УДК. 517.977.55/.58(045/046) З.К. ИМАНАЛИЕВ, Ч.А. КАДЫРОВ,
Ж.А.АЛЫМБАЕВА
Z. K . IMANALIEV, CH. A. KADYROV, J. A. ALYMBAEVA
E.mail. ksucta@elcat.kg

РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С МАЛЫМ ПЕРИОДОМ КВАНТОВАНИЯ

SOLUTION DISCRETE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL WITH A SMALL PERIOD OF QUANTIZATION OF

Дискреттик оптималдуу башкаруу маселесин кароодо көпчүлүк учурда дискреттүүлүк кадам (кванттоо мезгили) кичине же кадамдардын саны чоң болот (экинчи учур көз карандысыз чоңдукту алмаштыруу аркылуу биринчи учурга жеңил эле келтирилет). Мындай маселелердин так аналитикалык чыгарылыштарын табуу көп учурларда мүмкүн эмес.
Ачкыч сөздөр: дискреттүүлүк кадам, кванттоо мезгили, оптималдуу башкаруу, чектик шарттар, функционалдын минимуму.

При рассмотрении задачи дискретного оптимального управления часто шаг дискретности (период квантования) оказывается малым либо число шагов велико (второй случай легко сводятся к первому путем замены независимой переменной). Получение точного аналитического решения таких задач во многих случаях невозможно.
Ключевые слова: шаг дискретности, период квантования, оптимальное управление, краевые условия, минимум функционала.

In consideration of tasks of discrete optimal control is discrete pitch size (sampling time) often comes out to be short or the number of pitch sizes (the second case can be easily equaled to the first one by replacing the independent variable). It is impossible to find out the exact analytical solutions of such tasks in many cases.
Keywords: step of discreteness, period of quantization of, optimal control, boundary conditions, minimum of functional.

Пусть уравнение движения имеет вид

$$x(t+\mu) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0,\ x(N) = x_N \qquad (1)$$

где $x - n -$ мерный вектор фазовых координат, $u - r -$ мерный вектор управления. $t \in T_\mu = \{t\colon\ t = k\mu,\ k = 0,1,\dots,N-1\} \subset T = \{t\colon\ 0 \le t \le 1\},\ N = \frac{1}{\mu}, \mu > 0$ – малый шаг.

$A, B -$ постоянные матрицы размерностей $n \times n,\ n \times r$ соответственно, $x_0,\ x_N$ – заданные векторы. Качество процесса оценивается квадратичным функционалом

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u'(k\mu)Qu(k\mu), \qquad (2)$$

Где $Q -$ симметричная, положительная матрица размерности $n \times r$.

Предположим, что:

Матрица A является матрицей простой структуры [1,5] и не имеет нулевого собственного значения $\lambda_i\ (\overline{1,n})$.

Все собственные значения $\lambda_i\ (\overline{1,n})$ матрицы A удовлетворяют условию

$$|\lambda_i| < q_0 < 1 \qquad (3)$$

Пусть далее x^N – произвольно выбранный вектор фазового пространства R^n. Функционал (2) оценивает затрачиваемую энергию в процессе управления [6]. Подобная задача в случае, когда Q единичная матрица, рассмотрена в [1], и данная задача является ее алгебраическим обобщением.

Исследуемая задача состоит в отыскании управления $u(t)$, которое доставляет минимум функционалу (2) на траекториях системы (1).

Решение задачи (1), (2) можно представить в виде [1]

$$x(k\mu) - A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i\mu), \tag{4}$$

где $k = \frac{t}{\mu}$.

По первому условию матрица A не имеет нулевого собственного значения и не вырождена. Тогда собственные значения матрицы $(A')^{-1}$ равны $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$, а соответствующие собственные векторы совпадают [1].

Так же, как и в [7] рассмотренном случае, решение будет получаться при помощи теоремы об ортогональном разложении элемента гильбертова пространства.

Из конечного условия (при $k = N$) системы (1) следует, что искомое уравнение должно удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} Bu(i\mu) = \alpha_N, \tag{5}$$

Это условие можно записать в координатной форме

$$\sum_{i-0}^{N-1} H_j'(N,i) u(i\mu) = \alpha_N, j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где $H_j\ (N,i)$ - вектор, компонентами которого являются элементы $j-$**й** строки матрицы $A^{N-i-1}B$, $\alpha_{Nj} - j -$ **я** компонента вектора α_N.

Формируем новое пространство l^* векторов $u = u(k\mu)$, скалярное произведение и норма в котором определяются соотношениями:

$$(u,v) = \sum_{i-0}^{N-1} u'(i,\mu) Q v(i,\mu), \qquad \|u\| = \left\{\sum_{i-1}^{N-1} u'(i\mu) Q u(i\mu)\right\}^{1/2}$$

где $u \subset l^*, v \subset l^*$.

По условию задачи (1), (2) матрица Q положительная, то каждому $H_j\ (N,i)$ соответствует единственный вектор $v_j(N,i) \subset l^*$ такой, что

$$Q \cdot v_j(N,i) = H_j\ (N,i), \ \ j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Тогда соотношения (6) можно записать в виде

$$\big(v_j(N,i), u(i,\mu)\big) = \alpha_{Nj}, \ j = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $v_j(N,i)$ определяется из уравнений (6).

Тем самым исследуемая задача об оптимальном управлении с малым периодом квантования может быть сформулирована следующим образом.

В пространстве l^* требуется найти элемент $u^*(i,\mu)$ такой, чтобы он удовлетворял условиям (8) и при этом функционал $J - \|u\|^2$достигал наименьшего значения.

Пусть $\bar{l}^*$ - подпространство пространства l^*, т. е. $\bar{l}^* \subset l^*$, которое состоит из элементов

$$u(i\mu) - \sum_{j-1}^{n} C_j v(N,i)$$

где C_j, $(j = \overline{1,n}) -$ произвольные постоянные.

Теперь, предположим, что $v_1, v_2, \dots, v_m$ $(m \le n) -$ базис в $\bar{l}^*$ и рассматриваемая задача при заданных α_{Nj} имеет решение. Тогда оптимальное управление следует искать в форме

$$u^*(i\mu) = \sum_{j=1}^{m} C_j \nu_j(N,i),$$
(9)

где $C_1, C_2, \dots, C_m$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [\nu_j, \nu_\sigma] = C_\sigma = \alpha_{Nj} \quad j = \overline{1,n}. \qquad (10)$$

Так как $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ – базис пространства $\bar{l}^*$, определитель системы (10) отличен от нуля и управление (9) определяется однозначно.

Теперь рассмотрим случай, когда $m = n$. Если обозначить через $V(N,i)$ матрицу размерности $r \times n$, столбцами которой являются векторы $\nu_j(N,i)$, то уравнения (7) можно записать в матричной форме, т. е.

$$Q \cdot V(N,i) = B'(A')^{N-i-1},$$
(11)

из (11) имеем

$$V(N,i) = Q^{-1}B'(A')^{N-i-1}$$
(12)

и выражение (9) записываем в виде

$$u^*(i\mu) = Q^{-1}B'(A')^{N-i-1}C,$$
(13)

где C – вектор с компонентами $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Кроме этого, системе (10) можно придать вид

$$\sum_{i=0}^{N-1} V'(N,i)QV(N,i) \cdot C = \alpha_N$$
(14)

или

$$W \cdot C - \alpha_N,$$
(15)

где

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1}BQ^{-1}B'(A')^{N-i-1}.$$

Из (15) будем иметь $C = W^{-1}\alpha_N$.

Тогда управление (13) записывается в виде

$$u^*(i\mu) = Q^{-1}B'(A')^{N-i-1}W^{-1}\alpha_N, \; k = 0,1,2,\dots,N-1 \qquad (16)$$

или

$$u(k\mu) = Q^{-1}B'[A'^{-1}]^{k+1-N}W^{-1}\alpha_N, \; k = 0,1,2,\dots,N-1,$$
(17)

С учетом (16) формула (4) примет вид

$$x(k\mu) - A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B B'(A')^{k-i-1}(A')^{N-k}W^{-1}\alpha_N,$$
(18)

Функция (18) формировано с учетом граничных условий (1) и она содержит в себе левые и правые пограничные составляющие.

<u>Теорема.</u> Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда найдутся постоянные $\tilde{N}_0 \geq 1,\; C_1 \geq 1,\; q_0 < 1,\; \mu_0 > 0,\; q_1 > 1$ такие, что во первых

$$\|A^{\tau_0}\| \leq C_0 q_0^{\tau_0},\; \tau_0 \geq 0,\; \|A^{\tau_1}\| \leq C_1 q_1^{\tau_1},\; \tau_1 \leq 0 \qquad (19)$$

и во вторых при $\mu \leq \mu_0$ решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u(t,\mu) = O(q_1{}^{\tau_1}), \quad x(t,\mu) = O(q_0{}^{\tau_0}) \mid O(q_1{}^{\tau_1}), \qquad (20)$$

где $\tau_0 - t/\mu$, $\tau_1 - (t-1)/\mu$, $\tau_0 - 0,1,\dots,N$; $\tau_1 - -1,-2,\dots,-N$.

<u>Доказательство.</u> При выполнении условий 1, 2 без сомнения имеют места неравенства (19). Покажем теперь, справедливость соотношений (20). Действительно необходимые условия оптимальности [2] для задачи (1) имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = B'\psi(t+\mu) - 2u(t) = 0,$$

где $H = [Ax(t) + Bu(t)]'\psi(t+\mu) - u'(t)u(t)$.

Из последнего равенства имеем

$$u(t) = (1/2)B'\psi(t+\mu). \tag{21}$$

Вектор функция $\psi(t)$ является решением следующего разностного уравнения

$$\psi(t) = A'\psi(t+\mu), \quad \psi(1) = -\varepsilon$$

или

$$\psi(t+\mu) = (A')^{-1}\psi(t), \quad \psi(1) = -\varepsilon. \tag{22}$$

Следует отметить, что основное свойство сопряженного уравнения (22) заключается в том, что оно представляет решение исходного уравнения т. е. уравнения $x(t+\mu) = Ax(t)$ в обратном времени. Поэтому, пологая

$t = (N-1)\mu,\ (N-2)\mu, \dots, k, \dots$ из (22) имеем

$$-\varepsilon = (A')^{-1}\psi[(N-1)\mu], \qquad -\varepsilon = (A')^{-2}\psi[(N-2)\mu],$$
$$-\varepsilon = (A')^{k-N}\psi(k\mu), \dots$$

Из последнего равенства следует, что

$$\psi(k\mu) = -(A')^{k-N}\varepsilon \ \text{или}\ \psi(t) = -[(A')^{-1}]^{\frac{t-1}{\mu}}\varepsilon \tag{23}$$

Тогда из (21) – (23) получаем

$$u(k\mu) = -(1/2)Q^{-1}B'[(A')^{-1}]^{k+1-N}\varepsilon. \tag{24}$$

Сравнивая соотношения (17) и (24) находим значения вектора ε

$$\varepsilon = -2W^{-1}\alpha_N. \tag{25}$$

Если учесть, что $t = k\mu$, то формулу (17) можно записать в форме

$$u(t,\mu) = Q^{-1}B'[(A')^{-1}]^{\tau_1}W^{-1}\alpha_N, \ \tau_1 = (t-1)/\mu. \tag{26}$$

Как видно из (26), что управление $u(t) = u(t,\mu)$ определяется решением сопряженного уравнения – правым пограничным слоем, т. е. $u(t,\mu) = O\left(q_1^{\tau_1}\right)$.

Точно также из формулы (18) будем иметь соотношение для вектора переменных состояния $x(t,\mu)$, указанное в (20), где данный вектор представлен в виде суммы двух пограничных функций, ч. т. д.

Управление (16) достигает минимум функционалу (2).

Минимальное значение функционала (2) будет равно

$$J_{min} = \alpha_N' W^{-1}\sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1}BQ^{-1}B'(A')^{N-i-1}W^{-1}\alpha_N = \alpha_N' W^{-1}\alpha_N \tag{27}$$

В заключении отметим следующее: в ходе доказательства теоремы выявлен особый случай, который связан с недостаточным краевыми условиями системы сопряженных уравнений, где определения их непосредственно из принципа максимума не следует.

Список литературы

1. Иманалиев З. К. Решение дискретной задачи оптимального управления с малым шагом [Текст] / З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев, Ж.А. Алымбаева // Наука и инновации - Бишкек: 2013. - Вып. №1, С-35-41.
2. Глизер В. Я. Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом [Текст] / В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев // Дифференц. уравнения. - 1979. - Т. 15. - №9 - С. 116-122.
3. Глизер В. Я. Об одной разностной задаче оптимального управления с малым шагом [Текст] / В.Я.Глизер //Дифференц. уравнения. - 1985. - Т. 21. - №8. - С. 1440 - 1442.

4. Глизер В. Я. Асимптотика решения одной разностной с малым шагом задачи оптимального управления с подвижным правым концом траектории [Текст] /В.Я.Глизер // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24. - №8. - С. 1457- 1459.

5. Коровин С. К. Равномерная по малому параметру устойчивость и стабилизация дискретных сингулярно – возмущенных динамических систем [Текст] / С.К. Коровин, И.Г. Мамедов, И. П. Мамедова // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. - 1989. - №1. - С. 21-29.

6. Красовский Н. Н. Теория управления движением [Текст] / Н.Н.Красовский. – Москва: Наука, 1968. – 476с.

7. Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами [Текст] / А.И.Егоров. – Киев: Высшая школа, 1988. – 278с.