

**ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПО АДДИТИВНОЙ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ  
МОДЕЛИ ВРЕМЕННОГО РЯДА****Убакыт тизмектеринин аддитивдик жана мультипликативдик модели боюнча  
божомолдоо****Forecasting on the additive and multiplicative models time series**

**Аннотация:** разработана модель для прогноза объема выпуска продукции АО «RG Brands» с учетом трендовой и циклической компоненты. Сделан прогноз объема выпуска продукции по аддитивной и мультипликативной модели на примере АО "RG Brands" и построены графики прогноза объема выпуска продукции по аддитивной и мультипликативной моделям временного ряда.

**Аннотация:** «RGBrands» АКсынын продукциясын чыгаруунун көлөмүн трендик жана циклдик компонентти эске алуу менен божомолдоо үчүн модель иштелип чыкты. Анын мисалында аддитивдик жана мультипликативдик модель боюнча продукция чыгаруунун көлөмүнө божомол жасалды жана убакыт тизмектеринин аддитивдик жана мультипликативдик модель боюнча продукция чыгаруунун көлөмүнө божомолдоо графиги курулду.

**Annotation:** the paper presents a model for forecasting production output of JSC RG BRANDS on the basis of the trend component and the cyclical component. The paper also includes the production output forecast based on the additive and multiplicative models and the graphs of the production output forecast based on the additive and multiplicative models of a time series.

**Ключевые слова:** метод скользящей средней; расчет циклической компоненты; аддитивные модели, мультипликативные модели; модель тренда; модель сезонности, индекс сезонности, прогнозирование.

**Негизги сөздөр:** орточо өзгөрмөлүү ыкмасы, циклдик компоненттерди эсептөө, аддитивдик моделдер, мультипликативдик моделдер, тренд модели, мезгилдүүлүк модели, мезгилдүүлүк индекси, божомолдоо.

**Keywords:** moving average method; calculation of the cyclical component; additive models; multiplicative models; trend model; seasonality model; seasonality index; forecasting.

Рассмотрим возможности применения фактических данных за прошлые промежутки времени в целях прогнозирования. Для построения модели мы хотим объяснить колебания объема выпуска продукции только через изменение значений этого показателя во времени, без учета каких-либо других факторов. Для построения модели с учетом особенностей этого показателя введем некоторые понятия. Динамический ряд представляет собой совокупность значений некоторого показателя, характеризующих его изменение во времени. При анализе динамических рядов используются также понятие сезонности (цикличности), характеризующее какие-либо периодические колебания данного ряда, и понятие случайного отклонения. Модель, построенную по ретроспективным данным, не всегда можно использовать в прогнозировании отдельных показателей. Например, план некоторых предприятий может коренным образом измениться, если эти предприятия несут убытки. Кроме того, существует множество внешних факторов, которые могут полностью изменить тенденцию, существовавшую ранее. К таким факторам можно отнести существенные изменения цен на сырье, резкое увеличение уровня инфляции в мире в целом или стихийные бедствия, которые непредсказуемым образом могут повлиять на предпринимательскую деятельность. Как обычно, временные ряды, которые содержат такие элементы, как собственно тренд, сезонная вариация и циклическая вариация, можно объединить с помощью нескольких способов. Рассмотрим, например, модели с аддитивной компонентой и модели с мультипликативной компонентой. Как следует из их названий, элементы в этих моделях либо складываются друг с другом, либо перемножаются. Каждой из моделей соответствуют различные методы расчета компонентов тренда. Значения некоторой переменной (например, объемы продаж)

изменяются во времени под воздействием целого ряда факторов. Временные ряды подразделяются также на стационарные и нестационарные.

Стационарный динамический ряд не содержит тенденции к изменению тренда, нестационарный (эволюционный) ряд имеет меняющийся тренд. Общее изменение значений переменной во времени называется трендом и обозначается через «Т».

Модель тренда можно построить, используя для расчета параметры прямой, наилучшим образом аппроксимирующей данный тренд, — метод регрессии. Затем данную модель можно использовать для прогнозирования будущих значений тренда. В большинстве случаев значения переменных

характеризуют не только тренд. Часто они подвержены циклическим колебаниям. Если эти колебания повторяются в течение небольшого промежутка времени, то они называются сезонной вариацией. Колебания, повторяющиеся в течение более длительного промежутка времени, называются циклической вариацией. Любые колебания относительно тренда, построенного по годовым значениям некоторого показателя, можно описать в виде модели с циклической компонентой. Такой фактор можно выявить только по данным за длительные промежутки времени в 10, 15 или 20 лет, однако в данном случае колебания значений тренда могут быть вызваны воздействием общеэкономических факторов.

Пусть  $R(t) = \{R(t_1), R(t_2), \dots, R(t_n)\} = R(t_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  есть некоторый динамический ряд, представленный в виде последовательных значений в момент времени  $t_i$ , где  $i$  меняется от 1 до  $n$ . Запишем несколько частных моделей динамического ряда [1-3], например:

$$\text{модель тренда } R(t) = T(t) + E(t), \quad (1)$$

где  $T(t)$  – временной тренд заданного параметрического вида,  $E(t)$  – случайная компонента;

$$\text{модель сезонности } R(t) = S(t) + E(t), \quad (2)$$

где  $S(t)$  – периодическая (сезонная) составляющая;

$$\text{модель тренда и сезонности } R(t) = T(t) + S(t) + E(t) \quad (3)$$

– с аддитивной компонентой;

$$R(t) = T(t) * S(t) * E(t) \quad (4)$$

– с мультипликативной компонентой.

В общем случае каждый член динамического ряда, может быть представлен в аддитивной форме, содержащей несколько составляющих:

$$R_t = T_t + S_t + E_t + \eta_t \quad (5)$$

где  $T_t$  – тренд динамического ряда – регулярная компонента, характеризующая общую тенденцию;

$S_t$  – сезонная компонента, внутригодовые колебания, а в общем случае – циклическая составляющая;

$E_t$  – случайная компонента, образующаяся под влиянием различных (как правило, неизвестных) причин;

$\eta_t$  – управляющая компонента, с помощью которой воздействуют на члены динамического ряда с целью формирования в будущем его желаемой траектории (управляемый прогноз).

Исследование динамических рядов осуществляется различными методами, поэтому применяемые подходы и соответствующие математические модели зависят от поставленных задач. Процесс раздельного вычисления компонент  $T_t$ ,  $S_t$  и  $E_t$  ряда  $R_t$  называют фильтрацией компонент. Если требуется оценить трендовую компоненту  $T_t$  совместно с сезонной  $S_t$ , то есть  $(T_t + S_t)$ , то такая процедура называется сглаживанием, а

значения  $(T_t + S_t)$  – тренд с сезонным временным рядом. Управляющая компонента  $\eta_t$  вводится специально для управления какой-либо экономической системой. Достаточно полный анализ динамических рядов

требует разработки математических подходов, позволяющих расчленив элементы ряда на составляющие и определить их воздействие друг на друга.

Рассмотрим определения и условия, связанные с учетом циклической компоненты  $S_t$  в составе членов ряда  $R_t$ . Циклическая компонента  $S_t$  характеризуется длительностью периода циклических колебаний, их амплитудой, расположением максимумов и минимумов во времени и некоторыми другими показателями. Для исследования сезонной компоненты часто принимаются следующие условия:

1. Случайная компонента  $E_t$  имеет математическое ожидание, равное нулю, постоянную дисперсию, и полностью отсутствует автокорреляция между уровнями ряда, то есть

$$M(E_t)=0, D(E_t)=G^2, M(E_t, E_{t+1})=0 \quad (6)$$

2. Регулярная компонента  $T_t$  есть некоторая гладкая функция. Степень гладкости регулярной компоненты определяется минимальной степенью полинома, моделирующего тренда  $T_t$

3. Сезонная компонента  $S_t$  имеет период  $T_0$ , то есть  $S_{t+T_0} = S_t$ ,  $T_0=12$  для месячных данных и  $T_0=4$  для квартальных данных. Величина  $T_0$  содержится в  $T$  целое число раз  $m$  то есть  $T = mT_0$ .

Анализ динамического процесса обычно проводится по следующей схеме:

- члены динамического ряда корректируются специальной компонентой  $Z_t$ , если этого требуют условия сопоставления. Если ряд не требует такой корректировки, то считается,  $Z_t=0$ ;
- управляющая компонента  $\eta_t$  принимается равной нулю;
- вычисляется регулярная компонента  $T_t$  (тренд);
- определяется циклическая компонента  $S_t$ ;
- осуществляется оценка ошибки при вычислении  $T_t$  и  $S_t$ , то есть оценка случайной составляющей.

В моделях как с аддитивной компонентой, так и с мультипликативной компонентой общая процедура анализа примерно одинакова.

Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, то строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения циклической компоненты предполагаются постоянными для различных циклов.

Ряд динамики формируется под влиянием различных взаимодействующих факторов, одни определяют тенденцию развития, а другие – колеблемость. При этом важно учитывать, относительно какой величины исследуется колеблемость. Например, можно исследовать колеблемость вокруг среднего уровня ряда  $Y_{cp}$ , который проходит параллельно оси абсцисс. А можно исследовать колебания уровней вокруг линии тренда. Первый показатель чем меньше, тем лучше, и показывает, что линия тренда подобрана удачно, адекватно эмпирическим данным.

В рядах динамики, уровни которых являются месячными или квартальными показателями, наряду со случайными колебаниями часто наблюдаются сезонные колебания, под которыми понимается периодически повторяющееся из года в год повышение и снижение уровней в отдельные месяцы и кварталы. Сезонные волны измеряются. Все измерения основаны на сравнении фактических уровней каждого месяца со средним уровнем, со сглаженными скользящими средними или выровненными по уравнению тренда. Для измерения «сезонной волны» могут быть рассчитаны либо абсолютные разности фактических уровней от среднего уровня, либо отношения месячных уровней к среднему месячному уровню за год, так называемые индексы сезонности

$$I_{сез} = \frac{Y_i}{Y_{cp}} * 100\% \quad (7)$$

Для характеристики силы колеблемости уровней динамические ряды используется среднее квадратическое отклонение индексов сезонности от 100%

$$\delta_{сез} = \sqrt{\frac{\sum (I_{сез} - 100\%)^2}{n}} \quad (8)$$

Этот же результат можно получить и по другому, как коэффициент вариации

$$V = \frac{\delta}{Y_{cp}} * 100\% \quad (9)$$

$$\text{где } \delta = \sqrt{\frac{\sum (Y_i - Y_{cp})^2}{n}} \quad (10)$$

где  $\delta$  – среднее квадратическое отклонение уровней ряда.

При наличии месячных данных за ряд лет расчет индексов сезонности можно осуществить по-разному.

1) По данным ряда лет рассчитывается среднее значение уровня для каждого месяца  $y_t^{cp}$ , а также средний месячный уровень за весь период  $y_{cp}$ . Затем определяются индексы сезонности как процентное отношение средних уровней для каждого месяца к общему среднему месячному уровню всего ряда (за все годы).

Данный метод используется в основном в тех случаях, когда уровни одноименных месяцев в разные годы отличаются незначительно.

2) Если наблюдается тенденция к увеличению или снижению уровней из года в год, то используется другой метод. Для каждого года отдельно рассчитываются индексы сезонности по формуле то есть как

$$I_{сез, i} = \frac{y_i}{y} 100\% \quad (11)$$

а затем из индексов одноименных месяцев находится средняя арифметическая.

3) Следующий метод измерения сезонных колебаний при наличии тренда в данных за несколько лет основан на сравнении фактических

месячных уровней с выровненными по определенной аналитической формуле:  $Y = a_0 + a_1 t$  (12)

Затем находим индекс сезонности по каждому периоду времени [3].

АО «RG Brands» – одна из лидирующих компаний в секторе товаров активного потребления на рынке Казахстана и Центральной Азии. Компания входит в тройку индустриальных холдингов Resmi Group Ltd. Операционная структура RG Brands включает в себя 4 производственных площадок, 2 логистических центра и 18 торговых филиалов в Казахстане, Кыргызстане, Узбекистане, Таджикистане и Туркменистане.

АО «RG Brands» (KASE: RGBR) ведущий производитель соков и сокосодержащих напитков, молока, чая, газированных напитков и снеков в Казахстане. Компания обладает портфелем брендов, как собственных, так и международных: соки – «Gracio», «DaDa» и «DaDaDay», «Нектар Солнечный». Напитки – «A'SU», «Lipton Ice Tea», «AquaFina», «Pepsi», «7up», «Mirinda». Молоко – «Мое». Чай – «Пиала». Снеки – «Гризли». Рейтинг, присвоенный Международным рейтинговым агентством Moody's,

B3/stable. Инструменты АО "RG Brands", включенные в торговые списки KASE, RGBRb4, RGBRb5, RGBRb6 [4].

Для планирования объемов выпуска продукции АО «RG Brands» рассмотрим применение эконометрических моделей прогнозирования на основании данных за ряд прошлых лет. Графическая реализация объема выпуска продукции по трендовым моделям временного ряда за 2009-2013 года АО «RG Brands» представлена на рисунке 1.

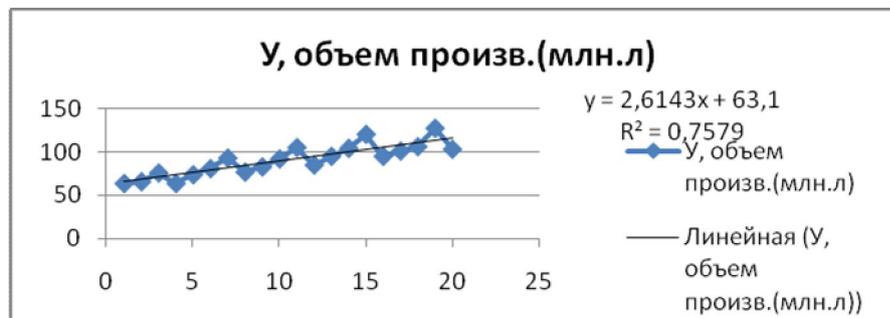


Рис. 1. Динамика объема выпуска продукции АО "RG Brands" за 2009-2013 гг.

Как видно на рисунке 1, данные имеют тенденцию. Отметим, что линейный тренд применяется для долгосрочного прогнозирования, другие типы трендовых моделей обычно применяются для краткосрочного или среднесрочного прогноза.

Утренд =  $63,1 + 2,6143t$ ,  $R^2 = 0,76$   $R^2 = 0,76$  адекватно и содержат сезонные колебания.

Следовательно, для целей прогнозирования можно использовать аддитивные и мультипликативные модели.

Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, то строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения циклической компоненты предполагаются постоянными для различных циклов. Для расчета прогноза объема выпуска продукции по аддитивной и мультипликативной моделям временного ряда необходимо рассчитать прогноз по трендовым моделям [3]

Для расчета прогноза выпуска продукции по аддитивной и мультипликативной моделям временного ряда необходимо рассчитать прогнозы по трендовым моделям.

Утренд =  $63,1 + 2,6143t$  (13)

Прогнозирование с учетом индекса сезонности по мультипликативной модели по формуле

$$Y_{\text{прогноз}} = f(x) + (Y_i - Y_{\text{теор}})_{\text{ср}} \quad (14)$$

Прогнозирование с учетом среднего абсолютного отклонения и сезонности по аддитивной модели по формуле  $Y_{\text{прогноз}} = f(x) + (Y_i - Y_{\text{теор}})_{\text{ср}}$  (15)

Прогнозирование на 2014 год с учетом индекса по аддитивной модели по формуле:

$$Y(21) = (63,1 + 2,6143 \cdot 21) - 3,229 = 114,772$$

$$Y(22) = (63,1 + 2,6143 \cdot 22) + 0,594 = 118,594$$

$$Y(23) = (63,1 + 2,6143 \cdot 23) + 12,371 = 130,371$$

$$Y(24) = (63,1 + 2,6143 \cdot 24) - 9,672 = 108,329$$

Прогнозирование на 2014 год с учетом индекса по мультипликативной модели по формуле:

$$Y(21) = (63,1 + 2,6143 \cdot 21) \cdot 0,964 = 113,780$$

$$Y(22) = (63,1 + 2,6143 \cdot 22) \cdot 1,006 = 118,754$$

$$Y(23) = (63,1 + 2,6143 \cdot 23) \cdot 1,131 = 133,513$$

$$Y(24) = (63,1 + 2,6143 \cdot 24) \cdot 0,897 = 105,831$$

Графическая реализация прогноза объема выпуска продукции по аддитивной и мультипликативной моделям временного ряда представлены на рисунках 2 и 3.

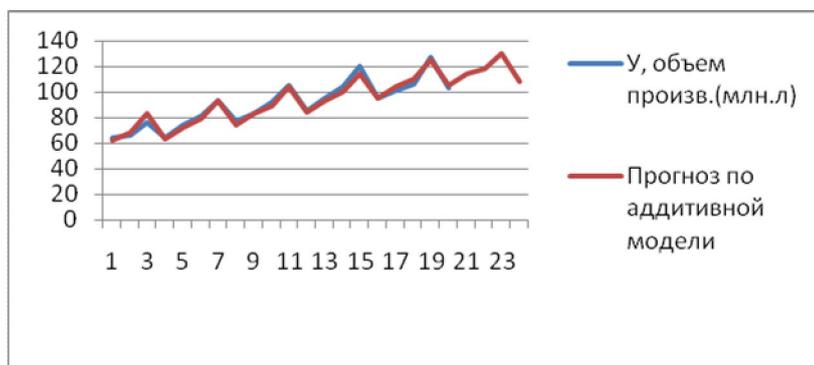


Рис. 2. Прогноз объема выпуска продукции по аддитивной модели

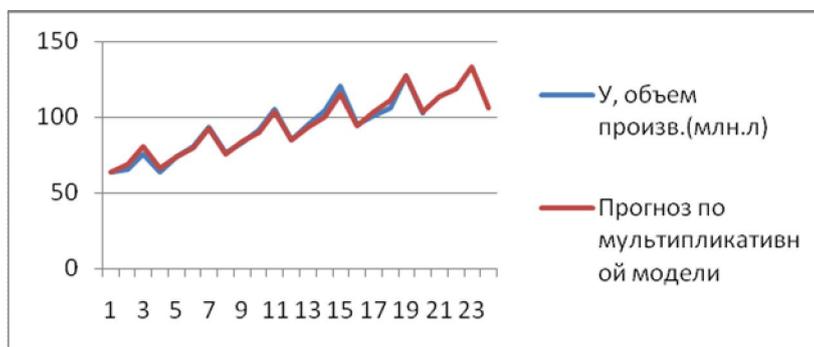


Рис. 3. Прогноз объема выпуска продукции по мультипликативной модели

Составим таблицу сводных прогнозных значений объема выпуска продукции на будущие периоды и проведем анализ точности прогноза (таблица 1).

Таблица 1. Сводный прогноз дохода от реализации по моделям

t	Прогноз по трендовой модели	Прогноз по аддитивной модели	Прогноз по мультипликативной модели
21	118	114,772	113,780
22	120,615	118,594	118,754
23	123,229	130,371	133,513
24	125,843	108,329	105,831

Проведя оценку точности прогноза по перечисленным моделям можно сделать вывод, что более достоверными являются прогнозные значения, рассчитанные по аддитивной модели. Следует отметить, что прогнозирование по аддитивной модели учитывает только общую

тенденцию и циклическую составляющую. Поэтому такая модель может быть использована для долгосрочного прогнозирования. Но эта модель не учитывает влияния внешних факторов, например, государственных программ предусматривающих выделение инвестиции для развития предприятия.

#### **Литература**

1. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева. М.: Финансы и статистика, 2005. 576с.
2. А.А.Минько Статистический анализ в MSEXCEL / А.А.Минько. М.: ЮНИТИ, 2003. 448с.
3. Рахметова Р.У., Дуброва Т.А. Прикладные модели эконометрики / Р.У Рахметова, Т.А. Дуброва. Алматы: Экономика, 2011.324 с.
4. Официальный сайт казахстанской фондовой биржи [электронный ресурс] – <http://www.kase.kz>
5. Сапарбаев А.Ж., Макулова А.Т. Эконометрика / А.Ж. Сапарбаев, А.Т. Макулова. Алматы. Бастау, 2007. 214 с.
6. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: учебник для вузов / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. М.: ЮНИТИ, 1998.
7. Эконометрика: учебник / ред. В. С. Мхитарян. М.: Проспект, 2009. 384 с.
8. Доугерти К. Введение в эконометрику: учебник пер. с англ. / К. Доугерти. 2-изд. М.: ИНФРА, 2007.432с.
9. Makulova A.T., Mukhametzhanova Zh.S. Optimum alternative of the food enterprises location using economic and mathematical methods. //European Science and Technology: materials of the international research and practice conference, Wiesbaden, January 31<sup>st</sup>, 2012./publishing office “Bildungszentrum Rodnik e.V.”. Wiesbaden, Germany, 2012. – P.631-636.
10. Макулова А.Т., Мухаметжанова Ж.С. Вычисление прогнозных значений методом Хольта / А.Т. Макулова, Ж.С. Мухаметжанова // Социально-экономическая модернизация Казахстана в условиях глобальной финансовой нестабильности. VI Рыскуловские чтения: Материалы международной научно- практической конференции. На казахском, русском, английском языках. Алматы: Экономика, 2012. С. 256 -261.
11. Мухаметжанова Ж.С., Ибрагимова С.А. Прогнозирование объема выпуска продукции АО "RG BRANDS" на основе эконометрического моделирования. // Сборник материалов IX международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы». – Воронеж 2013. – С.167-169.