УДК624.073.02 А.Т.МАРУФИЙ, Э.С. РЫСБЕКОВА, А.А. ЭГЕНБЕРДИЕВА
A.T.MARUFI, E.S.RYSBEKOVA, A.A.EGENBERDIEVA
E.mail. ksucta@elcat.kg

ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ОДНИМ УЧАСТКОМ НЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ

BENDING INFINITE BEAMS ON TWO PARAMETRIC ELASTIC FOUNDATION WITH ONE SECTION INCOMPLETE CONTACT WITH THE GROUND

Бул макалада Фурьенин интегралдык өзгөртмөлөрүнүн жалпы чечилүү усулун колдонуу менен эки параметрлүү чексиз узундуктагы устундун негизге толук эмес байланыш абалын эсепке алып, устундун ортоңку бөлүгүндөгү ийилүүсү жөнүндөгү эсептөөнүн аналитикалык чечилишин алынганы келтирген.
Ачкыч сөздөр: *устун, негиз, эсеп, ийилүү, бекемдик.*

В статье получено аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании, с учетом неполного контакта с основанием в центральной части балки, на основе метода обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье.
Ключевые слова: *балка, основание, расчет, изгиб, прочность.*

In the article, an analytical solution of the problem of the bending of infinite beam on two-parameter elastic foundation based on incomplete contact with the ground in the central part of the beam, on the basis of generalized solutions using the Fourier integral.
Keywords:*beam base calculation bending strength.*

При проектировании и строительстве зданий и сооружений предъявляются строгие требования к их прочности, надежности и долговечности, что требует совершенствования методов их расчета с учетом многочисленных факторов эксплуатационного, технологического и конструктивного характера. Конструкции на деформируемом основании составляют большой удельный вес в общем объеме строительства и любое уточнение расчета существенно отражается на их стоимости. В данной статье рассматривается задача изгиба бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием. Это в полной мере относится к ленточным фундаментам промышленных и гражданских зданий, аэродромных и дорожных покрытий и т.д., отражающимся на просадочные грунты в виде лессовых отложений, которые при замачивании дают большую просадку, т.е. может образоваться провал (неполный контакт с основанием). Расположение неполного контакта в основании и действующей на балку нагрузки может быть в различных местах балки в центре, вблизи края. Когда эти факторы расположены в центре балки, то расчетная схема её сводится к расчету бесконечной балки.

Рассмотрим бесконечную балку, лежащую на двухпараметрическом упругом основании, причем на части длины балки она не контактирует сосновованием (рис.1). Допустим, что приложенная к балке нагрузка симметрична и участок, на котором нет контакта, симметричен относительно вертикальной оси.

Дифференциальное уравнение изгибабалки в случае пренебрежения трением, возникающим между балкой и грунтом имеет вид:

$$EJ\omega^{IV}\left(x\right)=p\left(x\right)-q\left(x\right) \tag{1}$$

где*p(x)* –произвольная внешняя нагрузка,

q(x) – реактивные давления упругого основания (нагрузка на основание),
ω(x)–прогиб балки.

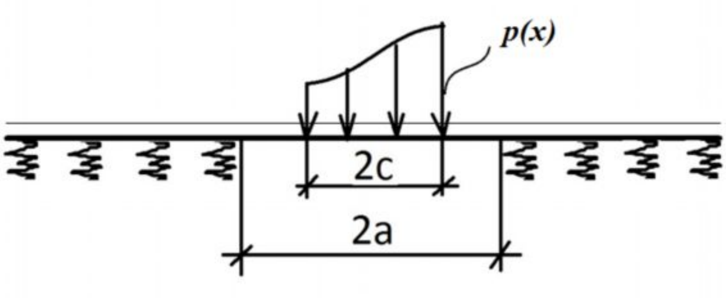

Рис.1.Бесконечная балка на двухпараметрическом упругом основании с одним участком неполного контакта с основанием

Дифференциальное уравнение (1) содержит две неизвестные функции $W(x)$ и $q(x)$. Чтобы определить эти функции к уравнению (1) следует присоединить дополнительное условие, выражающее зависимость между нагрузкой на основание и его осадкой, а также контактное условие о плотном прилегании балки к грунту.

Дифференциальное уравнение однослойного основания имеет вид:

$$-2t\omega^{II} + R\omega = q(x)\psi(0) \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{E_0}{1-\nu_0^2}\int_0^H \psi'^2(y)\,dy, \\ t &= \frac{E_0}{4(1-\nu_0)}\int_0^H \psi^2(y)\,dy \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

По условиям задачи функцию поперечного распределения перемещений$\psi(y)$ удобнее выбрать так, чтобы $\psi(0) - 1$, при этом обобщённое перемещение $W(x)$ будет представлять собой осадку поверхности упругого основания, а уравнение (2) примет вид:

$$-2t\omega'' + k\omega = q(x) \tag{4}$$

где $q(x)$ нагрузка на основание.

Так как прогиб балки совпадает с осадкой поверхности упругого основания, уравнений (1) и (4) могут быть рассмотрены совместно:

$$\left.\begin{aligned} -2t\omega'' + k\omega &= q(x) \\ EJ\omega^{IV}(x) &= p(x) - q(x) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Исключаяиз системы (5) функцию $q(x)$, получим основное дифференциальное уравнение задачи, выражающей зависимость между нагрузкой на балку и её прогибом:

$$EJ\omega^{IV} - 2t\omega'' + k\omega = p(x) \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение (6) отличается от известного уравнения, вытекающего из гипотезы коэффициента постели (Винклера) тем, что в нём имеется дополнительный член со второй производной от прогиба балки. Этим членом учитывается влияние касательных напряжений(τ), возникающих в упругом основании.

Для многих задач при решении дифференциального уравнения (6) удобнее перейти от действительной координаты x к приведенной координате$\eta = \frac{x}{L}$,где L −некоторая величина, имеющая размерность длины. Величину L можно, например, принять равной

$$L = \sqrt[3]{\frac{2EJ\left(1-\nu_0^2\right)}{E_0}} \tag{7}$$

в соответствии, с чем она может быть названа упругой характеристикой балки.

Дифференциальное уравнение (6)перепишется при этом в виде:

$$\frac{d^4\omega}{d\eta^4}-2r^2\frac{d^2\omega}{d\eta^2}+s^4\omega=\frac{pL^4}{EJ} \tag{8}$$

Здесь r^2 и s^4 –безразмерные упругие характеристики, определяемые по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \frac{tL^2}{EJ}=2\frac{1-\nu_0}{L}\int_0^H \psi_1^2 dy \\ s^4 &= \frac{RL^4}{EJ}=2L\int_0^H \psi_2'^2 dy \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Надо отметить, что дифференциальное уравнение (8) характеризует собой обобщённые условия равновесия слоя грунта, рассмотренного совместно с балкой, расположенной на его поверхности. Вследствие этого функция $W(\eta)$ по принятой ранее терминологии представляет собой обобщённое вертикальное перемещение.

Дифференциальное уравнение (8) с учетом неполного контакта балки с основанием (рис.1) примет вид:

$$\frac{d^4\omega}{d\eta^4}-2r^2\frac{d^2\omega}{d\eta^2}+s^4\omega\theta(\eta-a)=\frac{pL^4}{EJ} \tag{10}$$

где $W(\eta)$ –функция прогиба балки,

$p(\eta)$ – функция, приложенной к ней нагрузки,

$2a$ –размер участка, на котором нет контакта балки и основания.

r^2 **и** s^4 –обобщенные упругие характеристики балки и основания, определяемые по формулам (9)

$\theta(\eta \quad a)$ функция Хевисайда, учитывающие неполный контакт основания с балкой

$$\theta(\eta-a)=\begin{matrix} 0 & (x\le a) \\ 1 & (x\ge a) \end{matrix} \tag{11}$$

Для решения уравнения (10), в связи с симметрией нагрузки и участка неполного контакта балки и основания длиной $2a$, используем *cos*- преобразование Фурье.

Обозначим через

$$\left.\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \int_0^\infty \omega(x)\cos\lambda x dx \\ p(\lambda) &= \int_0^\infty p(x)\cos\lambda x dx \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

После применения *cos*-преобразования к уравнению (10) с учетом (12) и (11), оно примет вид:

$$\lambda^4\omega(\lambda)-2r^2\lambda^2\omega(\lambda)+\frac{2s^4}{\pi}\int_0^\infty \omega(x)\cos\lambda x\theta(x-a)dx=p(\lambda) \tag{13}$$

Применяя к (13) обратное *cos*- преобразование Фурье, найдем функцию прогиба балки при действии на неё симметричной нагрузки.

$$\omega(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p(\lambda)\cos\lambda x}{\lambda^4+4}d\lambda+\frac{2s^4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^4-2r^2\lambda^2+s^4}\cdot\int_0^a \omega(t)\cos\lambda t dt d\lambda \tag{14}$$

Очевидно, что первое слагаемое в этом выражении, представляет собой прогиб в бесконечной балке, которая на всем протяжении соприкасается с основанием и нагружена заданной нагрузкой. Второе слагаемое выражает собой добавку к прогибу в бесконечной балке. Однако, это слагаемое содержит внутри себя искомую функцию прогиба и, следовательно, выражение (14) представляет собой интегральное уравнение относительно искомой функции прогибов балки.

Обозначим первое слагаемое в выражении (14) через $\omega_\infty(x)$, т.е.

$$\omega_\infty(x) = \int_0^\infty \frac{p(\lambda)\cos\lambda x}{\lambda^4+1}d\lambda \qquad (15)$$

Эта известная функция, которая в ряде случаев приложения нагрузки может быть записана в явном виде. Например, если нагрузкой на балку является сосредоточенная сила, приложенная в центре балки, то $p(\lambda) = \dfrac{1}{2}\beta Q$ и действительное значение функции прогибов будет иметь вид:

$$\omega_\infty(x) = \frac{Q}{8EJ\beta^3}e^{-x}(\cos x + \sin x) \qquad (16)$$

Другой распространённый на практике тип для нагрузки - равномерная нагрузка интенсивностью *q*, распределенная на участке балки длиной *2c*. В этом случае действительное значение функции прогибов имеет вид:

$$\omega_\infty(x) = \frac{q}{8EJ\beta^4}\left[1 - e^{-c}(\cos c\cdot\cos xchc + \sin c\cdot\sin xchc)\right] \text{при } x \le c \qquad (17)$$

$$\omega_\infty(x) = \frac{q}{8EJ\beta^4}e^{-x}(\cos c\cdot\cos xchc + \sin c\cdot\sin xchc) \text{ при } c \le x \qquad (18)$$

Обозначим далее ядро интегрального уравнения (14) через $K(x,t)$

$$K(x,t) = \frac{2S^4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x\cos\lambda t}{(\lambda^4 - 2\,\mathrm{r}^2\,\lambda^2 + \mathrm{s}^4)}d\lambda$$

Вычисляя этот интеграл, найдем

$$K(x,t) = \begin{matrix} \varphi_1 < \left(x\right)\psi_1 < (\mathrm{t}) + \varphi_2 < \left(x\right)\psi_2 < (\mathrm{t}) \quad (x \le t) \\ \varphi_1 > \left(x\right)\psi_1 > (\mathrm{t}) + \varphi_2 > \left(x\right)\psi_2 > (\mathrm{t}) \quad (x \ge t) \end{matrix} \qquad (19)$$

При этом

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1 < \left(x\right) \quad \cos x\cdot chx; = \quad \varphi_2 < \left(x\right) \quad \sin x\cdot shx \;= \\ \varphi_1 > \left(x\right) = e^{-x}\cos x; \qquad \varphi_2 > \left(x\right) = e^{-x}\sin x \\ \psi_1 < (t) = e^{-t}(\cos t + \sin t);\; \psi_2 < (t) = e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ \psi_1 > (t) \;= \cos t\cdot cht - \sin t\cdot sht;\; \psi_2 > (t) \;= \cos t\cdot cht - \sin t\cdot sht \end{matrix}\right\} \qquad (20)$$

Таким образом, интегральное уравнение, из которого может быть определена функция прогибов балки, принимает следующий вид:

$$\omega(x) - \int_0^a \omega(t)K(x,t)dt = \omega_\infty x \qquad (21)$$

Как мы знаем выражения углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил получаются как производные выражения прогибов (21), т.е. $\varphi_x = \omega'\left(x\right), M\left(x\right) = \omega''\left(x\right)$ *и* $Q_x = \omega'''\left(x\right)$

Вывод:Таким образом, полученоаналитическое решение задачи об изгибе бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в центральной части балки.

Список литературы

1. Власов В.З.Балки, плиты и оболочки на упругом основании[Текст] / В.З.Власов, Н.Н. Леонтьев.-М.:Физматгиз,1960.–419с.

2. Травуш В.И. Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании[Текст]/ В.И.Травуш //Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. -№1.-С.24-28.

3. Маруфий А.Т.Расчет прямоугольной плиты на упругом основании [Текст] А.Т.Маруфий Н.Н.Леонтьев // «Расчет пространственных конструкций» Сборник трудов МИСИ. -М.:1983. - С.122-126.

4. Маруфий А.Т. Расчет средней части ленточного фундамента[Текст]/ А.Т.Маруфий. - Фрунзе: АН Киргизской ССР ЮКУНЦ «Илим», 1990.-С.35-38.

5. Маруфий А.Т., Мансуров К.Т. Математическое моделирование задач изгиба различных схем плит на деформируемом основании с особенностью в основании[Текст]/ А.Т.Маруфий, К.Т.Мансуров. – Бишкек: «Илим» НАН КР, 2014. -148с.