

**ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ
РАСТЯГИВАЮЩИХ УСИЛИЙ В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ ПО ОСЯМ X И Y
ИНЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ**

**NUMERICAL REALIZATION OF THE PROBLEM OF BENDING INFINITE PLATE
ON ELASTIC FOUNDATION WITH THE INFLUENCE OF LONGITUDINAL
TENSILE EFFORTS ON TWO DIRECTIONS ALONG X AND Y AXES AND
INCOMPLETE CONTACT WITH THE GROUND**

Макалада X жана Y эки багытында узунан кеткен чоючу күчтөр эске алынган туп-негизи менен толук эмес контакт болгон чексиз плитанын ийилүүчү маселесинин санариптик ишке ашыруунун жыйынтыктары келтирилген. Жыйынтыктардын талдоосу келтирилген.

Ачкыч сөздөр: күчтөр, негиз, чексиз плита, ийилүү, тегиздик.

В статье приведены результаты численной реализации задачи об изгибе бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y и неполного контакта с основанием. Приведен анализ результатов.

Ключевые слова: усилия, основание, бесконечная плита, прогиб, плоскость.

The results of the numerical realization of the problem of bending of infinite plate on elastic foundation with the influence of the longitudinal tensile forces in two directions x and y, and incomplete contact with the ground. An analysis of the results.

Keywords: force, base, infinite slab, deflection plane.

В работе [1] разработан алгоритм расчета бесконечной плиты, лежащей на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий, приложенных в срединной плоскости плиты и неполного контакта плиты с основанием.

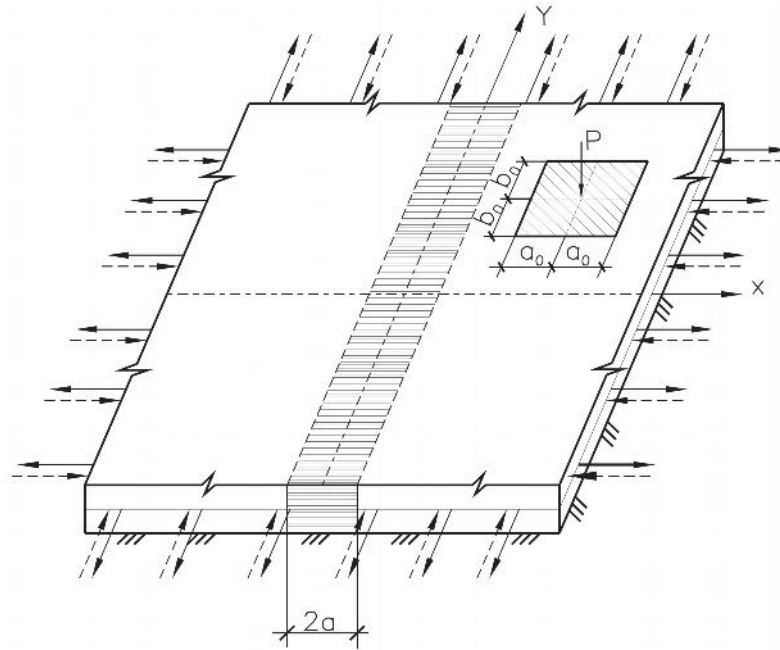


Рис. 1. Бесконечная плита, лежащая на винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием

В этом случае прогибы плиты $\omega(x, y)$ определяются из решения дифференциального уравнения вида [2, 3, 4]:

$$D\nabla\nabla\omega(x, y) + \kappa\theta(x-a)\omega(x, y) - N_x \frac{d^2\omega(x, y)}{dx^2} - N_y \frac{d^2\omega(x, y)}{dy^2} - 2N_{xy} \frac{d^2\omega(x, y)}{dxdy} = q_0(x, y) \quad (1)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость плиты;

K – коэффициент постели основания;

$\theta(a)$ – функция Хевисайда, введение которой позволяет учесть отсутствие основания под частью плиты;

$2a$ – ширина траншеи (неполного контакта с основанием) в основании;

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа;}$$

N_x, N_y – интенсивность растягивающих (сжимающих) усилий вдоль осей x и y , считаются положительными в случае растяжения;

N_{xy} – интенсивность касательных усилий в срединной плоскости;

В дальнейшем в связи с малой интенсивностью касательных усилий, приложенных в срединной плоскости, не снижая общности задачи, положим $N_{xy} = 0$.

Перейдя к безразмерным координатам $x_1 = xl^{-1}$; $y_1 = yl^{-1}$; $a_1 = al^{-1}$; $q_1(x, y) = q(x, y)k^{-1}$; $l = \frac{D^{1/4}}{k^{1/4}}$, получим, опуская индекс 1, следующее уравнение относительно прогиба плиты:

$$\left[\nabla\nabla + \theta(x-a) - 2\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \omega(x, y) = q_0(x, y) \quad (2)$$

Где

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \nabla = \xi^2 + \eta^2;$$

$$2\alpha_1 = \frac{N_x l^2}{D}; 2\alpha_2 = \frac{N_y l^2}{D};$$

$\omega(x, y)$ – функция прогиба;

$q(x, y)$ – заданная нагрузка

Применив к выражению (2) обратное двумерное cos-преобразование Фурье, получим [5, 6]:

$$\omega(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \times \frac{2}{\pi} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t \cdot \cos \eta y \cdot dt \cdot d\xi \cdot d\eta = \omega_\infty(x, y) \quad (3)$$

Продифференцировав, выражение прогибов (3), получим выражения изгибающих моментов и приведенных поперечных сил:

$$\left\{ \begin{aligned} M_x(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi^2 + \nu \eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + M_{\alpha x}(x, y); \\ M_y(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\nu \xi^2 + \eta^2) \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + M_{\alpha y}(x, y); \\ Q_x(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\xi^3 + (2-\nu)\xi\eta^2] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + Q_{\alpha x}(x, y); \\ Q_y(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{[\eta^3 + (2-\nu)\xi^2\eta] \cos \xi x \cdot \cos \eta y}{[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha_1 \xi^2 - 2\alpha_2 \eta^2 + 1]} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \omega(t, \eta) \cos \xi t dt \cdot d\xi \cdot d\eta + Q_{\alpha y}(x, y); \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Результаты расчета приведены на рис.2. и табл.2.

Таблица 1 -Результаты расчета изгиба бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием

Значения прогибов $\omega(x, y)$ в бесконечной плите								
ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	0.1249	0.1236	0.1206	0.1166	0.1119	0.1068
a01	0.0	0.1	0.1329	0.1314	0.1283	0.1241	0.1192	0.1138

a02	0.0	0.2	0.1400	0.1385	0.1353	0.1309	0.1258	0.1202
a03	0.0	0.3	0.1477	0.1462	0.1429	0.1384	0.1331	0.1272
a04	0.0	0.4	0.1562	0.1546	0.1512	0.1466	0.1411	0.1350
a05	0.0	0.5	0.1653	0.1637	0.1602	0.1555	0.1498	0.1434
a06	0.0	0.6	0.1751	0.1735	0.1699	0.1650	0.1591	0.1525
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	0.1068	0.1014	0.0958	0.0901	0.0844	0.0787
a01	0.0	0.1	0.1138	0.1081	0.1022	0.0961	0.0901	0.0841
a02	0.0	0.2	0.1202	0.1142	0.1080	0.1016	0.0953	0.0889
a03	0.0	0.3	0.1272	0.1209	0.1144	0.1078	0.1011	0.0944
a04	0.0	0.4	0.1350	0.1284	0.1215	0.1145	0.1075	0.1005
a05	0.0	0.5	0.1434	0.1366	0.1294	0.1220	0.1146	0.1072
a06	0.0	0.6	0.1525	0.1454	0.1379	0.1302	0.1224	0.1146

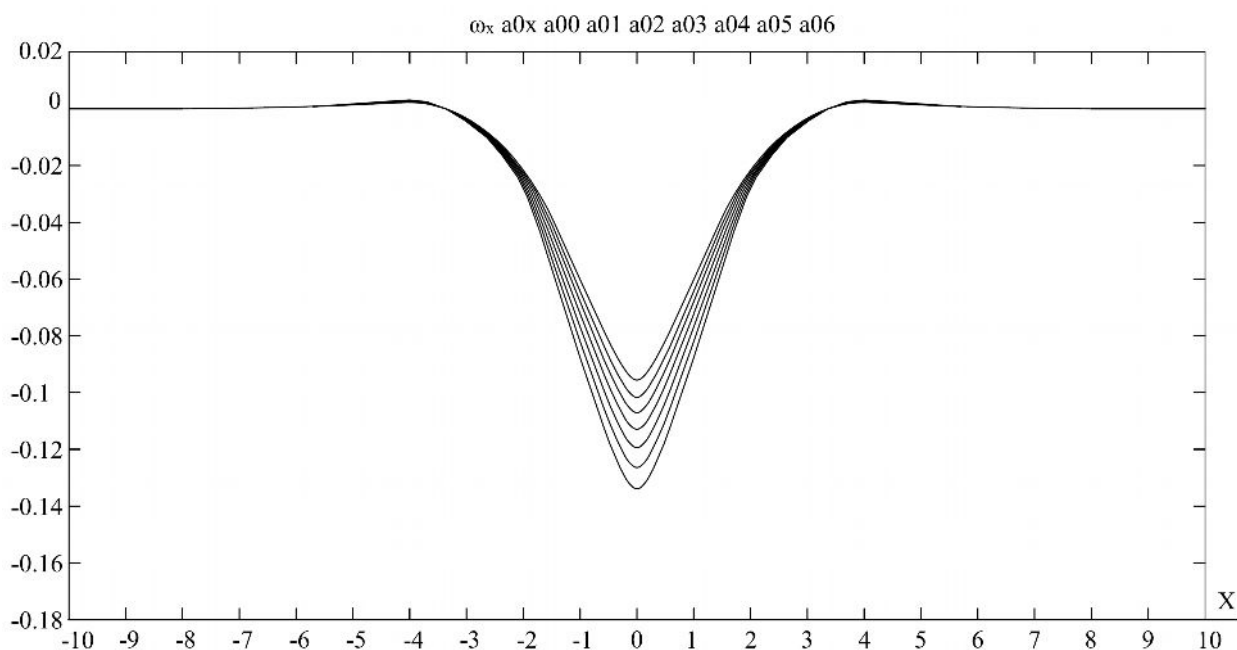


Рис. 2. Эпюры прогибов $\omega(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншеи, т.е. x_2 , меняющемся $x_2 = 0 \div 0.6$.

Таблица 2 - Результаты расчета изгиба бесконечной плиты на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y и неполного контакта с основанием

Значения прогибов $\omega(x,y)$ в бесконечной плите								
ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	0.0956	0.0946	0.0923	0.0892	0.0856	0.0817

a01	0.0	0.1	0.1017	0.1006	0.0982	0.0949	0.0912	0.0871
a02	0.0	0.2	0.1071	0.1060	0.1036	0.1001	0.0962	0.0920
a03	0.0	0.3	0.1129	0.1119	0.1094	0.1058	0.1018	0.0974
a04	0.0	0.4	0.1194	0.1183	0.1158	0.1121	0.1079	0.1034
a05	0.0	0.5	0.1264	0.1253	0.1227	0.1189	0.1146	0.1098
a06	0.0	0.6	0.1339	0.1328	0.1301	0.1262	0.1217	0.1168
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	0.0817	0.0776	0.0733	0.0689	0.0646	0.0602
a01	0.0	0.1	0.0871	0.0827	0.0782	0.0735	0.0690	0.0643
a02	0.0	0.2	0.0920	0.0874	0.0826	0.0777	0.0730	0.0680
a03	0.0	0.3	0.0974	0.0925	0.0875	0.0824	0.0774	0.0722
a04	0.0	0.4	0.1034	0.0982	0.0929	0.0875	0.0823	0.0769
a05	0.0	0.5	0.1098	0.1045	0.0989	0.0932	0.0877	0.0820
a06	0.0	0.6	0.1168	0.1112	0.1054	0.0995	0.0937	0.0877

Рис. 3. Эпюры изгибающих моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншеи, т.е. x_2 , меняющемся $x_2 = 0 \div 0.6$.

Таблица 3-Значения изгибающих моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y , расположенных в срединной плоскости и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншей т.е. $x_2 = 0 \div 0.6$, при действии единичной сосредоточенной силы в начале координат

Значения моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите
--

ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	∞	-0.1319	-0.0902	-0.0674	-0.0471	-0.0337
a01	0.0	0.1	∞	-0.1375	-0.0947	-0.0686	-0.0501	-0.0360
a02	0.0	0.2	∞	-0.1423	-0.0990	-0.0721	-0.0529	-0.0382
a03	0.0	0.3	∞	-0.1468	-0.1034	-0.1761	-0.1562	-0.1408
a04	0.0	0.4	∞	-0.1511	-0.1080	-0.0806	-0.0601	-0.0440
a05	0.0	0.5	∞	-0.1552	-0.1122	-0.0849	-0.0644	-0.0477
a06	0.0	0.6	∞	-0.1943	-0.1161	-0.0889	-0.0686	-0.0520
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	-0.0337	-0.0232	-0.0148	-0.0081	-0.0026	0.0028
a01	0.0	0.1	-0.0360	-0.0250	-0.0161	-0.0089	-0.0031	0.0027
a02	0.0	0.2	-0.0382	-0.0266	-0.0173	-0.0097	-0.0035	0.0025
a03	0.0	0.3	-0.1408	-0.1287	-0.1188	-0.0108	-0.0042	0.0023
a04	0.0	0.4	-0.0440	-0.0311	-0.0207	-0.0122	-0.0050	0.0019
a05	0.0	0.5	-0.0477	-0.0341	-0.0230	-0.0138	-0.0063	0.0012
a06	0.0	0.6	-0.0520	-0.0378	-0.0261	-0.0161	0.0079	0.0003

Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншеи т.е. x_2 , меняющемся $x_2 = 0 : 0.6$.

Таблица 4-Значения изгибающих моментов $M_y(x,y)$ в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y , расположенных в срединной плоскости и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты при $x_1 = 0$ и увеличением ширины траншей т.е. $x_2 = 0 : 0.6$, при действии единичной сосредоточенной силы в начале координат

Значения моментов $M_y(x,y)$ в бесконечной плите
--

ω_z	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
a00	0.0	0.0	∞	-0.1776	-0.1387	-0.1138	-0.0956	-0.0815
a01	0.0	0.1	∞	-0.1804	-0.1162	-0.1162	-0.0978	-0.0836
a02	0.0	0.2	∞	-0.1829	-0.1184	-0.1184	-0.0998	-0.0853
a03	0.0	0.3	∞	-0.1855	-0.1208	-0.1208	-0.1019	-0.0873
a04	0.0	0.4	∞	-0.1879	-0.1232	-0.1232	-0.1042	-0.0894
a05	0.0	0.5	∞	-0.1904	-0.1256	-0.1256	-0.1066	-0.0917
a06	0.0	0.6	∞	-0.1927	-0.1279	-0.1279	-0.1090	-0.0940
ω_z	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
a00	0.0	0.0	-0.0815	-0.0701	-0.0607	-0.0527	-0.0459	-0.0388
a01	0.0	0.1	-0.0836	-0.0719	-0.0624	-0.0542	-0.0473	-0.0399
a02	0.0	0.2	-0.0853	-0.0736	-0.0638	-0.0555	-0.0485	-0.0410
a03	0.0	0.3	-0.0873	-0.0754	-0.0654	-0.0570	-0.0498	-0.0422
a04	0.0	0.4	-0.0894	-0.0773	-0.0672	-0.0586	-0.0512	-0.0434
a05	0.0	0.5	-0.0917	-0.0793	-0.0691	-0.0603	-0.0527	-0.0447
a06	0.0	0.6	-0.0940	-0.0816	-0.0711	-0.0621	-0.0544	-0.0461

Выводы

Анализ результатов расчета показывает, что в бесконечной плите на упругом основании с учетом влияния продольных растягивающих усилий в двух направлениях по осям x и y и неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной в центральной зоне плиты (рис. 1), с увеличением ширины траншеи $2a$, прогибы увеличиваются, если при полном контакте с основанием наибольший безразмерный прогиб в центре плиты под единичной силой равен 0.0956, то при $2a=1.2$ он достигает безразмерной величины 0.1339 (рис. 2), т.е. в 1.4 раза больше. Учет растягивающих продольных усилий в двух направлениях по осям x и y позволяет уменьшить величину прогибов в 1.3 раза (при учете только неполного контакта без учета растягивающих продольных усилий прогиб равен 0.1751, а при учете их 0.1339). Надо отметить, что изгибающие моменты $M_x(x,y)$ и $M_y(x,y)$ также уменьшаются при учете продольных растягивающих усилий приложенных в срединной плоскости плиты.

Список литературы

1. Маруфий А. Т., Рысбекова Э. С. Изгиб бесконечной плиты, на Винклеровском упругом основании с учетом влияния продольных усилий и неполного контакта с основанием [Текст] // Кыргызпатент, свидетельство № 2694. – Бишкек: 2015.
2. Маруфий А. Т. Изгиб бесконечной плиты на упругом основании с неполным контактом с основанием [Текст] / А.Т.Маруфий, В.И.Травуш // Научный вестник ФерГУ. – 1995. - №1-2. – с.71-77.
3. Маруфий А. Т. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании Винклера, с учетом влияния продольных усилий. [Текст] / А.Т.Маруфий, А.Т.Турганбаев // Научный вестник ФерГУ. - 1996. - №1. – с.70-73.
4. Маруфий А. Т. Расчёт плит на упругом при отсутствии основания под частью плиты [Текст]/ А.Т.Маруфий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – М.: 1999. - №4. – с.27-31.
5. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И.И. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962.– 1108с.
6. Травуш В. И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании [Текст] / В.И.Травуш // Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры: сб. Трудов. - М.: 1976. - №4 – с.83-89.

