

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧЕК ПОКРЫТИЙ****ESTIMATION OF INFLUENCE GEOMETRIC NONLINEARITY ON THE  
STRESS-STRAIN STATE OF THE SHELLS COVERING**

*Макалада куполдун каптамасыны нжана жантайыңкы кабыгынын сандык эсептеринин мисалында геометриялык түз эместиктин анын чыңалган деформациялык абалына таасири көрсөтүлгөн.*

**Ачык сөздөр:** каптаманын кабыгы, жантайыңкы, купол, геометриялык түз эместик, чыңалуу, деформация (калыбынан бузулуу), ийилүү.

*На примерах численных расчетов пологой оболочки и купольного покрытия показаны влияния геометрической нелинейности на их напряженно-деформированное состояние. Дана количественная оценка для внутренних усилий и прогибов.*

**Ключевые слова:** оболочка покрытия, пологая, купол, геометрическая нелинейность, напряжения, деформации, прогибы.

*The numerical calculation of a shallow shell and dome cover shows the effect of geometric nonlinearity on the stress-strain state. A quantitative estimate of the internal forces and deflections.*

**Keywords:** shell of coverage, declivous, dome, geometrical non-linearity, tensions, deformations, bending

Результаты исследований напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций показали важность учета различных видов нелинейностей. Для тонкостенных пространственных систем учет геометрической нелинейности приводит к существенным изменениям их напряженно-деформированного состояния [1-7], что приводит к уменьшению несущей способности конструкции и большим деформациям.

Геометрическая нелинейность для пологой оболочки выражается нелинейными членами в выражениях для деформаций, компоненты деформации срединной поверхности для гибкой оболочки имеют следующий вид [3]:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $u, v, w$  - перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлении осей  $X, Y, Z$ ,  $k_1, k_2$ - главные кривизны.

По аналогии геометрическая нелинейность для мембранной оболочки учитывается в следующих выражениях для деформаций срединной поверхности [3-4]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2, \gamma = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \quad (2)$$

где  $r$ - радиус в кольцевом направлении,  $\theta$ - угол в тангенциальном направлении,  $u=u(r,\theta), v=v(r,\theta), w=w(r,\theta)$  компоненты перемещений в меридиональном, кольцевом и нормальном к срединной поверхности направлениях.

С учетом нелинейности основные уравнения теории пологих оболочек имеют следующий вид:

$$\Delta_k^2 \varphi + D \Delta^2 \Delta^2 w = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + P_3 + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \Delta^2 \varphi - \Delta^2_k w = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3)$$

где  $\Delta_k^2 = \frac{\partial}{\partial x} (k_2 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_1 \frac{\partial}{\partial y})$ ,  $m_x, m_y$  – внешние моменты.  $\varphi(x,y)$ - функция напряжения,  $w(x,y)$  – прогибы точек в срединной поверхности. По аналогии записываются уравнения равновесия для мембранной оболочки. Для решения используется вариационный метод с использованием метода конечных элементов с поэтапным нагружением.

Вариационное уравнение Лагранжа записывается в виде:

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A, \quad (4)$$

где  $\mathcal{E}$ -полная энергия системы

Потенциальная энергия упругой деформации тела можно представить в виде интеграла по его объему  $V$ :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz$$

Работа внешних сил  $A$  записывается в виде:

$$A = \frac{1}{2} \iint_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds + \frac{1}{2} \iiint_V (X u + Y v + Z w) dx dy dz$$

где  $X_v, Y_v, Z_v$  – компоненты поверхностной нагрузки;  $X, Y, Z$  – компоненты объемных сил;  $u, v, w$  – компоненты перемещений.

После подстановки геометрических уравнений (1,2) и выражений для напряжений в (4) функционал энергии  $\mathcal{E}$  представляет собой нелинейную функцию. С помощью метода конечных элементов задачу можно свести к решению системы нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Используя линеаризацию с помощью дополнительных матриц жесткости, задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

В дальнейшем исследуется влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформированное состояние ребристых пологой и купольной железобетонной оболочек покрытий. В ребрах жесткости оболочек учитываются деформации растяжение (сжатие), изгиб в своей плоскости и кручение. Разрешающие уравнения с учетом геометрической нелинейности [4-6] решены с помощью метода конечных элементов с использованием программы Лира 9-6. В процессе решения нелинейная задача последовательно сводилась к линейной, при этом матрица жесткости системы на каждом шаге нагружения с учетом нелинейности изменялась путем добавления дополнительной матрицы геометрической жесткости [7].

Сделаны численные расчеты для гладкой и ребристой оболочек с учетом и без учета геометрической нелинейности.

Пример №1. Рассмотрена пологая оболочка покрытия (18x18 м. в плане), имеющая следующие характеристики:  $\gamma = 2500 \text{ кг/м}^3$  – удельный вес материала оболочки;  $E = 26 \times 10^8$

кг/м<sup>2</sup>- модуль упругости материала оболочки; a=b=18 м. – размеры в плане;  $\mu = 0,2$  – коэффициент Пуассона;  $R_1 = R_2 = 32,069$  м. – радиус кривизны; h=0,2 м. – толщина.

При реализации МКЭ использовались треугольные элементы, количество которых для удовлетворения хорошей сходимости было взято 2080. Для простоты на рис.1. показана нумерация характерных точек в срединной поверхности оболочки. В силу симметрии рассматривается четверть оболочки. Для случая шарнирного опирания в оболочке по контуру отсутствуют прогибы, изгибающие моменты, поэтому представлены результаты только для внутренних точек

В таблице 1 представлены значения изгибающего момента  $M_1 \cdot 10^{-1}$  кгм. и крутящего момента  $M \cdot 10^{-3}$  для гладкой оболочки с учетом и без учета геометрической нелинейности.

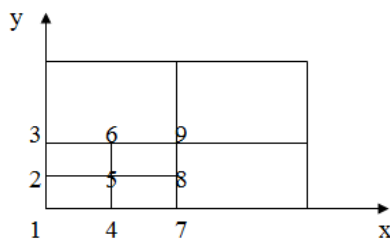


Рис. 1. Нумерация точек

Таблица 1 – Значения изгибающего момента  $M_1 \cdot 10^{-1}$  кгм. и крутящего момента  $M \cdot 10^{-3}$  для гладкой оболочки

№ точки	Без учета геометр. Нелин. $M_1 \cdot 10^{-1}$	С учетом геометр. Нелин. $M_1 \cdot 10^{-1}$	Без учета геометр. Нелин. $M \cdot 10^{-3}$	С учетом геометр. Нелин. $M \cdot 10^{-3}$
5	2,50	4,62	-7,62	-12,2
6	2,12	3,82	-13,20	-20,2
8	2,53	4,55	-20,5	-32,8
9	2,22	3,92	-13,20	-20,2

В таблице 2 представлены значения продольной силы  $N_1$  кг и сдвигающей силы S кг для гладкой оболочки с учетом и без учета геометрической нелинейности.

Таблица 2 – Значения продольной силы  $N_1$  кг и сдвигающей силы S кг для гладкой оболочки

№ точки	Без учета геометр. Нелинейн. $N_1$ кг	С учетом геометр. Нелинейн. $N_1$ кг	Без учета геометр. Нелинейн. S кг	С учетом геометр. Нелинейн. S кг
5	-1,51	-2,71	1,22	1,71
6	-1,41	-2,54	-13,20	-18,43
8	-1,92	-3,45	-20,5	-28,71
9	-1,82	-3,22	-13,20	-18,43

В таблице 3 представлены значения прогибов с учетом и без учета геометрической нелинейности для гладкой оболочки.

Таблица 3- Значения прогибов w(мм) для гладкой оболочки с учетом и без учета геометрической нелинейности

Номера точек	5	6	9	8

W мм. Без учета геометр. Нелинейности	0,12	-2,35	-4,02	-4,12
W мм. С учетом геометр. Нелинейности	0,22	-4,30	-7,36	-7,54

Из таблицы 3 видно, что с учетом геометрической нелинейности прогибы возросли почти в 2 раза. В гладкой оболочке без учета геометрической нелинейности наиболее существенными являются усилия в срединной плоскости, т.е. мембранные усилия.

В таблице 4 показаны значения  $\max$  перемещений в ребристой оболочке без учета геометрической нелинейности.

Таблица 4- Значения  $\max$  перемещений  $w$ (мм) в ребристой оболочке без учета геометрической нелинейности

№ элемента	X	Y	Z	$U_x$	$U_y$	$U_z$
В угловой области	-0,267	-0,726 На короткой грани и полоса в поперечном направл.	-8,66 в серед. Обол.	-1,29 вдоль короткого края	-0, 573	-0, 114
В середине	0,00267	-0,0072	-коротк. грань обол- 2,21	0, 161	0,0057	0,00114

В таблице 5 показаны значения  $\max$  перемещений  $w$ (мм) в ребристой оболочке с учетом геометрической нелинейности.

Таблица 5-Значения  $\max$  перемещений в ребристой оболочке  $w$ (мм) с учетом геометрической нелинейности

№ элемента	X	Y	Z	$U_x$	$U_y$	$U_z$
В угловой области	-0,259 Вдоль длин. грани	-0,841	-9,5 В приконтурн. зоне	-1,45 вдоль короткого края	-0, 645	-0,603 Приконтурн. зоне по короткой стороне
В середине	0,0026	- 0,0084	-3,6 в середине	-0, 0181	0,006	0, 006

Пример №2. Рассматривается купольное ребристое железобетонное покрытие с радиусом опорного кольца 18м и стрелой подъема 9м, опирающееся на железобетонное опорное кольцо. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) такой системы от статических нагрузок для предложенных конструктивных решений составлена пространственная расчетная схема и проведен расчет на ПК «Лири-9.6». На рисунке 2 приведен план и разрез покрытия.

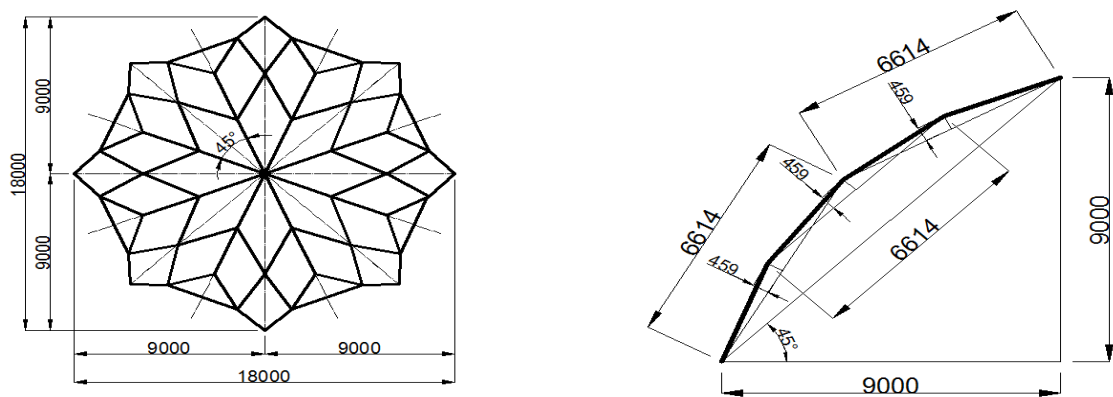


Рис. 2. Геометрические параметры покрытия здания (поперечный разрез и план покрытия)

Оболочка состоит из ромбических элементов, составленных из железобетонных плит толщиной 30мм, из бетона В20, закрепленных соответственно в контурных ребрах в виде железобетонных элементов прямоугольного сечения 100х200мм. В таблице 6 представлены максимальные и минимальные значения нормальных и касательных напряжений в меридиональном и кольцевом направлениях с учетом и без учета геометрической нелинейности.

Таблица 6-Напряжения (усилия) максимальные и минимальные значения

Размеры	Железобетонная оболочка Без учета геометрической нелинейности				Железобетонная оболочка С учетом геометрической нелинейности			
	$N_{r,max}$ Т/М <sup>2</sup>	$N_{\theta,min}$ Т/М <sup>2</sup>	$T_{r\theta,max}$ Т/М <sup>2</sup>	$T_{\theta r,min}$ Т/М <sup>2</sup>	$N_{r,max}$ Т/М <sup>2</sup>	$N_{\theta,min}$ Т/М <sup>2</sup>	$T_{r\theta,max}$ Т/М <sup>2</sup>	$T_{\theta r,min}$ Т/М <sup>2</sup>
(H=9м, D=18м)	87,5	-249	94,2	-94,2	104	-299	117	-117

Из таблицы 6 видно, что учет геометрической нелинейности в купольных конструкциях увеличивает нормальные и касательные напряжения от 10-15%. Наибольшими являются сжимающие усилия.

Обобщая полученные результаты можно сделать следующие выводы:

1. Учет геометрической нелинейности необходим как для гладкой, так и для ребристой оболочки, т.к. существенно меняется картина напряженно-деформированного состояния;

2. С учетом геометрической нелинейности в пологой оболочке действие мембранных усилий значительно ослабевает, увеличивается влияние изгибных усилий;

3. Наличие ребер жесткости существенно уменьшают усилия в пологой оболочке. Учет геометрической нелинейности увеличивают в ребрах продольного направления изгибные усилия на 7,5%; в ребрах поперечного направления от 16 до 60%; в среднем ребре поперечного направления продольные сжимающие усилия достигают наибольших значений (-19,47т) при малых значениях изгибных усилий.

4. Геометрическая нелинейность существенно влияет на перемещения пологой оболочки: в ребристой оболочке с учетом геометрической нелинейности линейные перемещения в направлении оси У увеличились на 16,6%, в направлении оси Z на 63%.

5. В гладкой оболочке учет геометрической нелинейности приводит к увеличению как мембранных, так и изгибных перемещений, причем этот эффект значителен в приконтурной зоне и в середине оболочки. В приконтурной зоне перемещения вдоль оси

X увеличились с учетом геометрической нелинейности в 1,6 раза, а перемещения вдоль оси Y – в 1,27 раз. Наиболее значительны линейные перемещения вдоль оси Z (прогибы), например в приконтурной зоне они с учетом геометрической нелинейности увеличились на 21% и достигли величины 9,07 мм, а в середине оболочки они увеличились в 1,2 раза и достигли величины 3,42 мм.

6. В купольной оболочке учет геометрической нелинейности увеличил внутренние усилия на 10-15%, для надежности конструкции необходимо усилить жесткость опорного кольца.

### Список литературы

1. Леонтьев Н.Н. Строительная механика [Текст] / Н.Н.Леонтьев и др. - М.: АСВ,2006.
2. Шапошников Н.Н.Строительная механика[Текст] / Н.Н. Шапошников, В.Д. Потапов, С.Б. Косицин. –М.: АСВ, 2006.
- 3.Горшков А.Г.Теория упругости и пластичности[Текст] / А.Г. Горшков,Э.И. Старовойтов,Д.В. Тарлаковский. -М.: Физматлит, 2002.- 416с.
4. Достанова С.Х.Учет и оценка нелинейности при расчете полой железобетонной оболочки покрытия[Текст]С.Х.Достанова, О. Тулегенова // Сб. материалов Международ. науч.-практ. Конф. «Строительство, архитектура, дизайн: интеграционные процессы в современных условиях». -Алматы: изд. Дом «Строительство и архитектура», Т.1.-2012.- 78-82с.
5. Расчет тонкостенных элементов конструкций[Текст]: Учебное пособие для магистрантов.- Алматы: КазГАСА, ТОО «HitPrint». 2013.- 167с.
6. Достанова С.Х.Учет дискретных элементов при расчете полой железобетонной оболочки[Текст] С.Х. Достанова,Г.Т. Касымова // Сб. материалов X МНПМК «Состояние современной строительной науки 2012». – Полтава: 2012.- 84-88 с.
7. Григоренко Я.М.Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ[Текст] /Я.М. Григоренко,А.П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1983.–286с.