

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
ВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА
КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СТРОИ-
ТЕЛЬСТВА, ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ**

Диссертационный совет Д. 01.15.505

**На правах рукописи
УДК 532.526**

БЕКЕТАЕВА АСЕЛЬ ОРОЗАЛИЕВНА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ
ТЕЧЕНИЙ С ВДУВОМ СТРУЙ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Бишкек – 2016

Работа выполнена в	Кыргызском государственном техническом университете им. И.Раззакова
Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Найманова А. Ж.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Курбаналиев А.Ы (ОшГУ) доктор физико-математических наук, профессор Калтаев А.Ж. (КазНУ) доктор физико-математических наук, профессор Мурзакматов М.У
Ведущая организация:	Евразийский национальный универси- тет им. Гумилева, 010008, Республика Казахстан, г.Астана, ул. Сатпаева 2

Защита диссертации состоится 30 сентября 2016 года в 14⁰⁰ часов, на заседании диссертационного совета Д. 01.15.505 при Кыргызском государственном техническом университете им. И.Раззакова и Кыргызском государственном университете строительства транспорта и архитектуры, по адресу: 720044, Бишкек, пр. Мира, 66. Ауд. 1/314

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеках Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова (720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. Мира, 66) и Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова (720020, Кыргызская Республика, г. Бишкек, ул. А. Малдыбаева, 34б).

Автореферат разослан «29» августа 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к.ф.-м.н.

Мекенбаев Б. Т.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Струя, развивающаяся в поперечном потоке, принадлежит к сложным пространственным течениям, которые возникают при управлении тяги ракетного двигателя с помощью газовых рулей и при вдуве газообразного горючего в сверхзвуковой поток. Струйное взаимодействие можно использовать для управления высокоскоростным летательным аппаратом, особенно в условиях сильного аэродинамического нагрева. Присутствие зон возвратных течений, турбулентности и, если течение сверхзвуковое, наличия ударных волн и волн разрежения, является огромной проблемой в изучении физики такого рода течения. В настоящий момент основные физические механизмы взаимодействия ударно-волновой структуры для течения вязких газов описаны в экспериментальных исследованиях Зубкова А.И., Щеца Д., Грубера М., Бен Якара А. и других. В работах Ченаулта С., Вити В., Хассана Е., Кавай С. и других представлено теоретическое исследование взаимодействия вдуваемой струи со сверхзвуковым потоком, здесь численно решаются полные уравнения Навье-Стокса, где наряду с уравнениями газовой динамики решается большое количество уравнений переноса компонентов смеси. Несмотря на то, что достигнуты значительные успехи в численном моделировании сверхзвуковых течений, являющимся одним из самых мощных инструментов изучения физических процессов, происходящих в аэродинамике высоких скоростей, детальное изучение процессов смешения струи с натекающим сверхзвуковым потоком все еще является трудной проблемой. При этом практически не изучены закономерности в областях отрыва, смешения и присоединения потока, образованных в результате взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем в зависимости от режимных параметров. Известно, что вихревая структура, возникающая в самой струе, аналогична истечению струи несжимаемой жидкости и является давно изученной, однако для течений с большими параметрами нерасчетности (отношение давления в струе к давлению в потоке) выявлено, что в процессе взаимодействия появляются дополнительные вихри. Ввиду чрезвычайной сложности трехмерных ударно-волновых взаимодействий и вихревых структур пространственные течения на сегодняшний день теоретически мало изучены. При турбулентном режиме течений на данный момент отсутствует надежная модель турбулентности, позволяющая точно производить расчеты вышеописанных областей. Таким образом, построение адекватной математической модели, построение модели турбулентности и проблема ее замыкания, а также построение устойчивых численных схем высокого порядка точности и изучение механизмов сверхзвукового многокомпонентного течения в зависимости от режимных параметров потока является актуальной задачей.

Целью настоящей работы является: разработка математической модели и численное исследование взаимодействия сверхзвукового течения с вдувом струй на основе уравнений Навье-Стокса для совершенного газа; разработка метода решения уравнений Навье-Стокса для сверхзвукового течения турбулентного многокомпонентного газа, основанного на WENO (Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes) схеме. Для достижения поставленной цели сформулированы следующие **задачи исследования:**

разработать методику решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения многокомпонентной газовой смеси, основанную на WENO схеме;

решить с помощью построенного алгоритма сверхзвуковое течение в канале с падающей ударной волной; выявить влияние скорости натекающего потока и толщины пограничного слоя на ударно-волновую структуру взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем на стенке;

построить численную модель и исследовать проблему сверхзвукового турбулентного течения в плоском канале с поперечным вдувом струи с нижней стенки, изучить взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем а также условия отрыва пограничного слоя в зависимости от параметра нерасчетности и ширины щели и их влияние на смешение воздуха с окислителем;

решить численным методом проблему пространственного сверхзвукового турбулентного течения в канале с поперечным вдувом круглых струй и выявить отличительные особенности образования вихревых структур для умеренных и больших параметров нерасчетности;

построить численную модель сверхзвуковой турбулентной нестационарной струи в спутном сверхзвуковом потоке с использованием LES модели турбулентности (Large Eddy Simulation); изучить влияние различных типов входных граничных условий на динамику когерентных структур с целью выявить реалистические входные условия, которые позволят моделировать сверхзвуковой турбулентный режим течения с ударными волнами.

Объектом исследования являются сверхзвуковое турбулентное течение с вдувом струй в канале.

Предметом исследования является численное моделирование и исследование взаимодействия сверхзвукового турбулентного течения с вдувом струй.

Научная новизна заключается в следующем:

- проведен расчет турбулентного сверхзвукового течения вязкого газа вдоль плоской пластины с падающим на нее скачком уплотнения на основе предложенной неявной методики решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси, основанная на WENO схеме; установлены закономерности влияния числа Маха и толщины пограничного слоя на структуру взаимодействия падающего скачка уплотне-

ния с пограничным слоем: определены предельные значения чисел Маха, при которых возникает безотрывное течение, показана многоструктурная область отрыва при росте пограничного слоя;

- сформулирована математическая модель сверхзвукового плоского течения в канале с поперечным вдувом струй; численно изучены и найдены закономерности влияния степени нерасчетности на высоту вдуваемой струи а также ширины струи на образование бочкообразной структуры в самой струе; выявлено, что увеличение ширины щели приводит к уменьшению расширения струи, которое является следствием возникновения конфузора между вдуваемой струей и отрывной зоной на верхней стенке; установлено, что, помимо общеизвестной ударно-волновой картины, за струей на нижней стенке появляется новая система скачков уплотнения, обусловленная взаимодействием отраженного скачка уплотнения от верхней стенки с пограничным слоем на нижней стенке;

- разработана численная модель и методика решения трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса на основе ENO (Essentially Non-oscillatory Schemes) схемы для задачи поперечного вдува круглой струи в сверхзвуковой поток для умеренных и больших параметров нерасчетности; детально изучен механизм образования вихревых структур как в самой струе, так и в результате взаимодействия набегающего потока с вдуваемой струей; установлено, что при умеренных параметрах нерасчетности (меньших десяти), течение струи описывает известную вихревую структуру, а при нерасчетностях больших десяти выявлены новые системы вихрей и описан механизм их возникновения.

- предложена численная модель вдува круглой сверхзвуковой турбулентной нестационарной струи в спутный сверхзвуковой поток с использованием LES модели турбулентности с различными типами граничных условий флуктуаций скорости на входных границах; изучены закономерности формирования вихревых структур слоя смешения для различных входных параметров поля турбулентности.

Научные положения, выносимые на защиту:

- методика численного решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, замкнутых k- ω моделью турбулентности для сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси, основанная на WENO схеме, позволяющая при расчетах разрывных решений получать результаты без схемных осцилляций и понижения точности решения на разрывах до первого порядка;

- численная реализация граничных условий не отражения на выходной границе, позволяющих единым образом проводить расчеты в сверхзвуковых и дозвуковых областях течений;

- результаты исследования сверхзвукового турбулентного течения газа вдоль плоской пластины с падающим на нее скачком уплотнения; установ-

ленные условия отрыва при возрастании скорости потока и многовихревые структуры отрыва пограничного слоя при его росте.

- математическая модель сверхзвукового турбулентного течения многокомпонентного вязкого газа с поперечным вдувом струи с нижней стенки плоского канала; результаты численного анализа и полученные закономерности влияния режимных параметров на взаимодействие ударных волн с пограничными слоями; выявлены новые системы скачков уплотнения на нижней стенке канала;

- численная модель пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом круглых струй и результаты исследования влияния параметра нерасчетности на взаимодействие сильно-недорасширенных струй с набегающим потоком; выявленные новые вихревые структуры как в самой струе, так и в результате взаимодействия основного потока с вдуваемой струей;

- результаты численного моделирования течения сверхзвуковой турбулентной нестационарной струи в спутном сверхзвуковом потоке на основе LES модели турбулентности с введением различных типов условия анизотропности в поле флуктуаций скорости на входных границах; полученные закономерности поведения характеристик турбулентности в зависимости от входных условий.

Личный вклад автора. Представленная работа является результатом исследований, проведенных автором в 2007-2016 годах. Личный вклад автора заключается в выборе направления исследований, постановке задач, проведении численных расчетов, анализе, обобщении полученных результатов исследований и их теоретическом обосновании.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Разработанная в диссертации математическая модель и метод решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса могут быть использованы для расчетов двумерного и трехмерного сверхзвукового турбулентного течения и позволяют исследовать реальные трехмерные процессы реагирующих течений.

Апробация работы: основные результаты работы докладывались и обсуждались на: второй международной научной конференции "Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений" (Бишкек, 5-7 сентября 2013 г.); международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и математического моделирования» (Алматы, 1-5 июня 2015 г.); 2nd International Conference on Aerospace Engineering (ICOAE 2015) (St.-Petersburg, Russia, June 14-15, 2015); 6th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE 2015) (Rome, Italy, July 16-17, 2015); International Conference "Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education" (CITech-2015) (Almaty, September 24-27, 2015); International scientific conference "Science and Practice: New Discoveries" (Czech Republic, Karlovy Vary – Russia, Moscow, October 24-25, 2015).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях: по теме диссертации опубликовано 26 печатных работ, которые приводятся в списке литературы и отражают полноту результатов диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников из 162 наименований и приложения. Работа изложена на 287 страницах, содержит 87 рисунков и 3 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении отражены следующие моменты: актуальность, цель работы, задачи исследования, новизна полученных результатов, научно-практическое значение диссертационной работы.

В первой главе содержится краткий обзор существующих на данный момент работ, посвященных теоретическому и экспериментальному исследованию взаимодействия сверхзвукового течения с поперечной газовой струей. Обсуждаются конечно-разностные методы решения уравнений Навье-Стокса, применительно к задаче сверхзвукового течения с поперечным сдувом струй, предложенные разными авторами. Также рассмотрена проблема взаимодействия ударной волны с пограничным слоем как структурной задачи при моделировании сверхзвуковых течений в канале ПВРД (прямоточных воздушно реактивных двигателей) с вдувом струй. Излагается современное состояние вопроса взаимодействия сверхзвуковых струй в спутном потоке как системы разноскоростных сверхзвуковых параллельных потоков и освещается проблема моделирования турбулентности для струйных течений, позволяющих получать характеристики реальной турбулентности.

Во второй главе представлено численное моделирование падающего скачка уплотнения с пограничным слоем. Здесь для исследуемой проблемы разрабатывается методика решения исходных уравнений, основанная на WENO- схеме четвертого порядка точности, а также изучается влияние числа Маха набегающего потока и угла генератора скачка уплотнения на ударно-волновую структуру. Схема картины течения представлена на рисунке 1.

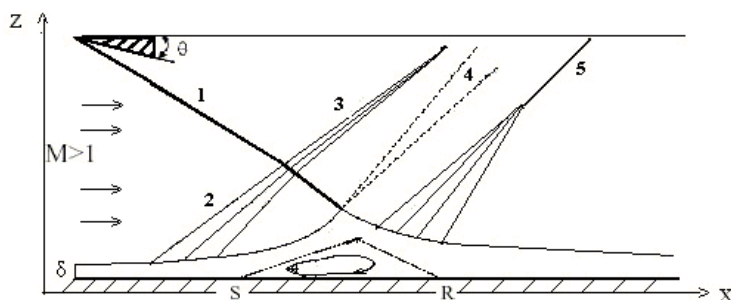


Рисунок 1 – Схема течения

Исходной является система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме и замкнутая k - ω моделью турбулентности Вилкокса:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = \vec{S} \quad (1)$$

здесь векторы $\vec{U}, \vec{E}, \vec{F}$ имеют следующий вид:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho w \\ E_t \\ \rho Y_k \\ \rho k \\ \rho \omega \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u w \\ (E_t + P)u \\ \rho u Y_k \\ \rho u k \\ \rho u \omega \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho w^2 + P \\ (E_t + P)w \\ \rho w Y_k \\ \rho w k \\ \rho w \omega \end{pmatrix},$$

а \vec{E}_v, \vec{F}_v содержат диссипативные члены вида

$$\vec{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + u\tau_{xz} - q_x \\ J_{kx} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \\ w\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z \\ J_{kz} \end{pmatrix}.$$

Вектор дополнительных членов имеет следующий вид:

$$\vec{S} = (0, 0, 0, 0, 0, (P_k - \beta^* \rho \omega k) (\gamma \rho P_k / \mu_t - \beta \rho \omega^2))^T$$

Y_k - массовая концентрация k -ой компоненты, $k=1..N$, где N - число компонент смеси газов. Уравнение состояния смеси совершенных газов имеет вид:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2 W} \quad \text{где} \quad W = \left(\sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k} \right)^{-1} \quad \text{молярный вес смеси всех газов,}$$

$$\text{причем} \quad \sum_{k=1}^N Y_k = 1. \quad \text{Уравнения для полной энергии} \quad E_t = \frac{\rho h}{\gamma_\infty M_\infty^2} - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2)$$

$$\text{где} \quad h = \sum_{k=1}^N Y_k h_k \quad \text{удельная энтальпия смеси} \quad \text{а} \quad h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT - \text{удельная эн-}$$

тальпия k -ой компоненты. Удельные теплоемкости при постоянном давлении для каждой компоненты c_{pk} вычисляются через молярные удельные теплоемкости C_{pk} по формуле: $c_{pk} = C_{pk} / W$, где C_{pk} определяются по экспе-

риментальным данным при помощи полиномиальной интерполяции четвертого порядка по температуре: $C_{pk} = \sum_{i=1}^5 \bar{a}_{ki} T^{(i-1)}$, здесь $\bar{a}_{jk} = a_{jk} T_{\infty}^{j-1}$. Численные значения эмпирических констант a_{jk} взяты из таблицы JANAF при нормальном давлении ($p = 1$ атм) и стандартной температуре $T^0 = 293$ К

Тензоры вязких напряжений и потоки тепла принимают следующий вид:

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \left(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{zz} = \frac{\mu}{Re} \left(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z) \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re} (u_z + w_x),$$

$$q_x = \left(\frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{xk}, \quad q_z = \left(\frac{\mu}{Pr Re} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_{\infty} M_{\infty}^2} \sum_{k=1}^N h_k J_{zk}.$$

Диффузионные скорости описываются законом Фика:

$$J_{kx} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad J_{kz} = -\frac{\mu}{Sc Re} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.$$

Исходная система уравнений (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе $(u_{\infty}, \rho_{\infty}, T_{\infty}, W_{\infty})$, давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_{\infty} u_{\infty}^2$, удельная энтальпия отнесена к $R^0 T_{\infty} / W_{\infty}$, молярные удельные теплоемкости к R^0 , характерным параметром длины является ширина щели, здесь индекс « ∞ » - относится к параметрам потока.

Коэффициент динамической вязкости представляется в виде суммы μ_{Λ} - молекулярной вязкости и μ_t - турбулентной вязкости: $\mu = \mu_{\Lambda} + \mu_t$. Турбулентная вязкость определяется следующим образом: $\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$, молекулярная вязкость смеси находится по формулы Уилке.

Начальные и граничные условия имеют вид: в потоке $W = W_{k\infty}$, $p = p_{\infty}$, $T = T_{\infty}$, $u = M_{\infty} \sqrt{\frac{\gamma_{\infty} R_0 T_{\infty}}{W_{\infty}}}$, $w = 0$, $Y = Y_{k\infty}$. На нижней стенке задается условие прилипания и теплоизоляции а параметры $k-\omega$ модели турбулентности на стенке определяются из условий: $k=0$; $\omega = \frac{6\mu}{0.075\rho(\Delta y_1)^2}$. Во входном сечении вблизи стенок канала задается пограничный слой, толщина которого определяется по формуле $\delta_1 = 0,37x(Re)^{0,2}$. Также задается пристенный слой (10% от пограничного слоя) $\delta_2 = 0,1\delta_1$. Продольная составляющая скорости u принимает следующий вид:

$$u = 0,1 \left(\frac{z}{\delta_2} \right) + 0,9 \left(\frac{z}{\delta_2} \right)^2, \quad x = 0, \quad 0 \leq z \leq \delta_2,$$

в развитом турбулентном пограничном слое профиль продольной скорости задается степенным законом:

$$u = \left(\frac{z}{\delta_1} \right)^{1/7}, \quad x=0, \quad \delta_2 \leq z \leq \delta_1.$$

в зависимости от распределения скорости значения температуры и плотности примут вид: $T = T_w + u(1 - T_w)$, $\rho = \frac{1}{T}$, где $T_w = \left(1 + r \frac{(\gamma - 1)}{2} M_\infty^2 \right)$ - температура на стенке, $r = 0,88$.

Начальные данные для k, ω определяются, исходя из предположения равенства порождения турбулентности и ее диссипации $P_k = \beta^* \rho \omega k$, с учетом

этого $k = k_\infty, \quad \omega = \omega_\infty$ где $k_\infty = \frac{\mu_{tB-L}}{\rho \text{Re} \sqrt{\beta^*}} \sqrt{\frac{P_k}{\mu_{tB-L}}}, \quad \omega_\infty = \frac{\rho k}{\mu_{tB-L} \text{Re}},$

$$P_k = \frac{\mu_t}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right).$$

Здесь для определения значения коэффициента турбулентной вязкости используется алгебраическая модель Болдуина-Ломакса. Вблизи стенки ($0 \leq z \leq \delta_1$) коэффициент турбулентной вязкости имеет вид $\mu_t = \rho l^2 |\Omega|$, где $|\Omega|$ - завихренность, $l = \kappa z \left[1 - e^{-z^+ / A} \right]$ - длина пути перемешивания, $\kappa = 0.41$ - постоянная Кармана, $A = 26$. Вдали от стенки ($z > \delta_1$) принято $\mu_t = 0.0168 \rho V_0 L_0$, где $V_0 = \left(F_{max}, 0.25 q_{dif}^2 / F_{max} \right)$, $L_0 = 1.6 z_{max} I^k$, $F_{max} = \max(|\Omega| l / \kappa)$, z_{max} соответствует F_{max} , $q_{dif} = \max(|\vec{V}|) - \min(|\vec{V}|)$, $\vec{V} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $I^k = \left[1 + 5.5 (0.3 z / z_{max})^6 \right]^1$ - ограничивающий множитель Клебанава.

При задании падающей ударной волны во входном сечении вблизи верхней границы для газодинамических параметров ставились условия из решения задачи о косом скачке уплотнения:

$$u = \sqrt{\frac{(\cos \beta)^2}{\cos(\beta - \theta)^2}} \cos \theta \quad v = \sqrt{\frac{(\cos \beta)^2}{\cos(\beta - \theta)^2}} \sin \theta$$

$$P = P_\infty \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 (\sin \beta)^2 \quad \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 (\sin \beta)^2}{1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 (\sin \beta)^2}$$

здесь θ - угол наклона генератора скачка уплотнения, β - угол, образованный линией скачка с направлением набегающего потока (найден из зависимости θ от β для семейства линий с различными значениями Маха потока). На верхней границе - условие симметрии, на выходной границе задаются гра-

нические условия неотражения, построенные на основе характеристического анализа гиперболической части уравнений Навье-Стокса.

Для решения исходных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси разрабатывается методика, основанная на WENO схеме четвертого порядка точности. Идея построения весовых существенно неосциллирующих схем или WENO схем является такой же, как и у ENO схем (существенно неосциллирующих схем), но с одним отличием. В ENO схемах рост нефизических осцилляций в численном решении устраняется с помощью адаптивного сеточного шаблона, в котором для каждой расчетной ячейки выбирается интерполяционный полином с гладким решением исходного уравнения. Таким образом, расчетная сетка вблизи разрыва выбирается из гладкости решения. В WENO схеме выбор расчетной сетки для построения аппроксимирующего полинома осуществляется с помощью выпуклой комбинации всех соответствующих интерполяционных полиномов. Для выпуклой комбинации полиномов производится выбор весовых коэффициентов. Для более точного учета течения в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне щели, т.е. в областях больших градиентов, вводится сгущение сетки в продольном и в поперечном направлениях.

В результате разностная схема для системы уравнений (1) примет вид:

1 шаг

$$\begin{aligned}
& \Delta t \left\{ - \frac{(R \widehat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j} (A_{\xi x}^n)_{i+1j}}{\Delta \xi} + \frac{\tilde{\mu}_{\xi ij} + \tilde{\mu}_{\xi i+1j}}{2\Delta \xi^2 \tilde{U}_{1i+1j}^n} \right\} U_{i+1j}^* - \\
& - \left\{ I + \Delta t \left[\frac{(R \widehat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j} (A_{\xi x}^n)_{ij} - (R \widehat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j} (A_{\xi x}^n)_{ij}}{\Delta \xi} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\tilde{\mu}_{\xi i-1j} + 2\tilde{\mu}_{\xi ij} + \tilde{\mu}_{\xi i+1j}}{2\Delta \xi^2 \tilde{U}_{1ij}^n} \right] \right\} U_{ij}^* + \\
& + \Delta t \left\{ \frac{(R \widehat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j} (A_{\xi x}^n)_{i-1j}}{\Delta \xi} + \frac{\tilde{\mu}_{\xi ij} + \tilde{\mu}_{\xi i-1j}}{2\Delta \xi^2 \tilde{U}_{1i-1j}^n} \right\} U_{i-1j}^* = \\
& = - \left\{ \tilde{U}_{ij}^n + \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{E}_{v22}^n}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v22}^n}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (2\tilde{E}_{vm}^n - \tilde{E}_{vm}^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2\tilde{F}_{vm}^n - \tilde{F}_{vm}^{n-1}) \right]_{ij} - \right. \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[\hat{A}_{i+1/2j}^- (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i+1j}^n - \hat{A}_{i+1/2j}^- (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij}^n + \hat{A}_{i-1/2j}^+ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij}^n - \hat{A}_{i-1/2j}^+ (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i-1j}^n \right] - \\
& \quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \left[\hat{B}_{ij+1/2}^- (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{ij+1}^n - \hat{B}_{ij+1/2}^- (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{ij}^n + \hat{B}_{i-1/2j}^+ (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{ij}^n - \hat{B}_{i-1/2j}^+ (\bar{E}_\eta + \bar{D}_\eta)_{i-1j}^n \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

2 шаг

$$\begin{aligned} & \Delta t \left\{ -\frac{(T \hat{\Lambda}_\eta^- T^{-1})_{i,j+1/2} (B_{\eta z}^n)_{i,j+1}}{\Delta \eta} + \frac{\tilde{\mu}_{\eta_{ij}} + \tilde{\mu}_{\eta_{i,j+1}}}{2\Delta \eta^2 \tilde{U}_{1i,j+1}^n} \right\} \tilde{U}_{i,j+1}^{n+1} - \\ & - \left\{ I + \Delta t \left[\frac{(T \hat{\Lambda}_\eta^+ T^{-1})_{i,j-1/2} (B_{\eta z}^n)_{ij} - (T \hat{\Lambda}_\eta^- T^{-1})_{i,j+1/2} (B_{\eta z}^n)_{ij}}{\Delta \eta} + \frac{\tilde{\mu}_{\eta_{i,j-1}} + 2\tilde{\mu}_{\eta_{ij}} + \tilde{\mu}_{\eta_{i,j+1}}}{2\Delta \eta^2 \tilde{U}_{1ij}^n} \right] \right\} \tilde{U}_{ij}^{n+1} + \\ & + \Delta t \left\{ \left[\frac{(T \hat{\Lambda}_\eta^+ T^{-1})_{i,j-1/2} (B_{\eta z}^n)_{i,j-1}}{\Delta \eta} + \frac{\tilde{\mu}_{\eta_{ij}} + \tilde{\mu}_{\eta_{i,j-1}}}{2\Delta \eta^2 \tilde{U}_{1i,j-1}^n} \right] \tilde{U}_{i,j-1}^{n+1} = -\tilde{U}_{ij}^* \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{A}_{i+1/2j}^- \left[(\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i+1j} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} \right] + \hat{A}_{i-1/2j}^+ \left[(\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{ij} - (\bar{E}_\xi + \bar{D}_\xi)_{i-1j} \right] = \\ & = (R \hat{\Lambda}_\xi^- R^{-1})_{i+1/2j} \left\{ \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\bar{\alpha}_L)_{i+1j}} \left[(\bar{\alpha}_2)_{i+1j} \bar{E}_{i+3/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{i+1j} (\bar{E}_{i+3/2j} + \bar{E}_{i+1/2j}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\bar{\alpha}_0)_{i+1j} \bar{E}_{i+1/2j} + (\bar{\alpha}_2)_{i+1j} \Delta_+ \hat{D}_{i+3/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{i+1j} (\Delta_- \hat{D}_{i+3/2j} + \Delta_+ \bar{D}_{i+1/2j}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\bar{\alpha}_0)_{i+1j} \Delta_- \bar{D}_{i+1/2j} \right] - \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\bar{\alpha}_L)_{ij}} \left[(\bar{\alpha}_2)_{ij} \bar{E}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{ij} (\bar{E}_{i+1/2j} + \bar{E}_{i-1/2j}) + (\bar{\alpha}_0)_{ij} \bar{E}_{i-1/2j} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\bar{\alpha}_2)_{ij} \Delta_+ \hat{D}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_1)_{ij} (\Delta_- \hat{D}_{i+1/2j} + \Delta_+ \bar{D}_{i-1/2j}) + (\bar{\alpha}_0)_{ij} \Delta_- \bar{D}_{i-1/2j} \right] \right\} + \\ & + (R \hat{\Lambda}_\xi^+ R^{-1})_{i-1/2j} \left\{ \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\alpha_L)_{ij}} \left[(\alpha_2)_{ij} \bar{E}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{ij} (\bar{E}_{i+1/2j} + \bar{E}_{i-1/2j}) + (\alpha_0)_{ij} \bar{E}_{i-1/2j} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\alpha_2)_{ij} \Delta_+ \bar{D}_{i+1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{ij} (\Delta_- \bar{D}_{i+1/2j} + \Delta_+ \hat{D}_{i-1/2j}) + (\alpha_0)_{ij} \Delta_- \hat{D}_{i-1/2j} \right] - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sum_{L=0}^2 (\alpha_L)_{i-1j}} \left[(\alpha_2)_{i-1j} \bar{E}_{i-1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{i-1j} (\bar{E}_{i-1/2j} + \bar{E}_{i-3/2j}) + (\alpha_0)_{i-1j} \bar{E}_{i-3/2j} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\alpha_2)_{i-1j} \Delta_+ \bar{D}_{i-1/2j} + \frac{1}{2} (\alpha_1)_{i-1j} (\Delta_- \bar{D}_{i-1/2j} + \Delta_+ \hat{D}_{i-3/2j}) + (\alpha_0)_{i-1j} \Delta_- \hat{D}_{i-3/2j} \right] \right\} \end{aligned}$$

здесь

$$\bar{E}_{\xi_{i+1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{2} \left[I - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right] \Delta_+ \tilde{E}_i,$$

$$\bar{E}_{\xi_{i-1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{2} \left[I - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right] \Delta_- \tilde{E}_i,$$

$$\bar{D}_{\xi_{i+1/2}} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \frac{1}{6} \left[\frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right] \Delta_+ \tilde{E}_i,$$

$$\bar{D}_{\xi i-1/2} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \frac{1}{6} \left[\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} - I \right] \Delta_- \tilde{E}_i,$$

$$\hat{D}_{\xi i+1/2} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i+1/2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2}^2 - I \right) + \frac{1}{2} \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i+1/2} \right) \right] \Delta_+ \tilde{E}$$

$$\hat{D}_{\xi i-1/2} = (R \operatorname{sign}(\Lambda) R^{-1})_{i-1/2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta \xi^2} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2}^2 - I \right) + \frac{1}{2} \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (R |\Lambda| R^{-1})_{i-1/2} \right) \right] \Delta_- \tilde{E}_i,$$

весовые коэффициенты имеют вид:

$$(\alpha_0)_{ij} = \frac{1}{12(\delta + Is_{ij})^3}, (\alpha_1)_{ij} = \frac{1}{2(\delta + Is_{i+1j})^3}, (\alpha_2)_{ij} = \frac{1}{4(\delta + Is_{i+2j})^3},$$

$$(\bar{\alpha}_0)_{ij} = \frac{1}{4(\delta + Is_{ij})^3}, (\bar{\alpha}_1)_{ij} = \frac{1}{2(\delta + Is_{i+1j})^3} \text{ and } (\bar{\alpha}_2)_{ij} = \frac{1}{12(\delta + Is_{i+2j})^3}$$

$$\text{где } Is_{ij} = \frac{1}{2} \left[(\Delta \tilde{U}_{i-2j})^2 + (\Delta \tilde{U}_{i-1j})^2 \right] + [\Delta^2 \tilde{U}_{i-2j}]^2, \Delta \tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{i+1j} - \tilde{U}_{ij} \text{ и } \Delta^2 \tilde{U}_{ij} = \Delta \tilde{U}_{i+1j} - \Delta \tilde{U}_{ij}.$$

Второе слагаемое правой части системы (2) определяется аналогично. Вычисление поля температуры осуществляется методом Ньютона-Рафсона обладающим квадратичной скоростью сходимости.

Численный эксперимент поставленной задачи проводится для вычислительной области высотой $H=20 \text{ см}$ и шириной $L=120 \text{ см}$. При расчете во входном сечении задается толщина пограничного слоя $\delta_1=3.5 \text{ см}$, вычисленная для $x=300 \text{ см}$. Используется сетка с узлами 301×281 . При сгущении сетки вблизи стенки для первого от стенки узла выполняется условие $z^+=4.5$ ($z^+ = \delta_1 u_\tau / \nu$, где $u_\tau = \sqrt{(0,5 \cdot C_f)}$ - динамическая скорость, C_f - коэффициент трения потока на стенке), для расчета пристенного слоя приходится 5-8 узловых точек по направлению оси z , а расчет пограничного слоя выполняется с использованием 35-40 узлов сетки. Для апробации построенной модели производится сравнение экспериментом¹, где рассматривается сверхзвуковое течение вдоль тонкой пластины с числом Маха набегающего потока $M_\infty=5$, числом Рейнольдса $Re=40 \cdot 10^6$, температурой стенки $T_w=300K$, и с генератором скачка уплотнения на верхней границе. Эксперимент проводился для угла генератора скачка $\alpha=14^\circ$, который соответствует отрывному течению пограничного слоя. На рисунке 2 представлены результаты сравнения с экспериментами коэффициента трения (рис. 2а) и давления на стенке (рис. 2б), здесь «◆◆◆» - эксперимент и «---» - расчет работы¹, «—» - результаты данной работы. Из графиков можно отметить удовлетворительное согласование экспериментов и расчетов.

¹ Федорова Н.Н. Федорченко И.А. Расчет взаимодействия падающего косоугольного скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т.45, №3. С. 61-71.

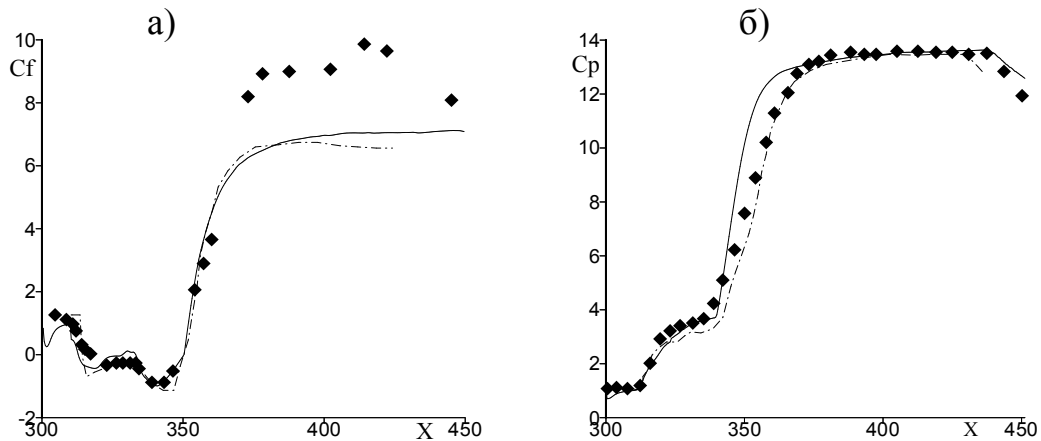


Рис. 2. Распределение коэффициента трения (а) и давления на стенке (б) «◆◆◆» – эксперимент и «---» – расчет работы¹, «—» – WENO схема.

Далее производится исследование взаимодействия скачка уплотнения (угол генератора $\alpha=10^\circ$) с пограничным слоем на стенке при различных числах Маха набегающего потока. Влияние Маха потока отражено на картине распределения линий тока и местного числа Маха, представленных на рисунке 3 (3.а- $M_\infty=5$, 3.б- $M_\infty=4,5$, 3.в- $M_\infty=4$, 3.г- $M_\infty=3,5$). Результаты показывают, что при числах Маха равных 4.5 и 5 происходит безотрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем (фигуры 3.а и 3.б). При числах Маха потока равных четырем и ниже уже можно наблюдать возвратное течение на стенке (рис. 3.а и 3.б). Это является следствием того, что при возрастании скорости основного потока угол наклона косога скачка уплотнения уменьшается, что в свою очередь влечет менее интенсивное взаимодействие ударной волны с пограничным слоем. Также рост числа Маха потока заметно сокращает дозвуковую область вблизи стенки, вследствие чего не формируется отрывная зона для этих чисел Маха.

Картина распределения изобар, представленная на рисунке 4 (4а- $M_\infty=5$, 4б- $M_\infty=4,5$, 4в- $M_\infty=4$, 4г- $M_\infty=3,5$) демонстрирует ударно-волновую структуру течения. Здесь видно, что при $M_\infty=4,5$ и $M_\infty=5$ происходит падение и отражение скачка уплотнения от стенки (1 и 5 на рис. 4а и 4б). Тогда как для случаев $M_\infty=3,5$ и $M_\infty=4$ (фигуры 4в и 4г) образуется скачок уплотнения 2 и возникает λ -образная ударно-волновая структура течения, которая достаточно хорошо просматривается на графиках.

Из распределения давления на стенке, представленного на рисунке 5 (линия 1— $M_\infty=5$, линия 2 — — $M_\infty=4,5$, линия 3 - · - · $M_\infty=4$, и линия 4 - · - $M_\infty=3,5$) можно наблюдать существенное возрастание значений давления в области падения скачка уплотнения 1 на стенке с увеличением числа Маха потока.

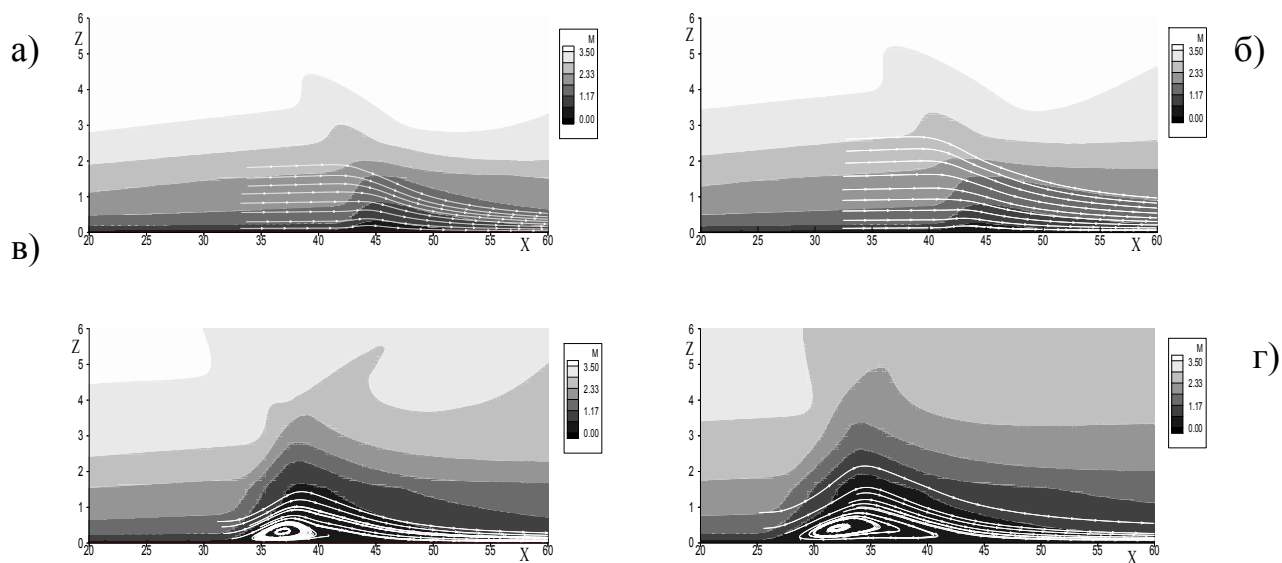


Рис. 3 - Распределение местного числа Маха и линии тока
 а- $M_\infty=5$, б- $M_\infty=4,5$, в- $M_\infty=4$, г- $M_\infty=3,5$

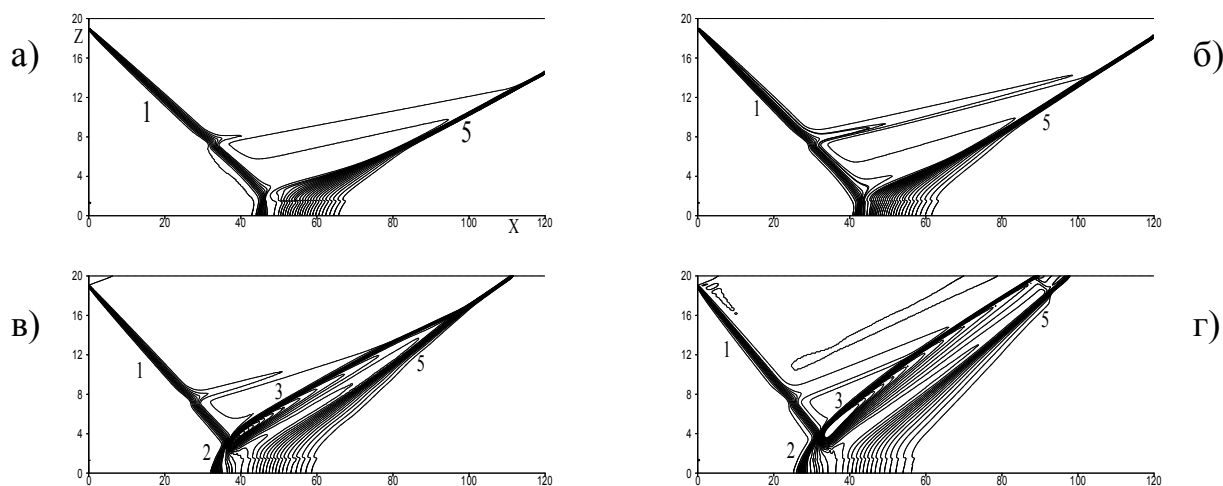
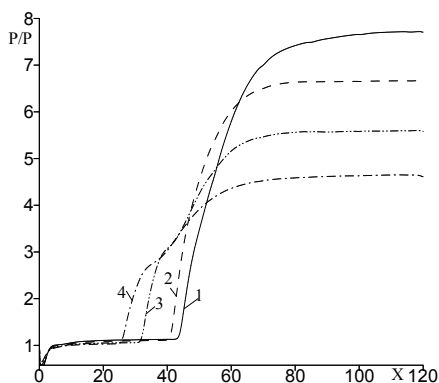


Рис. 4 - Распределение изобар

Эти результаты подтверждают тот факт, что при возрастании скорости течения разница между давлением за скачком и давлением в потоке растет.

Ниже приведены результаты численного эксперимента по изучению взаимодействия скачка уплотнения (угол генератора $\alpha=14^\circ$) с пограничным слоем на стенке при различных значениях числа Рейнольдса. Во входном сечении толщина пограничного слоя и толщина пристенного слоя при разных значениях чисел Re представлены в таблице. Результаты демонстрируют, что при всех исследуемых режимах течения происходит отрывное взаимодействие падающей ударной волны с пограничным слоем, однако размеры и структура области отрыва отличаются. Из представленных рисунков картины

местного числа Маха и линий тока наблюдается рост зоны отрыва в зависимости от уменьшения числа Re .



	δ_1	δ_2
$Re=10^6$	0,73	0,14
$Re=10^5$	1,16	0,23
$Re=10^4$	1,82	0,36
$Re=10^3$	2,86	0,57

Рис. 5- Распределение давления на стенке
1- $M_\infty=5$, 2- $M_\infty=4,5$, 3- $M_\infty=4$, 4- $M_\infty=3,5$

Таблица

Это связано с возрастанием толщины вязкого подслоя пограничного слоя, приводящее к большему ее отрыву. Выявлено что при $Re=10^3$ происходит сложная многовихревая структура отрыва. Для $Re=10^4$ область отрыва состоит из двух вихрей, а для $Re=10^5$ и $Re=10^6$ на графиках просматриваются только по одному вихрю. Из фигуры 6, где можно наблюдать поле изобар и линий тока в области возникновения отрывных зон видно, что в результате взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем возникает многоструктурная отрывная область при умеренных числах Рейнольдса.

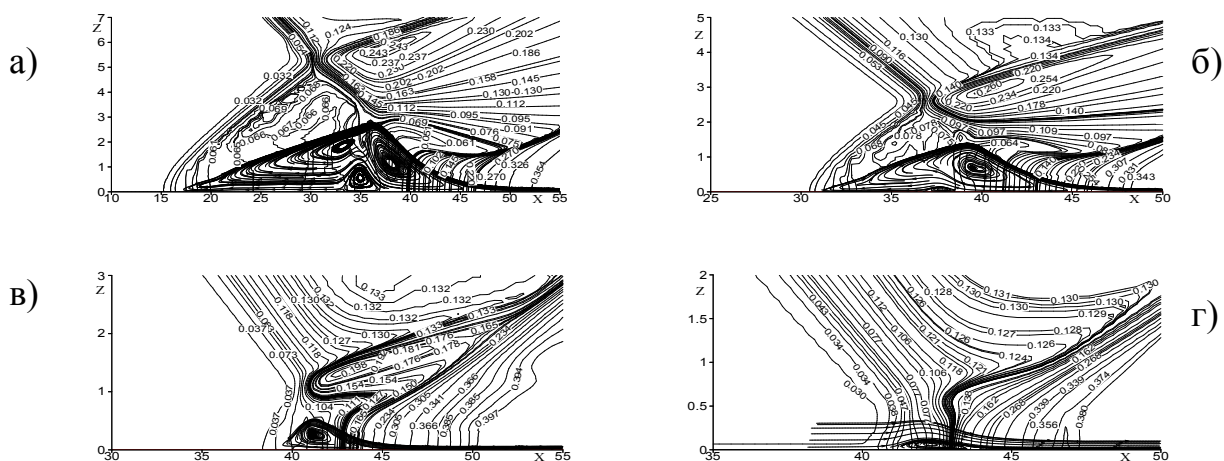


Рис. 6. Распределение изобар и линий тока
а- $Re=10^3$, б- $Re=10^4$, в- $Re=10^5$, г- $Re=10^6$.

В третьей главе численно моделируется сверхзвуковое течение многокомпонентного газа в плоском канале с поперечным вдувом струи и исследуется взаимодействие ударной волны, возникающей перед вдуваемой струей, с пограничным слоем, как на нижней, так и на верхней стенках в за-

висимости от параметра нерасчетности и ширины струи. Имеющиеся на данный момент немногочисленные исследования позволяют построить следующую схему течения, показанную на рисунке 7.

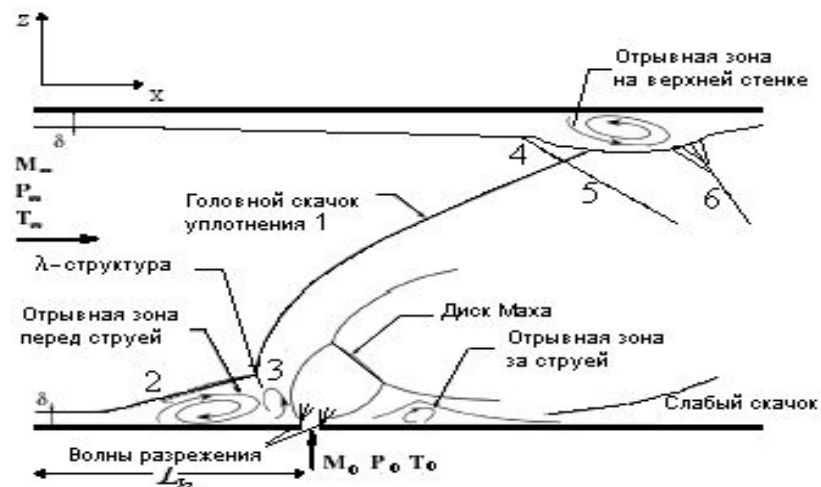


Рисунок 7 – Схема течения

Математическая формулировка рассматриваемой задачи основывается на двумерных осредненных по Фавру уравнениях Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси, описанных в главе 2. Граничные условия при этом примут вид: на входе-

$$W_k = W_{k\infty}, \quad P = P_\infty, \quad T = T_\infty, \quad u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}}, \quad w = 0,$$

$$Y_k = Y_{k\infty}; \quad \text{на вдуве струи: } W_k = W_{k0}, \quad P = nP_\infty, \quad T = T_0, \quad w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, \quad u = 0,$$

$Y_k = Y_{k0}$, (здесь $n = P_0/P_\infty$ – степень нерасчетности, индекс 0 относится к параметрам струи); на нижней и верхней стенках задается условие прилипания и теплоизоляции; во входном сечении вблизи стенок канала задается пограничный слой; на выходной границе задаются условия неотражения.

Для проведения сравнения с опытными данными² выполняется расчет задачи плоского сверхзвукового течения воздуха ($M_\infty = 2.9, P_\infty = 0.0663 \text{ МПа}, T_\infty = 108 \text{ К}$) с перпендикулярным вдувом звуковой струи гелия ($T_0 = 217 \text{ К}, P_0 = 1.24 \text{ МПа}$) через щель на нижней стенке шириной 0.0559 см . Значения C_{pk} (Дж/(Мол.К)) компонент O_2, N_2, He при температуре ниже 300 К , вычисляются по предложенной полуэмпирической формуле определения удельных теплоемкостей от значений температур в диапазоне $70 \text{ К} \leq T \leq 300 \text{ К}$. Высота и ширина рассматриваемого канала $H = 7.62 \text{ см}$ и $L = 25 \text{ см}$, соответственно.

2 Шунь Дж.Ш., Юнь С. Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU- факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // Аэрокосмическая техника. - 1990. - № 10. - С.102-113.

В данном эксперименте для оценки точности разностной схемы и ее эффективности были проведены расчеты распределения давления на стенке перед щелью и за ней на последовательности сеток с числом узлов от 301×221 до 421×281 . На рисунке 8 показаны распределения давления на стенке, рассчитанные с различными узлами, где кривые: 1) — — — 421×281 ; 2) — — — 401×281 ; 3) — · — · 381×281 ; 4) ····· 301×281 ; 5) — · — · — 301×221 ; ●●● - эксперимент из работы². Увеличение числа узлов расчетной сетки приводит к тому, что эксперименты и кривые расчетов, начиная с узлов 381×281 и выше практически совпадают.

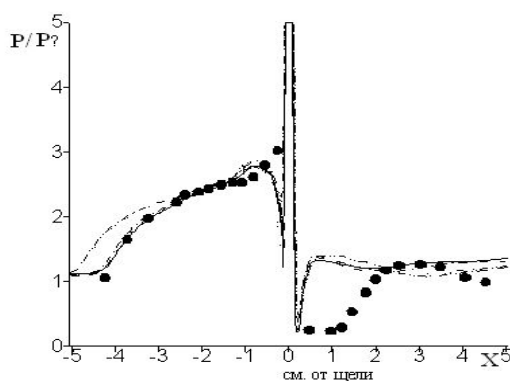


Рис. 8 – Давление на стенке

Численные эксперименты по изучению взаимодействия скачков уплотнения с пограничными слоями для щелей различной ширины представлены на рисунке 9 (распределение изобар а) — h_1 , б) — h_2 , в) — h_3). В результате взаимодействия струи с набегающим потоком наблюдается образование систем скачков уплотнения, которые соответствуют ранее изученным и схематически представленным на рисунке 7. Видно, что отошедший головной (1), косой (2) и замыкающий (3) скачки уплотнения образуют λ -образную систему. Как следует из рисунка 9в для h_3 , скачок (3) слабо выражен, тогда как для двух других случаев (рисунки 9а, б) он отчетливо просматривается. Из рисунка 9 следует, что головной скачок (1), достигая верхней границы, создает положительный градиент давления, который оказывается достаточным для отрыва пограничного слоя на верхней стенке. При этом сверхзвуковая область пограничного слоя отклоняется и порождает волну сжатия (4), которая распространяется в виде отраженного скачка (5). Также на графиках просматривается веер волн разрежения в пограничном слое в виде теней за скачком (5), обусловленного расширением потока в области за скачком (1). Таким образом, здесь наблюдается хорошо известная в литературе картина взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. Далее ниже по течению в результате присоединения оторвавшегося потока к обтекаемой стенке, где течение опять становится безотрывным, формируется отраженный скачок

уплотнения (6), возникающий в области смешения оторвавшегося пограничного слоя с внешним потоком.

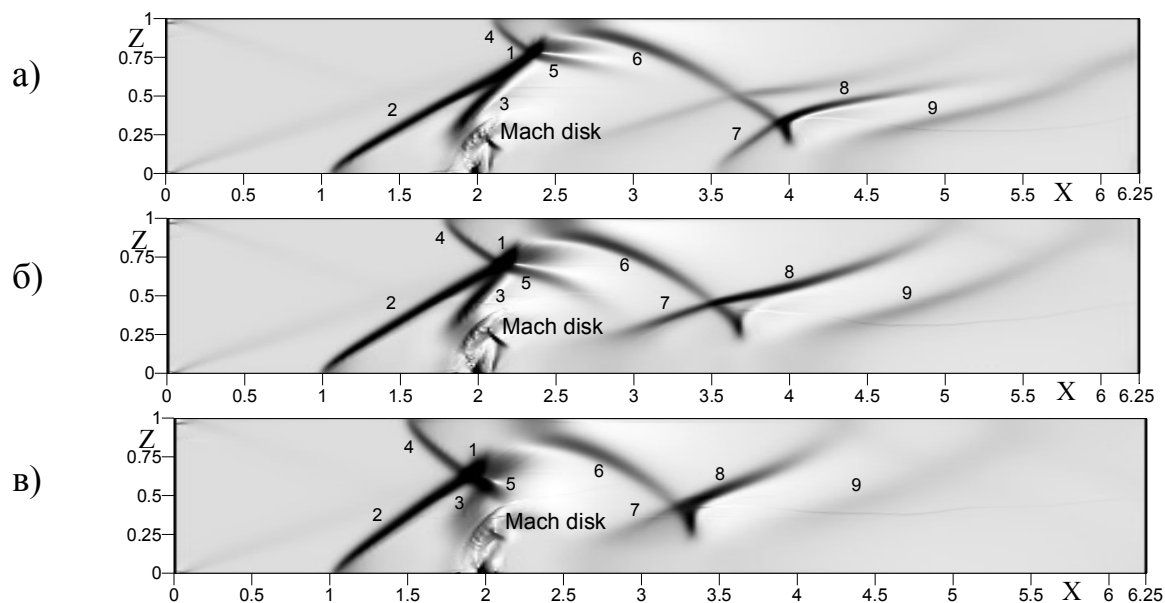


Рис. 9 – Распределение изобар для ширины щели: а) h_1 , б) h_2 , в) h_3

Аналогично картине перед струей, головной (1) скачок уплотнения, волна сжатия (4) и отраженный (5) скачок уплотнения, пересекаясь в одной точке, образуют λ -образную систему. Размеры данной λ -образной структуры значительно возрастают с ростом ширины щели, что можно наблюдать из сравнения рисунков 9а-9в. Здесь видно, что увеличение ширины струи приводит к тому, что волна сжатия (4), сформировавшись вблизи верхней стенки, существенно сдвигается по направлению к входной границе.

Из рисунка 9 следует, что, помимо общеизвестной ударно-волновой картины, здесь появляется дополнительная новая структура, обусловленная взаимодействием отраженного скачка (6) с пограничным слоем на нижней стенке за струей. Видно, что взаимодействие нижнего пограничного слоя и скачка (6) аналогично картине, наблюдаемой на верхней стенке, т.е. создается волна сжатия (7), которая распространяется в виде скачка (8). Также здесь просматривается слабая отраженная волна (9).

Распределение местного числа Маха ($M = \sqrt{u^2 + w^2} / c$, здесь c – местная скорость звука) и линии тока в зоне вдуваемой струи, представлено на рисунке 10 (а– h_1 , б– h_2 , в– h_3). Из графика следует, что для случая h_1 (рис. 10а) струя, истекая из щели со звуковой скоростью, ускоряется и на некотором расстоянии становится сверхзвуковой (значение местного числа Маха увеличивается до 2.5). Граница образовавшейся сверхзвуковой области замыкается, очерчивая круг, который соответствует бочке, отделяющей сверхзвуковую зону от дозвуковой. В верхней части бочки волны сжатия сходятся, образуя диск Маха. За бочкой течение замедляется и становится дозвуковым.

Из рисунка видно, что оно практически смыкается с дозвуковой областью за струей. Также из сравнения рисунков 10 заметно, что погружение сверхзвуковой бочки в дозвуковую область увеличивается с ростом размеров щели. На графике хорошо просматривается диск Маха, размеры которого изменяются неоднозначным образом. Известно, что возрастание размеров щели приводит к расширению бочкообразной структуры в струе и, как следствие, к увеличению диска Маха. Однако, для h_3 можно наблюдать сужение бочки несмотря на то, что размер щели является максимальным. Такой рост размеров диска Маха объясняется тем, что в случае h_3 происходит смещение зоны отрыва в сторону входной границы, соответственно расстояние между струей и верхней возвратной областью становится минимальным (конфузор). Вследствие этого набегающий поток существенно ускоряется, тем самым препятствует расширению струи.

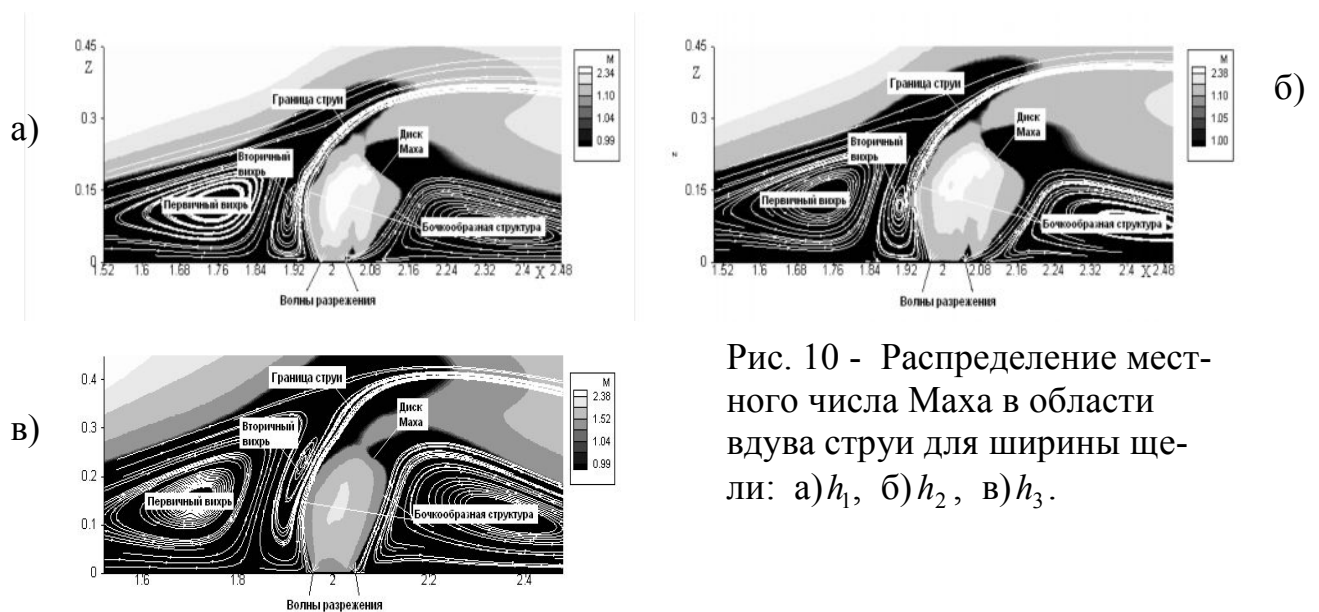


Рис. 10 - Распределение местного числа Маха в области вдува струи для ширины щели: а) h_1 , б) h_2 , в) h_3 .

Проведенные вычислительные эксперименты влияния параметра нерасчетности на высоту проникновения вдуваемой струи в набегающий поток представлены на рисунке 11. На основе нелинейной зависимости, представленной на графике, построена аналитическая формула определения глубины проникновения струи в натекающий поток в зависимости от параметра нерасчетности, которая имеет вид $h / d = F (M_0, M_\infty) (P_0 / P_\infty)^{1/2}$ здесь h – высота проникновения струи в натекающий поток;

$$F (M_0, M_\infty) = A \sqrt{ (1 + 0.5 (\gamma - 1) M_\infty^2)^{\gamma / (\gamma - 1)} \cdot \left((1 + 0.5 (\gamma - 1) M_0^2)^{\gamma / (\gamma - 1)} \right)^{-1} } -$$

функция, зависящая от числа Маха струи и числа Маха потока, где $A = 1.37$ – добавочный коэффициент; P_0 - давление в струе, P_∞ - давление в потоке.

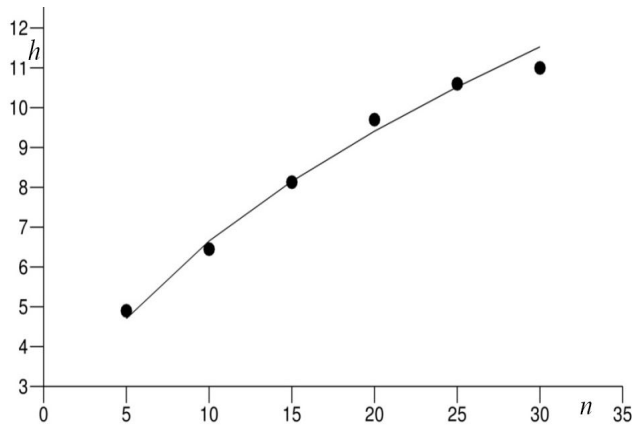


Рис. 11 - Зависимость глубины проникновения струи от параметра нерасчетности «—» – результаты по формуле, «•••» – численные расчет

Как видно из графика результаты, полученные по предложенной формуле, с достаточной точностью определяют глубину проникновения вдуваемой поперечной струи в набегающий поток.

В четвертой главе численно моделируется вдув звуковых струй из круглых отверстий, расположенных симметрично на верхней и нижней стенках канала, перпендикулярно сверхзвуковому потоку и изучается динамики возникновения дополнительных вихревых структур в самой струе и за струей в зависимости от параметра нерасчетности в диапазоне от умеренных до больших значений. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки. Схема течения и качественная картина вихревой структуры³ показана на рисунках 12а и 12б соответственно.

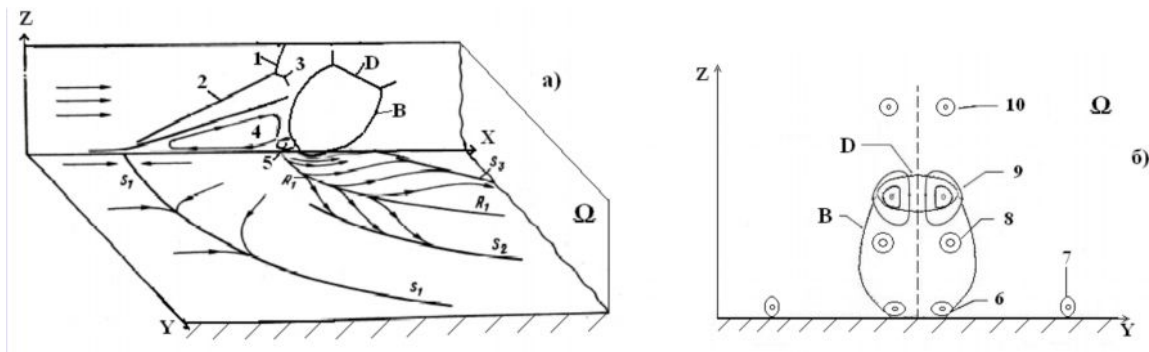


Рис. 12 - Схема течения

Исходной является система трехмерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, замкнутых $k-\omega$ моделью турбулентности. Начальные и граничные условия имеют вид: в потоке $u=1, v=0, w=0, \rho=1, T=1$; в струе $u=0, v=0, T=1, w=\sqrt{T}M_0/M_\infty, p_0=np_\infty$, где M_0, M_∞ - числа Маха,

³ Viti V., Neel R., Schetz J. Detailed Flow Physics of the Supersonic Jet Interaction Flow Field // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21. April.

$n = p_0 / p_\infty$ - степень нерасчетности; на стенке задаются условия прилипания и теплоизоляции; на верхней границе расчетной области заданы условия симметрии; на боковых границах – условие свободной границы; на выходе - граничные условия неотражения. Вблизи стенки задается пограничный слой, продольная составляющая скорости аппроксимируется степенным законом.

Авторами была разработана ENO-схема на основе идеи метода Годунова и показана применимость схемы к решению задачи сверхзвукового течения многокомпонентного газа в плоском канале с вдувом перпендикулярных струй. Для решения поставленной задачи ENO схема обобщается на трехмерный случай. Исследуется обтекание сверхзвуковым потоком с параметрами $Re = 1.87 \cdot 10^7$, $Pr = 0.9$, $M_\infty = 3$, звуковой струи совершенного газа с диаметром отверстия $d = 1.4 \text{ cm}$. Размеры рассматриваемой области определяются как $H_x = 30$, $H_z = 15$, $H_y = 30$ калибров, центр струи находится на расстоянии $x_0 = 10$, $y_0 = 15$ калибров. Расчет производится на разнесенной сетке размером $201 \times 101 \times 101$ с шагами по пространственным координатам $\Delta x = 0.1 \div 0.5$, $\Delta z = 0.03 \div 0.25$, $\Delta y = 0.1 \div 0.5$, шаг по времени $\Delta t = 0.01 - 0.025$. Во входном сечении задается толщина пограничного слоя $\delta_1 = 1$, вычисленная для $x = 250$. Сгущение сетки вблизи стенки осуществляется таким образом, чтобы на расчет пристенного слоя приходилось 5-8 узловых точек по направлению оси z , а расчет всего пограничного слоя выполняется с использованием 22-26 узлов расчетной сетки. Представленные далее на рисунках 13-19 численные результаты расчетов для параметров нерасчетности $3 \leq n \leq 50$ позволяют изучить вихревые структуры, возникающие как в самой струе, так и в области взаимодействия между струей и набегающим потоком. На графике 12а, видно, что в зоне, примыкающей к стенке перед струей, формируются два противоположно вращающихся подковообразных вихря (4) и (5) в результате отрыва набегающего потока, вызванного λ -образной системой скачков уплотнения (скачки (1), (2) и (3) на рисунке). Вихрь (5), примыкающий к струе, вращается против часовой стрелки, а вихрь (4), отстоящий от него, по часовой стрелке, то есть навстречу набегающему потоку, в результате чего образуются линии стекания и растекания потоков⁴.

Пара вихрей за струей (вихрь (8), рисунок 12б) генерируются вихрем (5). Так, в зоне перед струей, т.е. на расстоянии $x = 9.1$ калибров от начала расчетной области (рисунок 13 – результаты поля вектора скорости и проекции линий тока на плоскость zy , нормальную к оси x), хорошо видны боковые вихри (8).

4. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. - 1967. - № 3. - С.97-102.

Численные результаты показывают, что эти вихри, с центрами вращения в слое смешения струи и потока, обтекающей струю, увеличиваются в размерах по мере продвижения вниз по потоку.

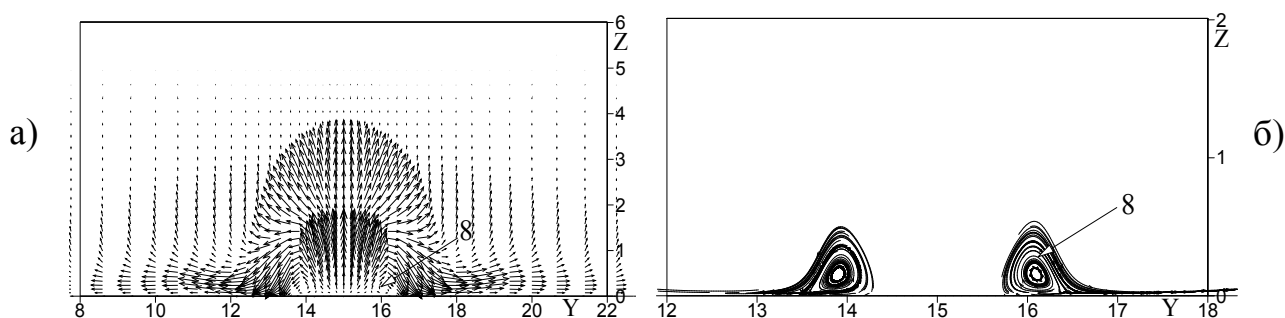


Рис. 13 а) Поле вектора скорости, б) проекции линий тока на плоскость, нормальную к оси x в плоскости zy , сечение $x=9.1$.

Рост размеров этих вихрей обусловлен прежде всего тем, что он сосредоточен в зоне, примыкающей к стенке, и соответственно рост пограничного слоя приводит к его увеличению. Максимальные размеры бокового вихря наблюдаются в сечении $x = 11.40$ и представлены на графике 14 (а) поле вектора скорости,). Ядро вихря расположено около острого угла бочкообразной структуры, возникающей в струе, который можно наблюдать из рисунков 14б, где представлено распределение местного числа Маха и проекции линий тока в этом же сечении. Здесь четко прослеживается, что центр вращения вихря находится у боковой острой кромки бочки. Из численных экспериментов следует, что в сечении $x=13.5$ наблюдается уменьшение интенсивности вихря (8), а также окончание бочкообразной структуры в струе. Далее, в сечении $x = 14.70$, на рисунке 15 (а) вектор скорости, б) изомахи и линии тока), показано возникновение вихря (9), который формируется у основания диска Маха и вносит основной вклад в смещение струи и потока.

Из графика следует, что эта пара вихрей появляется за диском Маха в результате взаимодействия струи и восходящего потока под струей. На рисунке 15б показано, что в точке зарождения вихря поток является дозвуковым. Также на графике 15а можно наблюдать вихревой след вблизи стенки, состоящий из симметрично вращающихся вихрей (6).

Как было указано выше, часть вихря (5) порождает боковую вихревую систему (8), и, как следует из графика, оставшаяся его часть, примыкающая к струе, формирует вихревой след (6). Возникновение (6) связано с тем, что непосредственно за струей у стенки образуется область пониженного давления, куда и устремляется натекающий поток.

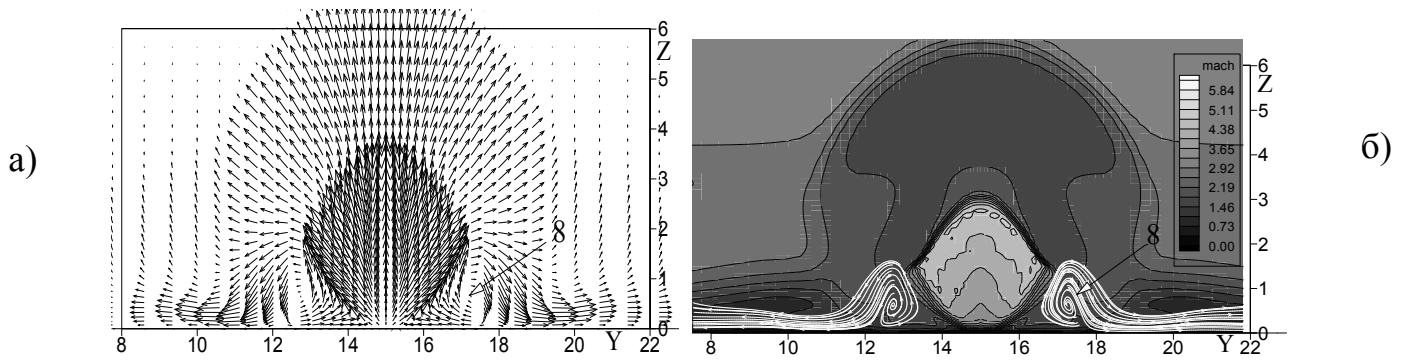


Рис. 14 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока в плоскости zy , сечение $x=11.4$.

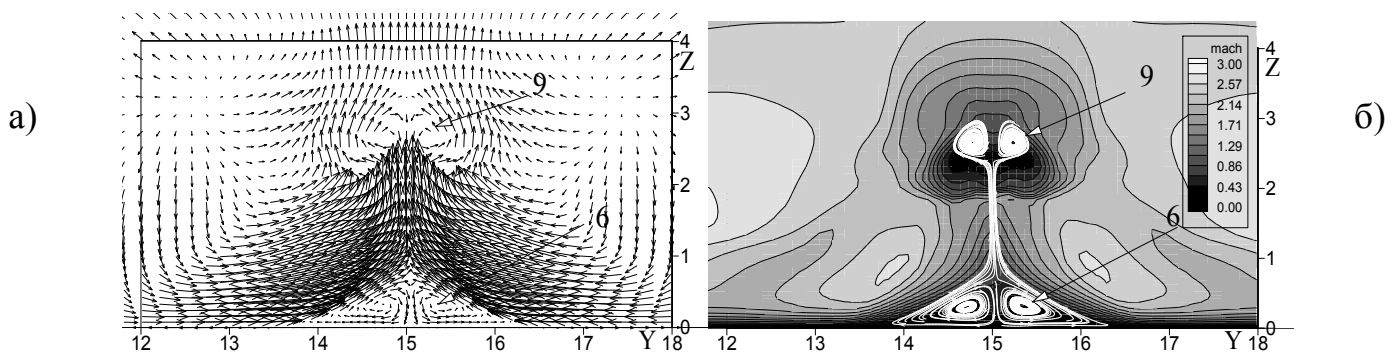


Рис. 15 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока в плоскости zy , сечение $x=14.7$.

На рисунке 16, на расстоянии $x = 15.80$, представлена картина вихревой системы, уже состоящая из двух пар вращающихся в противоположных направлениях вихрей (8) и (9). Численные результаты показывают что вихрь (8) по мере продвижения его вниз по потоку теряет интенсивность, поэтому он не просматривается в сечениях от $x=14.1$ до $x=15.4$. По всей видимости, дальнейшая интенсификация этого вихря связана с взаимодействием натекающего потока и вдуваемой струи. Здесь же на графике виден вихрь (6), который существенно увеличился в размерах. Из эксперимента следует, что в сечении $x = 18$ две пары вихрей (8) и (9) сливаются в один вихрь, его направление вращения совпадает с вращением вихря (8) и он просматривается вплоть до конца расчетной области.

В сечении $x=18.9$ (рисунок 17 а) распределение проекций линий тока на плоскость zy и б) изолинии продольной составляющей скорости, в) - изолинии поперечной составляющей скорости v , г) изолинии поперечной составляющей скорости w) можно наблюдать вихрь (10), который формируется в результате взаимодействия струи и высокоскоростного натекающего потока, проходящего над бочкообразной структурой.

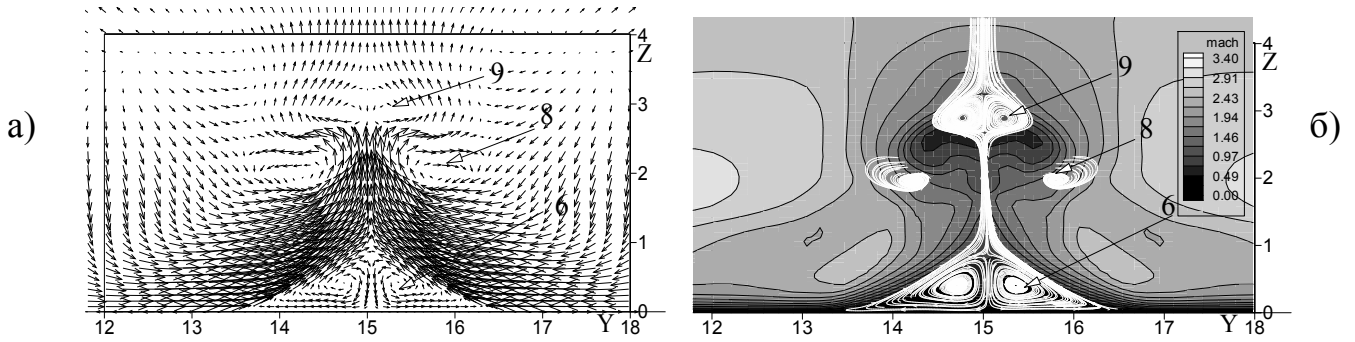


Рис. 16 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока в плоскости zy , сечение $x=15.8$.

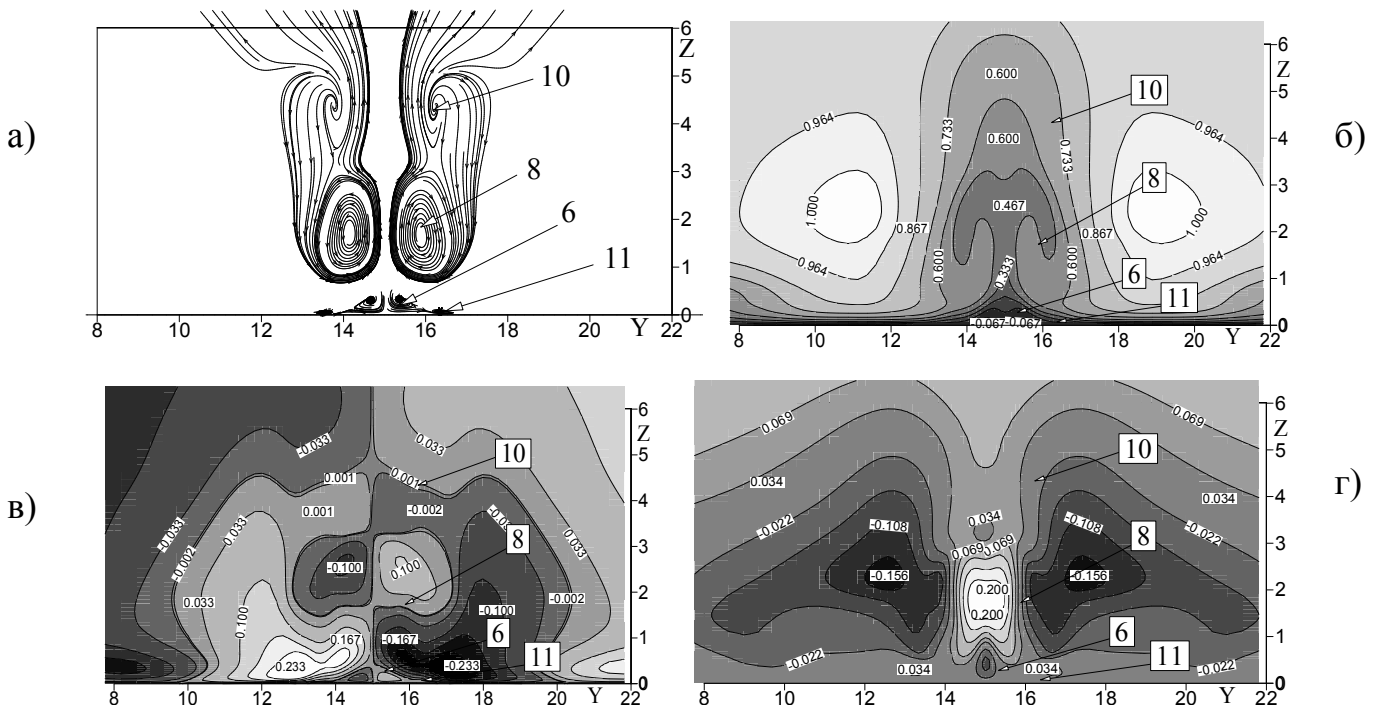


Рис. 17 – а) проекции линий тока, б) изолинии продольной составляющей скорости, в) изолинии поперечной составляющей скорости v , г) изолинии поперечной составляющей скорости w в сечении $x=18.9$.

Данный вихрь был впервые численно обнаружен и представлен в работе³. Результаты показывают, что вихрь (10) двигается вертикально вдоль линии симметрии и на достаточном расстоянии от поверхности пластины. По всей видимости, появление вихря (10) зависит от интенсивности смещения струи и потока, поскольку ранние численные эксперименты, проведенные с меньшими нерасчетностями, не выявили наличие этой пары вихрей.

При сравнении вихревой структуры (8) в сечениях $x = 18$ и $x=18.9$ можно наблюдать, что центр вращения сместился к стенке. Это факт можно объ-

яснить тем, что на данном уровне происходит прилипание струи к плоскости пластины, в результате чего формируется новая пара вихрей вблизи стенки, обозначенная как (11) (рисунок 17). Тем самым подтверждается предположение, сделанное в работе⁴, о том, что, вероятно, между струей и областью ее прилипания к стенке существует своего рода каверна, в которой возможно появление двух вихрей с противоположным направлением вращения. И, как следует из рисунка, направление вращения вихря (11) совпадает с вращением следа (6).

На расстоянии $x=20.6$ (рисунок 18) видно, что пара вихрей (11) сместилась от линии симметрии и стала более интенсивной. Так же на этом рисунке показаны вихри (8) и (10).

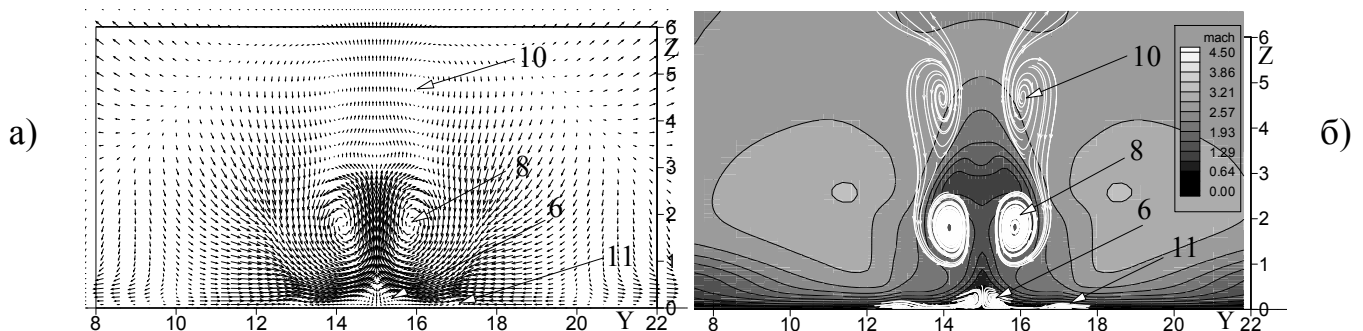


Рис. 18 - а) Поле вектора скорости, б) распределение местного числа Маха и проекции линий тока в плоскости zy , сечение $x=20.6$.

В сечении $x=24$ вихрь (11), находится на значительном расстоянии от линии симметрии, а вихрь (10) уже не наблюдается. Численные эксперименты показывают, что при $x=28$ вихри (11) и (6) объединяются.

Следует отметить, что вычислительный эксперимент для малых значений нерасчетности ($n < 10$) показывает отсутствие пар вихрей (10) и (11). При этом наблюдается возникновение только бокового (8) и нижнего (6) вихрей, а структура (9) не генерируется, что объясняется уменьшением интенсивности бочкообразной структуры в самой струе, за счет чего не происходит образование дополнительного вихря. При параметре нерасчетности $n=10$ и больше картина вихревой структуры меняется, в частности появляются вихри (9) и (11), однако в отличие от нерасчетности 50, не формируются верхний вихрь (10), это связано с тем, что при меньших нерасчетностях интенсивность смещения струи и потока уменьшается.

В работе было проведено сравнение численных результатов с опытными данными работы⁴ для параметра нерасчетности $n=40$. На рисунке 20 а представлены результаты распределения давления P/P_∞ на стенке в плоскости симметрии (сплошная линия – численные результаты, « $\circ\circ\circ\circ$ » – экспериментальные данные). Здесь начало координат выбранной системы совпадает с центром отверстия для вдува. По оси абсцисс отложена величина

$X_1 = (X - \frac{1}{2}d) - L_1$, где L_1 - расстояние от передней точки струи до начала повышения давления, d - диаметр струи. Как известно, перед струей вследствие торможения набегающего потока повышается давление и образуются области с различными градиентами давления, что можно наблюдать на графике. Из рисунка следует удовлетворительное согласие результатов расчетов с измерениями опытов.

Сравнение рассчитанных значений длины отрывной зоны и опытных данных⁴ в зависимости от нерасчетности приведено на рисунке 20 б. На графике кривая - пространственное обтекание, « Δ »- эксперименты. Как видно из графика численные результаты трехмерного случая хорошо согласуются с экспериментом.

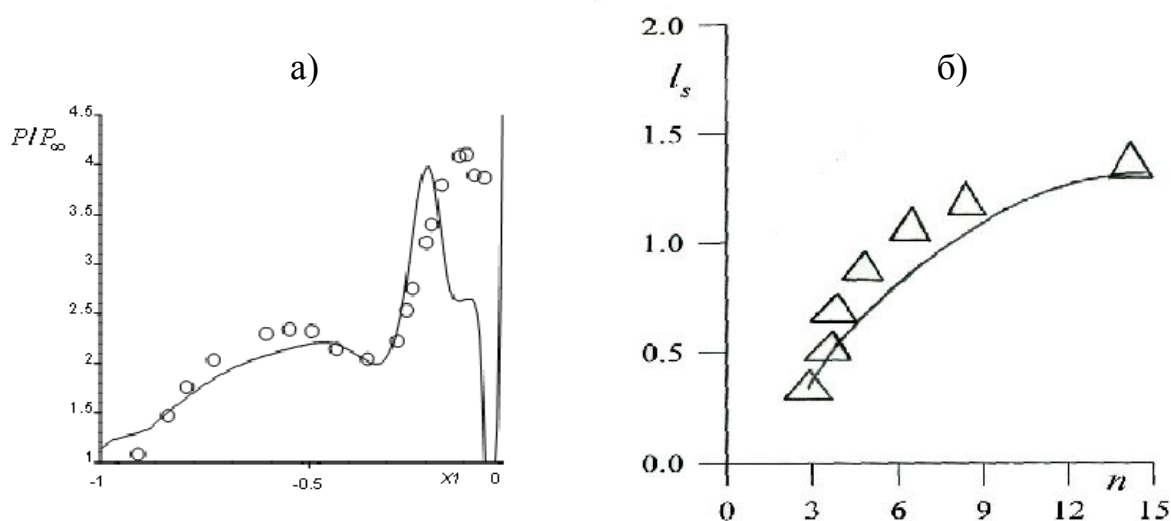


Рис. 19 а) Распределение давления на стенке на оси симметрии, б) влияние параметра нерасчетности на длину отрывной зоны.

В пятой главе численно моделируется пространственное истечение круглой струи в спутный турбулентный поток совершенного газа для расчетного режима течения. Система уравнений движения вязкого совершенного газа осредняется посредством операции фильтрации для разделения крупных и мелких вихревых структур (LES метод – Large Eddy Simulation), где в качестве среднего значения в точке принимается среднее значение функции по объему ячейки расчетной сетки. Полученная система уравнений, замыкается в соответствии с моделью Смагоринского, вихревая вязкость

определяется по формуле: $\nu_t = (C\Delta)^2 \sqrt{\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}$ где $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j = \overline{1,3}$,

C – коэффициент модели, Δ – ширина фильтра, равная размеру шага по пространственным координатам. Постановка начальных и граничных мгновенных значений параметра крупномасштабного поля турбулентности основана на спектральном генераторе флуктуаций скорости, позволяющем

воспроизводить анизотропные турбулентные характеристики на входе, и представляется в виде суммы среднего по времени значения и пульсационного значений $f = (\bar{f} + f')$. Средние величины \bar{f} предполагаются известными из RANS решения, f' – поле флуктуаций, которое задается в соответствии с методом генерации синтетической турбулентности. Для моделирования пульсаций скорости принимается:

$$\bar{u}'(r, t) = 2\sqrt{3/2} \sum_{n=1}^N \sqrt{q^n} [\cos(k^n r + \omega^n t)]^5. \quad \text{Здесь } N - \text{ число мод, } q^n -$$

нормированная амплитуда моды, которая принимается равной 0,16 процентов от максимальной скорости из двух потоков газа на входе; k^n – модуль вектор волнового числа n -ой моды, случайное число в диапазоне от 0 до 1; ω^n – частота n -ой моды, ω^1 – самая усиливающая частота естественного образования слоя смешения, $\omega^2, \omega^3 \dots, \omega^n$ – ее субгармоники.

Максимальное волновое число при $\omega^1 = 0.094$ равно $\alpha_1 = 0.4$. На месте перехода двух потоков газа физические переменные определяются функцией гиперболического тангенса $\phi(r) = 0.5(\phi_0 + \phi_\infty) + 0.5(\phi_0 - \phi_\infty) \tanh(0.5(r - r_0) / \delta_\theta)$, где $\phi = (u, v, w)$, δ_θ – толщина потери импульса. При задании граничного условия для мгновенного поля продольной составляющей скорости в потоке в следующем виде реализуется симметричный режим истечения:

$$u = \bar{u}_\infty + 4,24 \cdot \varepsilon \cdot \text{Gaussian}(r) \cdot \cos(\omega \cdot t) + 4,24 \cdot \varepsilon \cdot \text{Gaussian}(r) \cdot \sin(\omega \cdot t) + U_{nois}$$

и на струе:

$$u = \bar{u}_0 + 4,24 \cdot \varepsilon \cdot \text{Gaussian}(r) \cdot \cos(\omega \cdot t) + 4,24 \cdot \varepsilon \cdot \text{Gaussian}(r) \cdot \sin(\omega \cdot t) + U_{nois}$$

здесь $\varepsilon = q^n$, $U_{nois} = A \cdot u_\infty \cdot f$, где A – амплитуда входного шума, равная 3% от максимальной скорости на входе, f – случайное число в диапазоне от 0 до 1. Из рисунка 20а, где представлено мгновенное поле завихренности, видно формирование так называемых первичных колец. Эти сильные вихревые структуры регулярно формируются и сохраняются на достаточно большом расстоянии вниз по течению. График показывает, что вихревые кольца не взаимодействуют друг с другом, и на участке в 160 калибров наблюдаются только первичные кольца.

Для получения спирального режима течения условия задаются для мгновенного поля поперечных составляющих скорости и имеют вид:

$$v = 4,24\varepsilon \cdot \text{Gaussian}(r) \sin(\omega \cdot t) + U_{nois}, \quad w = 4,24\varepsilon \cdot \text{Gaussian}(r) \cos(\omega \cdot t) + U_{nois},$$

Рисунок 20б демонстрирует спиральные структуры, непрерывно формирующиеся почти от начала течения и далее вниз по потоку. Разрушение структуры струи в этом случае происходит раньше, чем в предыдущем случае, так как компоненты завихренности вдоль потока включаются на более ранней стадии течения.

Проиллюстрированные структуры истечения турбулентной сверхзвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток согласуются с DNS исследованиями Силва, Урбан и др., также приведены результаты сравнения с известными экспериментальными данными, которые показывают удовлетворительное согласие.

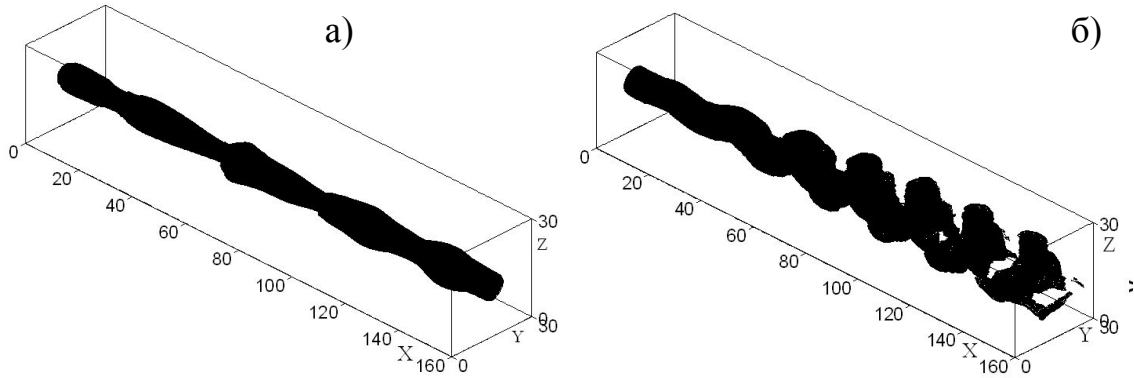


Рис. 20 Мгновенное поле завихренности а) симметричный режим
б) спиральный режим

5 Адамьян Д. Ю., Стрелец М. Х., Травин А. К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений.// Математическое моделирование. – 2011. – Том 23, № 7. – С.3-19

ВЫВОДЫ

- Для течения многокомпонентной газовой смеси разработана неявная методика решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса, основанная на WENO-схеме высокого порядка точности, позволяющая осуществлять сквозной расчет без введения искусственной диссипации на разрывах и обладающая простотой численной реализации. Проведенный ряд численных экспериментов с целью верификации построенного метода показал эффективность построенного алгоритма при расчете сверхзвуковых турбулентных течений с большими градиентами. Построенная численная модель позволяет рассчитывать характеристики сверхзвукового течения с вдувом струй в зависимости от режимных параметров, а также легко обобщается на трехмерный случай и дает возможность в полной мере изучать пространственные течения.

- Предложена и численно реализована постановка граничных условий неотражения на выходной границе с использованием характеристического анализа уравнений Навье-Стокса, позволяющая проводить расчеты в дозвуковых и сверхзвуковых областях течений. Построенные граничные условия дают возможность реализовать течение так называемого «свободного полета», которое исключает нежелательное влияние отраженных от вычислительной границы волн, а также учитывают все детали течения вниз по потоку и при этом обеспечивают получение реального решения в вычислительной области.

- На основе разработанного алгоритма произведен расчет турбулентного сверхзвукового течения вязкого газа вдоль плоской пластины с падающим на нее скачком уплотнения. Сопоставление численных результатов с экспериментом показывает удовлетворительное согласование данных. Серией численных экспериментов детально изучена структура взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем в зависимости от чисел Маха и Рейнольдса потока, в частности:

- выявлено, что с ростом числа Маха потока (начиная с $M_\infty = 4,5$ и выше) интенсивности падающего скачка уплотнения не достаточно для отрыва пограничного слоя в тонком пограничном слое.
- подтверждено, что уменьшение числа Рейнольдса приводит к многовихревой структуре отрыва пограничного слоя вследствие возрастания толщины вязкого подслоя, приводящее к большему ее отрыву;
- численный анализ избыточного давления на стенке в зависимости от числа Маха сверхзвукового течения показывает, что при возрастании скорости течения разница давлений за скачком и перед ней растет, одна-

ко это увеличение является недостаточным для роста критического перепада давлений, необходимого для отрыва пограничного слоя;

- Предложена математическая модель сверхзвукового течения многокомпонентного газа в канале с поперечным вдувом щелевой струи, позволяющая изучать взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем как на стенках канала, так и их влияние на смещение струи с натекающим потоком. Впервые численно изучено образование ударно-волновой структуры и ее зависимость от режимных параметров, в частности от размеров щели и параметра нерасчетности. Численный анализ позволил выявить новые закономерности взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, а именно:

- получено, что помимо хорошо известной λ -структуры перед струей, состоящей из головного (1), косоугольного (2) и замыкающего (3) скачков уплотнения (см.рис.9), в результате достижения головной ударной волны верхней стенки так же реализуется известная картина взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем на стенке, состоящая из системы волн сжатия и волн разрежения (4)-(6);

- выявлена новая ударно-волновая структура (7)-(9), образованная в результате достижения нижнего пограничного слоя волн сжатия, которые были сформированы на верхней границе пограничного слоя. Получено, что эта система скачков вызывает отрыв пограничного слоя, который приводит к улучшению смещения вдуваемой струи и натекающего потока.

- выявлено уменьшение расширения струи в области вдува с ростом ширины щели, обусловленное эффектом конфузора, возникающего между вдуваемой струей и отрывной зоной вблизи верхней стенки канала;

- в результате анализа влияния параметра нерасчетности на глубину проникновения вдуваемой струи водорода в натекающий сверхзвуковой поток воздуха предложена аналитическая формула определения дальности вдуваемой струи в зависимости от режимных параметров.

- Разработана численная модель пространственных сверхзвуковых турбулентных течений совершенного газа в канале с вдувом струй из сопел различной конфигурации. На основе разработанной модели детально изучены закономерности образования системы вихрей для задачи симметричного перпендикулярного вдува звуковых круглых струй со стенок канала в сверхзвуковой турбулентный поток для различных параметров нерасчетности в диапазоне от умеренных до больших значений, в результате получено:

- в соответствии с ранее известными данными из экспериментов и расчетов других авторов для малых и умеренных параметров нерасчетности показано наличие парной вихревой структуры перед струей, вихревого следа за струей и циркуляционной зоны в самой струе;

- выявлены известные отличительные особенности формирования областей отрывов в течениях с большими параметрами нерасчетности, где наряду с вышеуказанными вихрями присутствуют новые зоны возвратных течений в области взаимодействия струи и высокоскоростного натекающего потока, проходящего над бочкообразной структурой; так же здесь обнаружен новый вихрь, который формируется в области прилипания струи к плоскости пластины.

- На основе подсеточной модели турбулентности численно изучено турбулентное нестационарное сверхзвуковое течение круглой струи в сверхзвуковом спутном потоке для расчетного режима течения с различными постановками нестационарных граничных условий на входе. Решение осредненных по пространству уравнений Навье-Стокса осуществляется на основе ENO-схемы. Постановка граничных условий основана на спектральном генераторе флуктуаций скорости, позволяющем воспроизводить анизотропные турбулентные характеристики на входе, а также изучать эволюцию расширения струи и ее рост вниз по потоку в зависимости от граничных условий на входе. Сравнение численных расчетов с опытными данными показывает приемлемое совпадение результатов.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1 **Бекетаева А.О.** Применение ENO (essentially nonoscillatory) для моделирования течения многокомпонентной газовой смеси [Текст] / А.О. Бекетаева, А.Ж. Найманова // Вычислительные технологии, Новосибирск - 2007- Т.12, №S4 – С.17-25

2 **Бекетаева А.О.** Пространственное сверхзвуковое течение совершенного газа с поперечным вдувом струй. [Текст] / А.О. Бекетаева // Математический журнал –2010- т. 10, № 4(38)- С. 19-27.

3 **Бекетаева А.О.** Численное исследование пространственного сверхзвукового течения совершенного газа с поперечным вдувом струй. [Текст]/ А.О. Бекетаева, А.Ж. Найманова //Прикладная механика и техническая физика, Новосибирск– 2011 г.- Т.52, №6- С. 1-10

4 **Beketaeva A.O.** Numerical study of spatial supersonic flow of a perfect gas with transverse injection of jets / A.O. Beketaeva, Naimanova A. Zh. // JOURNAL OF APPLIED MECHANICS AND TECHNICAL PHYSICS- 2011- V: 52,I: 6 -P. 896-904 DOI : 10.1134/S0021894411060071

5 **Бекетаева А.О** Исследование вихревых структур за поперечной струей в сверхзвуковом потоке[Текст]/ А.О. Бекетаева, Т.Б.Дуйшеналиев // Доклады 2-я международная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений» 5-7 сентября 2013, Бишкек. 5

6 **Бекетаева А.О** Пространственное сверхзвуковое течение совершенного газа с поперечным вдувом струй [Текст] / А.О. Бекетаева, Т.Б.Дуйшеналиев //Известия КГТУ, ISSN 1694-55-57- 2013-№ 29-С. 124-132

7 **Бекетаева А.О** Numerical simulation of the mixing in planar shear layer. [Текст] / А. Makasheva, Ye. Belyayev, А. Beketaeva // Совместный выпуск: Вычислительные технологии, Новосибирск, Том 20 и Вестник КазНУ им. Аль-Фараби, Серия математика, механика и информатика, 2015-№ 3 (86)- С. 59-64.

8 **Beketaeva A.O** Investigation of Vortex Structures for Supersonic Jet Interaction Flowfield [Текст] / А. Beketaeva, А.Н. Abdalla, Ye. Moisseyeva. // Applied Mechanics and Materials, 2015-Vol.798-P.546-550.

9 **Beketaeva A.O** Third order ENO Scheme on Non-uniform Grid for Supersonic Flows II [Текст] / Ye. Moisseyeva, А. Naimanova, А. Beketaeva. А // Applied Mechanics and Materials, 2015-Vol.798-P.518-522.

10 **Beketaeva A.O** Non-uniform ENO Scheme for Simulation of Supersonic Flows [Текст] /Ye. Moisseyeva, А. Naimanova, А. Beketaeva.//the International Conference “Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education” (CITech–2015) Almaty, part III-V. 98,№ 3-P. 33-42.

11 **Бекетаева А.О.** Построение ENO-схемы на неравномерной сетке [Текст] / Е.С. Моисеева, А.Ж. Найманова, А.О. Бекетаева // Тезисы докладов

Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и математического моделирования», Алматы, 1-5 июня 2015 г. – С. 349-352.

12 **Бекетаева А.О.** Mathematical modeling of shock-wave structures in interaction of shocks with the boundary layers on the bottom and top walls [Текст] / А.О. Beketaeva, N.S. Shakhan // Abstracts of International science conference «Actual problems of mathematics and mathematical modeling», Almaty, 1-5 of June 2015. – P. 364.

13 **Бекетаева А.О.** Построение WENO-схемы для решения задачи сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси [Текст] / А.О. Бекетаева, А. Абдалла, Н.Ш. Шахан // Математический журнал Института математики и математического моделирования МОН РК, Алматы. – 2015. – Том 15, №2 (56). – С.5-21.

14 **Бекетаева А.О.** Влияние параметра нерасчетности на ударно-волновую структуру в сверхзвуковом канале со вдувом струи [Текст] / А.О., Бекетаева Н.Ш. Шахан // Вестник КазНУ. Серия математики, механика, информатики, Алматы "Қазақ университеті". – 2015. – №2 (85). – С.58-68.

15 **Бекетаева А.О.** Математическое моделирование ударно-волновых структур при взаимодействии скачков уплотнения с пограничными слоями нижней и верхней стенки [Текст] / А.О. Бекетаева, Н.Ш. Шахан // Совместный выпуск научных журналов «Вестник КазНУ. Серия математики, механика, информатики» (Казахстан) и «Вычислительные технологии» (Новосибирск). – 2015.

16 **Бекетаева А.О.** Моделирование взаимодействия падающей ударной волны с пограничным слоем [Текст] / А.О. Бекетаева // Математический журнал, 2015– т. 15 № 3(57) –С. 56-71.

17 **Бекетаева А.О.** Математическое моделирование сверхзвукового течения при наличии поперечного вдува струи с применением $k-\omega$ модели турбулентности [Текст] / Е.С. Моисеева, А.О. Бекетаева // В сборнике: Science and Practice: new Discoveries Proceedings of materials the international scientific conference. Czech Republic, Karlovy Vary - Russia, Moscow, 24-25 October 2015. Editors I.M. Shvec, L.A. Ismagilova, V.A.Gur'eva, E.A.Telegina, V.I.Sedenko. Киров 2015 – С. 35-42.

18 **Бекетаева А.О.** Моделирование пространственного сверхзвукового совершенного газа с поперечным вдувом струй. [Текст] / А.О. Бекетаева, Т.Б. Дуйшеналиев // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2015–№2 (30) – С.119-129.

19 **Бекетаева А.О.** Вихревые структуры за поперечной струей в сверхзвуковом потоке при больших значениях параметра нерасчетности. [Текст] / А.О. Бекетаева, П. Бруель, А.Ж. Найманова // Прикладная механика и техническая физика, Новосибирск–2015–Т.56, №5– С. 1-14.

20 **Бекетаева А.О.** Vortical structures behind a transverse jet in a supersonic flow at high jet to crossflow pressure ratios [Текст] / А.О. Beketaeva, Bruel P.,

and A. Zh. Naimanova // ISSN 0021-8944 Journal of Applied Mechanics and Technical Physics–2015–Vol. 56, No. 5-P. 777–788

21 **Бекетаева А.О.** Исследование структуры взаимодействия поперечной струи с сверхзвуковым потоком.[Текст] / А.О. Бекетаева. // Наука, новые технологии и инновации–2015 - №6 – С. 3-11.

22 **Бекетаева А.О.** Влияние толщины пограничного слоя на структуру сверхзвукового течения с ударной волной.[Текст] / А.О. Бекетаева // Наука, новые технологии и инновации–2015– №6 – С. 15-24

23 **Бекетаева А.О.** Построение ENO-схемы на неравномерной сетке для моделирования сверхзвукового течения многокомпонентной газовой смеси [Текст] / Е.С. Моисеева, А.О. Бекетаева // Математический журнал Институт математики МОН РК, КАЗАХСТАН, рекомендуемый ККСОН МОН РК – 2015. – Т.15, №4. – С. 78-93.

24 **Бекетаева А.О.** Численное моделирование взаимодействия ударной волны с пограничным слоем в плоском сверхзвуковом потоке с вдувом струи [Текст] / А.О. Бекетаева, Е.С. Моисеева, А.Ж. Найманова. // Теплофизика и аэромеханика–2016 – том 23, № 1 – С.181-191.

25 **Бекетаева А.О.** Numerical simulations of shock-wave interaction with a boundary layer in the plane supersonic flows with jet injection [Текст] / А.О. Бекетаева, Ye.S. Moissejeva, A. Zh. Naimanova. // Thermophysics and Aeromechanics, 2016. – Vol. 23, No. 2. – P. 173-183.

26 **Бекетаева А.О.** Исследование взаимодействий поперечной струи со сверхзвуковым потоком в зависимости от параметра нерасчетности [Текст] / А.О. Бекетаева // Известия Национальной академии наук Республики Казахстан, серия физико-математическая–2016– № 1.(305) – С. 46-58.

РЕЗЮМЕ

диссертации Бекетаевой Асель Орозалиевны на тему: «Моделирование и исследование сверхзвуковых течений с вдувом струй» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, многокомпонентный газ, пограничный слой, ударная волна, уравнения Навье-Стокса, разностные схемы.

Объектом исследования являются сверхзвуковое турбулентное течение с вдувом струй.

Целью настоящей работы является: разработка математической модели и численное исследование взаимодействия сверхзвукового турбулентного течения с вдувом струй на основе уравнений Навье-Стокса для вязкого газа; разработка методики решения уравнений Навье-Стокса для сверхзвукового течения турбулентного многокомпонентного газа, основанного на WENO схеме.

Основные методы исследования В работе используются WENO, ENO схемы, метод факторизации, метод матричной прогонки, модели турбулентности.

Научная новизна заключается в предложенной методике решения двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси, основанной на WENO схеме; в установлении влияния числа Маха набегающего потока и толщины пограничного слоя на структуру взаимодействия падающего скачка уплотнения с пограничным слоем; в найденных новых закономерностях влияния степени нерасчетности а также ширины струи на образование бочкообразной структуры в струе при исследовании поперечного вдува звуковой струи в сверхзвуковом турбулентном плоском канале; в установлении того, что за струей на нижней стенке канала появляется новая система скачков уплотнения, обусловленная взаимодействием отраженного скачка уплотнения от верхней стенки с пограничным слоем на нижней стенке; в определении того, что при умеренных параметрах нерасчетности (меньших десяти), течение круглой струи описывает известную вихревую структуру, но при нерасчетностях больших десяти появляются новые системы вихрей.

Область применения. Предлагаемые в диссертационной работе математические модели, методы их решения, пакеты прикладных программ и полученные закономерности течений могут позволить существенно сократить экономический и социальный риск при проектировании летательных аппаратов различной конфигурации с целью создания управляемой тяги, при усовершенствовании струйных насосов, при проектировании прямооточных воздушно реактивных двигателей.

**«Сырткы үндөрдүн ичинде үйлөө агымын изилдөө жана үлгүлөө»
деген темадагы Бекетаева Асел Орозалевнанын 01.02.05 – “
Суюктуктардын, газдардын жана плазманын механикасы” адистиги
боюнча физика-математика илимдердин доктору илимий даражасын
изденүү үчүн жазылган диссертациясынын
КОРУТУНДУСУ**

Ачкыч сөздөр: сырткы үндөрдүн агымы, көп компоненттүү газ, чектөө катмары, сокку толкуну, Навье-Стокстун теңдемеси, ар түрдүү чиймелер.

Каналдагы турбуленттик сырткы үндөрдүн ичинде үйлөө агымы изилдөөнүн объектиси болуп саналат.

Иштин максаты болуп саналат: газдар үчүн Навье-Стокстун теңдемесинин негизинде сырткы үндөрдүн ичинде үйлөө агымынын өз ара аракеттенишүүсүн сандык изилдөө жана математикалык үлгүсүн иштеп чыгуу; WENO чиймесинин негизинде сырткы үндөрдүн ичинде турбуленттүү көп компоненттүү газдар үчүн Навье-Стокстун теңдемеси менен чыгаруунун методикасын иштеп чыгуу;

Негизги илим изилдөө Диссертациялык иште WENO, ENO схемалары, фактордук, матрицалык ыкмалар турбуленттик үлгүлөр колдонулат.

Илимий жаңылык WENO схемасынын негизинде көп компоненттүү газ аралашмасы үчүн Навье-Стокстун теңдемесинин Фавру боюнча эки өлчөмдүү орточо чыгаруунун ыкмаларын камсыз кылуу болуп саналат; тыгыздалып тушкөн толкундун чек катмарын өз ара аракеттенүү структурасы боюнча чек ара катмарынын агымына жана жоондугуна Мах санынын таасирин түзүүгө; турбуленттик сырткы үндөрдүн жалпак каналында туурасынан кеткен үндүн үйлөө агымын изилдөөдө бочка сыяктуу агымда пайда болгон түзүмү ошондой эле агымдын туурасына эсепсиздик даражасынын таасиринде мыйзамдары табылган; төмөнкү дубалда чек ара катмары менен жогорку дубалдын өз ара аракеттенишүүдө чагылдырыган секириктин тыгыздалышынын шартында каналдын дубалынын түбүндө жаңы тыгыздалган секириктин пайда болгондугу аныкталган; тегерек агымдын ичиндеги белгилүү куюн түзүмдөрүн сүрөттөп, бирок чыгарылбаган ондон ашык жаңы белгилүү куюн системасы пайда болгондугу орточо параметрлердин чыгарылбагандыгы (ондон кем) аныкталды.

Колдонуу чөйрөсү. Диссертациялык иште учуучу аппараттын ар кандай конфигурацияда башкарууну түзүү максатын долбоорлоо, агым насосторун жакшыртуу, түздөн-түз аба реактивдүү кыймылдаткычтарын долборлоодо алынган закон ченемдүүлүктөрдүн кыскартылган экономикалык жана социалдык коргоолордун колдонмо программаларынын пакеттери, аларды чыгаруу ыкмалары, математикалык үлгүлөрү сунушталган.

SUMMARY

of the Beketaeva Asel Orozaliyeva dissertation on the topic “Modeling and investigation of supersonic flows with jet injection” on competition of a scientific degree of the doctor of physical and mathematical sciences on specialty 01.02.05 – mechanics of liquid, gas and plasma

Keywords: supersonic flow, multi-component gas, boundary layer, shock wave, the Navier-Stokes equations, finite difference schemes.

The object of the work: supersonic turbulent flow with jet injection.

The purpose of the work development of mathematical models and numerical study of the interaction of a supersonic flow with jet injection based on the Favre average Navier-Stokes equations; development of method of solution of Navier-Stokes equations for multi-component gas mixture based on WENO scheme.

Methods of the work used WENO, ENO scheme, factorization method, the turbulence model.

Scientific novelty is to provide a method of solution a two-dimensional Favre averaged Navier-Stokes equations for a multicomponent gas mixture based on WENO scheme; establishing the influence of the Mach number of the incident flow and the thickness of the boundary layer on the structure of the shock wave boundary layer interaction;

finding in the laws of the influence of the degree of pressure ratio and the jet width to the barrel structure in the jet injection in the problem of cross-sonic jet in supersonic turbulent plane channel; determining that behind the jet on the bottom of the channel wall there is a new system of shock waves, caused by the interaction of the reflected shock wave from the top wall with the boundary layer on the bottom wall;

determining what at moderate parameters pressure ratio (less than ten), for round jet describes a known vortex structure, but an pressure ratio more than ten, new vortex system appearing.

Application area. Offered in dissertation mathematical models, methods for their solutions, application packages and the resulting laws of flows may allow to significantly reduce the economic and social risks in the design of aircraft of different configurations in order to create a controlled traction while improving jet pumps, to construct of ramjet engine.

Подписано в печать 25.08.2016. Формат 60x84/16.
Бум.офсет. №1. 80 гр. Печать цифровая.
Объем 2,375 п.л. Тираж 120 экз.

ШМАТРИЦА

Типография ОсОО «Шматрица»
Адрес: 720021, г.Бишкек ул. Чуйкова, 23/26
Тел.: +996 555 58 31 78
e-mail: orionkg@mail.ru