_i} dT \right) - \frac{T^0}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} - \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T_0}^T c_{v_i} dT = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \left( h^0 - \frac{T^0}{W} \right),$$

таким образом:

$$e^0 = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \left( h^0 - \frac{T^0}{W} \right)$$

(Б.4)

Выражая значение  $h_{sm}$  через  $e_{sm}$ :

$$\begin{aligned} h_{sm} &= \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{p_i} dT = \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T \left( c_{p_i} - \frac{1}{W_i} + \frac{1}{W_i} \right) dT = \\ &= \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T \left( c_{v_i} + \frac{1}{W_i} \right) dT = \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T c_{v_i} dT + \sum_{i=1}^N Y_i \int_{T^0}^T \frac{1}{W_i} dT \end{aligned}$$

После раскрытия последнего интеграла равенства:

$$h_{sm} = e_{sm} + \frac{T}{W} - \frac{T^0}{W} = e_{sm} + \gamma_\infty M_\infty^2 \frac{p}{\rho} - \frac{T^0}{W}$$

Из полученного равенства давление выразится следующим образом

$$p = \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} (\rho h_{sm} - \rho e_{sm}) + \frac{\rho T^0}{\gamma_\infty M_\infty^2 W}$$

Откуда окончательно получается выражение для давления :

$$p = \frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \rho (\bar{\gamma} - 1) e_{sm} + \frac{\rho \Gamma^0}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2 W} \quad (\text{Б.5})$$

$$\text{где } \bar{\gamma} = \frac{h_{sm}}{e_{sm}}.$$

В выражении (Б.5) неизвестным остается значение  $e_{sm}$ . Чтобы его определить, используется уравнение для полной энергии:

$$E_t = \frac{\rho h}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \quad (\text{Б.6})$$

Учитывая выражение (Б.3) для внутренней энергии перепишем (Б.6) в виде:

$$E_t = \rho \left( e^0 + \frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} e_{sm} \right) + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) = \rho e^0 + \frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \rho e_{sm} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)$$

или

$$\frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \rho e_{sm} = E_t - \rho e^0 + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)$$

Умножая полученное выше выражение на  $\bar{\gamma} - 1$

$$\frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} (\bar{\gamma} - 1) \rho e_{sm} = (\bar{\gamma} - 1) \left[ E_t - \rho e^0 + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) \right]$$

Тогда с учетом (Б.5) и (Б.4):

$$p = (\bar{\gamma} - 1) \left[ E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) - \rho \frac{h^0}{\gamma_\infty M_\infty^2} \right] + \frac{\rho T^0}{M_\infty^2 W} \quad (\text{Б.7})$$

Таким образом, при вычислении матриц Якоби производные давления от искомых величин вычисляются по формуле (Б.7) в предположении, что  $\bar{\gamma} \approx 1,4$ .

Компоненты вектора  $\vec{E}$  относительно компонент вектора  $\vec{U}$  запишутся следующим образом :

$$\vec{E}(\vec{U}) = \frac{\vec{E}(\vec{U})}{J} = \begin{bmatrix} \frac{\rho u}{J} \\ \frac{J}{(\rho u^2 + P)} \\ \frac{J}{\rho u w} \\ \frac{J}{(E_t + P)u} \\ \frac{J}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{U}_2^2}{\tilde{U}_1} + (\gamma - 1) \left[ \tilde{U}_4 - \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{U}_2^2 + \tilde{U}_3^2}{\tilde{U}_1} \right) - \frac{\tilde{U}_1 h^0}{\gamma M_\infty^2} \right] - \frac{\tilde{U}_1 T^0}{M_\infty^2 W} \\ \frac{\tilde{U}_2 \tilde{U}_3}{\tilde{U}_1} \\ \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} (U_4 - (\gamma - 1)) \left[ \tilde{U}_4 - \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{U}_2^2 + \tilde{U}_3^2}{\tilde{U}_1} \right) - \frac{\tilde{U}_1 h^0}{\gamma M_\infty^2} \right] - \frac{\tilde{U}_1 T^0}{M_\infty^2 W} \end{bmatrix}$$

Значения давления взято из (Б.7), тогда матрица Якоби примет вид:

$$A = \frac{\partial \vec{F}(\vec{U})}{\partial \vec{U}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + (\gamma - 1) \left[ \frac{u^2 + w^2}{2} - \frac{h^0}{\gamma M_\infty^2} \right] + \frac{T^0}{M_\infty^2 W} & (3 - \gamma)u & (1 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ -uw & w & u & 0 \\ \left[ \frac{-\gamma E_t}{\rho} + (1 - \gamma)(u^2 + w^2) \right] u & \frac{\gamma E_t}{\rho} - (1 - \gamma) \left( \frac{3u^2 + w^2}{2} + \frac{h^0}{\gamma M_\infty^2} \right) + \frac{T^0}{M_\infty^2 W} & (1 - \gamma)uw & \gamma u \end{bmatrix}$$

Аналогично получим, что

$$B = \frac{\partial \bar{F}(\tilde{U})}{\partial \tilde{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uw & w & u & 0 \\ -w^2 + (\gamma - 1) \left[ \frac{u^2 + w^2}{2} - \frac{h^0}{\gamma M_\infty^2} \right] + \frac{T^0}{M_\infty^2 W} (1 - \gamma)u & (3 - \gamma)w & & \gamma - 1 \\ \left[ \frac{-\gamma E_t}{\rho} + (1 - \gamma)(u^2 + w^2) \right] w & (1 - \gamma)uw \frac{\gamma E_t}{\rho} - (1 - \gamma) \left( \frac{u^2 + 3w^2}{2} + \frac{h^0}{\gamma M_\infty^2} \right) + \frac{T^0}{M_\infty^2 W} \gamma w & & \end{bmatrix}$$

Матрицы собственных значений  $\Lambda_\xi$  и  $\Lambda_\eta$  имеют вид:

$$\Lambda_\xi = \begin{bmatrix} \lambda_{1\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{4\xi} \end{bmatrix}$$

где  $\lambda_{1\xi} = \xi_x(u - c)$ ,  $\lambda_{2\xi} = \xi_x u$ ,  $\lambda_{3\xi} = \xi_x u$ ,  $\lambda_{4\xi} = \xi_x(u + c)$

$$\Lambda_\eta = \begin{bmatrix} \lambda_{1\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{4\eta} \end{bmatrix}$$

где  $\lambda_{1\eta} = \eta_z(w - c)$ ,  $\lambda_{2\eta} = \eta_z w$ ,  $\lambda_{3\eta} = \eta_z w$ ,  $\lambda_{4\eta} = \eta_z(w - c)$

Матрицы правых и левых собственных векторов принимают следующие значения:

В направлении  $\xi$ :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u-c & u & 0 & u+c \\ w & w & -1 & w \\ \frac{c^2 - (\gamma-1)uc}{\gamma-1} + \frac{u^2+w^2}{2} & \frac{u^2+w^2}{2} & w & \frac{c^2 + (\gamma-1)uc}{\gamma-1} + \frac{u^2+w^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u}{2c} + \frac{(\gamma-1)(u^2+w^2)}{4c^2} & \frac{-(\gamma-1)u-c}{2c^2} & \frac{-(\gamma-1)w(\gamma-1)}{2c^2} \\ 1 - \frac{(\gamma-1)(u^2+w^2)}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \frac{(\gamma-1)}{c^2} \\ w & 0 & -1 & 0 \\ \frac{u}{2c} + \frac{(\gamma-1)(u^2+w^2)}{4c^2} & \frac{-(\gamma-1)u+c}{2c^2} & \frac{-(\gamma-1)w(\gamma-1)}{2c^2} \end{bmatrix}$$

В направлении  $\eta$ :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ u & -1 & 0 & u \\ w-c & 0 & -1 & w+c \\ \frac{c^2 - (\gamma-1)wc}{\gamma-1} + \frac{u^2+w^2}{2} & w & \frac{u^2+w^2}{2} & \frac{c^2 + (\gamma-1)wc}{\gamma-1} + \frac{u^2+w^2}{2} \end{bmatrix}$$



$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{w}{2c} + \frac{(\gamma-1)(u^2+w^2)}{4c^2} & \frac{-(\gamma-1)u}{2c^2} & \frac{-(\gamma-1)w-c}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \\ u & -1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{(\gamma-1)(u^2+w^2)}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)u}{c^2} & \frac{(\gamma-1)w}{c^2} & \frac{-(\gamma-1)}{c^2} \\ \frac{w}{2c} + \frac{(\gamma-1)(u^2+w^2)}{4c^2} & \frac{-(\gamma-1)u}{2c^2} & \frac{-(\gamma-1)w+c}{2c^2} & \frac{(\gamma-1)}{2c^2} \end{bmatrix}$$