УДК 513.83

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Б. Байзаков, К.А. Айтбаев

Найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения в частных производных; разрешимость задачи Коши; условия Липшица; принцип сжатых отображений; интегральные уравнения Вольтерра.

ON SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES

A.B. Baizakov, K.A. Aitbaev

Sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem for nonlinear integral-differential equations in partial derivatives are found.

Keywords: integral-differential equations in partial derivatives; solvability of the Cauchy; Lipschitz's conditions; the contraction mapping principle; Volterra integral equations.

Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, дающие возможность математического представления процессов с последействием, протекающих в пространстве и во времени играют важную роль в математике и ее приложениях. До сих пор остается малоисследованной областью проблема выяснения разрешимости задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В [1, 2] найдены разрешимость и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. В этих работах предлагается аналитический метод построения решений классической задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. Сутью предложенного метода является преобразование решений исходной задачи Коши в эквивалентное ей интегральное уравнение Вольтерра, к которой применим принцип сжатых отображений.

В данной работе найдены достаточные условия разрешимости задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

$$u_{txy}(t,x,y)+\alpha u_{xy}(t,x,y)+\beta u_{ty}(t,x,y)+\gamma u_{tx}(t,x,y)+\alpha\beta u_{y}(t,x,y)+\beta\gamma u_{t}(t,x,y)+$$

$$+\alpha\gamma u_{x}(t,x,y)+\alpha\beta\gamma u(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,x,y,r,u(r,x,y))dr, \qquad (1)$$

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \qquad (2)$$

где α,β,γ – некоторые положительные постоянные; $f(t,x,y,u(t,x,y))$ – непрерывная функция.

Решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds, \qquad (3)$$

где $c(t,x,y)$ – известная функция такая, что $c(0,x,y)=\varphi(x,y)$, где α,β,γ – положительные постоянные; $Q(t,x,y)$ – новая искомая функция. Подставляем (3) в (1). Производная из (3) по t дает:

$$u_t(t,x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)d\nu d\mu-$$

$$-\alpha\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds\cdot$$

Отсюда, в силу (3) имеем:

$$u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)=\alpha c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)d\nu d\mu. \tag{4}$$

Производная обеих частей (4) по x дает:

$$u_{tx}(t,x,y)+\alpha u_x(t,x,y)=\alpha c_x(t,x,y)+\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu-$$

$$-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)d\mu d\nu. \tag{5}$$

Из (5) с учетом (4), получаем:

$$u_{tx}(t,x,y)+\alpha u_x(t,x,y)+\beta[u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)]=$$

$$=\alpha c_x(t,x,y)+\alpha\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu. \tag{6}$$

Дифференцируя (6) по y, получаем:

$$u_{txy}(t,x,y)+\alpha u_{xy}(t,x,y)+\beta[u_{ty}(t,x,y)+\alpha u_y(t,x,y)]=$$

$$=\alpha c_{xy}(t,x,y)+\alpha\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{0}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu. \tag{7}$$

Далее, умножая (6) на γ, а затем складывая почленно (6) и (7), получаем:

$$u_{txy}(t,x,y)+\alpha u_{xy}(t,x,y)+\beta u_{ty}(t,x,y)+\gamma u_{tx}(t,x,y)+\alpha\gamma u_x(t,x,y)+\beta\gamma u_t(t,x,y)+$$
$$+\alpha\beta u_y(t,x,y)+\alpha\beta\gamma u(t,x,y)=\alpha c_{xy}(t,x,y)+\alpha\gamma c_x(t,x,y)+\alpha\beta c_y(t,x,y)+$$
$$+\alpha\beta\gamma c(t,x,y)+Q(t,x,y). \tag{8}$$

Из (8) в силу уравнения (1) для определения неизвестной функции $Q(t,x,y)$ получаем нелинейное интегральное уравнение

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds\right]+$$

$$+\int_{0}^{t}K(t,x,y,r,u(r,x,y))dr-H(t,x,y)\equiv PQ, \tag{9}$$

где

$$H(t,x,y)=\alpha c_{xy}(t,x,y)+\alpha\gamma c_x(t,x,y)+\alpha\beta c_y(t,x,y)+\alpha\beta\gamma c(t,x,y). \tag{10}$$

Уравнение (9) будем решать применением принципа сжатых отображений. Правую часть (9) будем рассматривать как оператор PQ.

Условие (К). Пусть при всех

$$G = \{t \in [0,T], -\infty < x, y, u < +\infty\}, \quad G_1 = \{0 < s < t < T, -\infty < x, y, u < +\infty\}$$

функции $f(t,x,y,u)$ и $K(t,x,y,s,u)$ непрерывные и ограниченные функции

$$\|f(t,x,y,u)\| \le M = const, \quad \|K(t,x,y,s,u)\| \le M_1 = const,$$

кроме того, в этой области удовлетворяют условию Липшица по аргументу u:

$$\|f(t,x,y,u_1) - f(t,x,y,u_2)\| \le L\|u_1 - u_2\|, \quad \|K(t,x,y,s,u_1) - K(t,x,y,s,u_2)\| \le L_1\|u_1 - u_2\|.$$

Пусть

$$\Omega = \{Q(t,x) : \Omega(t,x) \in C([0,T] \times R) \cap \|\Omega(t,x)\| \le h\}.$$

Из уравнения (9) будем иметь

$$\|PQ\| \le M + M_1 + N,$$

где

$$N = \max_G \|H(t,x,y,u)\|.$$

Если выберем T и h так, чтобы

$$M + M_1 T + N \le h, \tag{11}$$

то, оператор PQ переводит множество Ω в себя.

Покажем теперь, что оператор PQ является оператором сжатия [3]. Из (9) используя условия (К), имеем:

$$\|PQ_1 - PQ_2\| \le \left[L \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} d\nu d\mu ds + L_1 \int_0^t \left(\int_0^\tau \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(\tau-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} d\nu d\mu ds \right) d\tau \right] \times$$

$$\times \|Q_1 - Q_2\| \le \frac{L + L_1 T}{\alpha\beta\gamma} \|Q_1 - Q_2\|. \tag{12}$$

В приведенной выше оценке были использованы следующие неравенства:

$$\int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} d\nu d\mu ds \le \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)} \left(\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)} d\nu \right) d\mu \right] ds \le$$

$$\le \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)} \left(\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma y} \cdot e^{\gamma \nu} \Big|_{\nu=-\infty}^{y} \right) d\mu \right] ds \le \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Выберем T, α, β, γ так, чтобы

$$\frac{L + L_1 T}{\alpha\beta\gamma} < 1. \tag{13}$$

Тогда из (12) следует, что PQ есть оператор сжатия на множестве Ω. По принципу сжатых отображений следует, что система нелинейных интегральных уравнений (9) имеет единственное непрерывное решение $Q(t,x) \in \Omega$. Подставив найденную функцию в (3), получим решение задачи Коши (1)–(2). Очевидно, что условие (2) выполняется в силу подбора функции $c(t,x)$.

Исследуем теперь дифференциальные свойства решений задачи Коши (1)-(2). Для всех G из равенства (3) следует неравенство

$$\|u(t,x,y)\| \le \|c(t,x,y)\| + \left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds \right\| \le$$

$$\le C_0 + \frac{h}{\alpha\beta\gamma} = M_0 = const\,.$$

Из (4) имеем:

$$\|u_t(t,x,y) + \alpha u(t,x,y)\| = \|\alpha c(t,x,y)\| + \left\| \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu \right\| \le$$

$$\le C_0 + \frac{h}{\beta\gamma} = M_1 = const\,.$$

Аналогично, из (5)–(8) можно доказать, что все производные, входящие в уравнение (1), равномерно ограничены. Таким образом, справедлива

Теорема. Пусть выполнено условие (К). Тогда $\exists\, T_0 > 0$, такое, что задача Коши (1)–(2) имеет единственное непрерывное ограниченное решение, которое представимо в виде (3).

Замечание. Если уравнение (1) окажется линейным, т.е. правая часть имеет вид $f = f(t,x)$, кроме того $K(t,x,y,s,u) \equiv 0$, то решение задачи (1)–(2) можно найти в квадратурах

$$u(t,x,y) = c(t,x,y) + \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)} \left[f(s,\rho) - H(s,c(s,\rho)) \right] d\nu\,d\mu\,ds\,,$$

где $H(t,c(t,x))$ определяется из соотношения (10).

Это утверждение следует из (3), (9).

Литература

1. *Иманалиев М.И.* О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка / М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев, К. Какишов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2007. Вып. 36. С. 19–28.
2. *Иманалиев М.И.* О разрешимости задачи Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных / М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков // Тр. межд. конф., посв. 100-летию со дня рожд. акад. Х.А. Рахматуллина. Бишкек, 2009. С. 31–34.
3. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. М.: Наука, 1972. 496 с.