УДК: 004.02: 517.977.8
Б.Ы. АШИРБАЕВ, А.М.ОСМОНКАНОВ АБДРАСУЛ К. Ч.

B.Y.ASHIRBAYEV, A. M. OSMONKANOV, ABDRASUL OF A KYZA OF CHOLPONAY
E.mail. ksucta@elcat.kg

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГИИ

DISCRETE PROBLEM OF OPTIMUM CONTROL AT LIMITED ENERGY

Макалада дискреттик оптималдык башкаруу маселесинин энергиясы чектелген оптималдык башкарууну аныктоо алгоритмасы сунушталды. Алынган алгоритмдин негизинде аткарылган маселенин чыгарылышы каралды.
Ачкыч сөздөр: *энергетикалык чектөөлөр, Грам матрицасы, башкарылуу абалындагы чөйрө, томпок көп бурчтук.*

В статье предложен алгоритм определения оптимального управления дискретной задачи оптимального управления при ограниченной энергии. Рассмотрен пример по разработанному алгоритму.
Ключевые слова: *энергетические ограничения, матрица Грама, область управляемых состояний, выпуклый многоугольник.*

In article the algorithm of definition of optimum control of a discrete problem of optimum control at limited energy is offered. An example on the developed algorithm is reviewed.
Keywords: *power restrictions, Gram's matrix, area of the operated states, a convex polygon.*

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается разностным уравнением

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k) \tag{1}$$

где $y -$ n –мерный вектор состояния, $A - (n \times n)$, $B - (n \times r) -$ постоянные матрицы, $u = u(k) - r$ –мерный вектор управления, $k = 0,\ 1, \cdots, N-1$.

Требуется найти оптимальное управление $u = u^*(k)$ которое переводит процесс из начального состояния

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

в конечное

$$y(N) = y_N, \tag{3}$$

при этом функционал

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u'(k)u(k) \tag{4}$$

достигал своего наименьшего возможного значения, где штрих обозначает транспонирование.

Критерий качества вида (4) является квадратичной формой и в данном случае отражает энергетические ограничения в проектируемой системе [1].

Предположим, что [2]:

I. Пара $[A, B]$ полностью управляема, т.е. матрица $D = [B\ \ AB\ \ A^2B\ \ \cdots A^{N-1}B]$ имеет ранг n или $(n \times n) -$ мерная матрица DD' является невырожденной.

Решение задачи

Решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$y(k) = A^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i). \tag{5}$$

При $k = N$ из системы (5) следует, что искомое управление должно удовлетворять соотношению

$$\propto_N = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} Bu(i), \quad \propto_N = y_N - A^N y_0. \qquad (6)$$

При выполнении условии I соотношения (6) выражают необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять управление $u = u^*(k)$, чтобы процесс описываемой системы (1) переведена из заданного начального состояния (2) в заданное конечное состояние (3). Кроме того, она должна доставлять минимум функционалу (4) [3].

Такое оптимальное управление следует искать в форме [4]

$$u^*(k) = B'\left(A^{N-i-1}\right)' c. \qquad (7)$$

где вектор c является решением уравнения

$$W \cdot c = \propto_N. \qquad (8)$$

В уравнении (8)

$$W = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} BB'\left(A^{N-i-1}\right)' \qquad (9)$$

является матрицей Грама.

При выполнении условии I матрица (9) невырожденная [2], тогда из уравнения (8) будем иметь

$$c = W^{-1} \propto_N \qquad (10)$$

и искомое оптимальное управление определяется в форме

$$u^*(k) = B'\left(A^{k-i-1}\right)' W^{-1} \propto_N, \; k = 0, \; 1, \cdots, N-1. \qquad (11)$$

С учетом (11) вектор состояния $\mathbf{y}(k)$ и минимальное значение функционала (4) соответственно имеют вид

$$\mathbf{y}(k) = A^k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} BB'\left(A^{k-i-1}\right)' W^{-1} \propto_N. \qquad (12)$$

$$J_{min} = \propto_N' W^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} BB'\left(A^{k-i-1}\right)' W^{-1} \propto_N = \propto_N' W^{-1} \propto_N. \qquad (13)$$

Пример. Задана дискретная система

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k), \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Требуется:

1. Найти оптимальное управление $u^*(k)$, для $k = 0, \; 1, \cdots, 5$ и $N = 6$, которое переведет процесс из начального состояния $y(0) = y_0 = (1 \;\; 1)'$ в конечное состояние $y(6) = y_6 = (0 \;\; 0)'$, при условии

$$J = \sum_{k=0}^{5} u'(k) u(k) \to min. \qquad (15)$$

Определить оптимальную траекторию $y^*(k)$ и минимальное значение функционала (15).

2. Управление имеет ограничение $|u^*(k)| \leq 1$. Определить область управляемых состояний для $y(0)$ на плоскости состояний для $N < 6$ и $y(N) = (0 \;\; 0)'$.

3. Определить область управляемых состояний для $y(N)$ на плоскости состояний для $N = 6$ при $y(0) = (1 \;\; 1)'$ и $J \leq 1$.

Решение. 1. Вводим данные: A=[0 1;-0.5 -0.2];B=[0;1]; y(0)=[1;1]; y(6)=[0;0].
Находим матрицу $D = (B \;\; AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0{,}2 \end{pmatrix}$, $|D| = -1 \neq 0$, следовательно ранг матрицы D равен двум и условия I выполняется.

Вычисляем по формулам (6) и (9) матрицы: $\propto_N$, W и W^{-1}:

$$\propto_N = \begin{pmatrix} 0.2301 \\ 0.0018 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 3.3710 & -0.4478 \\ -0.4478 & 2.1541 \end{pmatrix}, \; W^{-1} = \begin{pmatrix} 0.3051 & 0.0634 \\ 0.0634 & 0.4774 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Значения оптимального управления $u^*(k)$ (11) и оптимальной траектории $y^*(k)$ (12) приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Значения оптимального управления $u^*(k)$ и оптимальной траектории $y^*(k)$ при $k = 0,\ 1, \cdots, 5$.

k	0	1	2	3	4	5
$u^*(k)$	0.0114	0.0165	-0.0294	-0.0212	0.0672	0.0154
$y^*(k)$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-0{,}6846\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0{,}6328\\-0{,}3580\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-0{,}2885\\0{,}4337\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}5070\\01017\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0{,}1837\\-0{,}2209\end{pmatrix}$

По формуле (13) минимальное значение функционала $J = 0.0162$.

2. Согласно (12) уравнение состояний запишем в виде

$$y(6) = A^6 y(0) + A^5 Bu(0) + A^4 Bu(1) + A^3 Bu(2) + A^2 Bu(3) +$$
$$+ABu(4) + Bu(5).$$

Для $y(0)$ из последнего уравнения получаем

$$y(0) = \begin{pmatrix}2 & -0.8\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3.68 & 3.0720\\-0.8 & -3.68\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(2)\\u(3)\end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix}6.1312 & -8.5065\\3.0720 & 6.1312\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(4)\\u(5)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Вершины управляемых состояний находим подстановкой четырех возможных комбинаций $u^*(k) = 1$ и $u^*(k) = -1$ в (17). При этом получим следующие результаты:

$$u^*(0) = u^*(1) = 1,\ u^*(2) = u^*(3) = 1,$$
$$u^*(4) = u^*(5) = 1 \rightarrow y(0) = \begin{pmatrix}1.7833\\6.7232\end{pmatrix}.$$
$$u^*(0) = u^*(1) = -1,\ u^*(2) = u^*(3) = -1,$$
$$u^*(4) = u^*(5) = -1 \rightarrow y(0) = \begin{pmatrix}-1.7833\\-6.7232\end{pmatrix}.$$
$$u^*(0) = -u^*(1) = 1,\ u^*(2) = -u^*(3) = 1,$$
$$u^*(4) = -u^*(5) = 1 \rightarrow y(0) = \begin{pmatrix}10.6857\\-2.1792\end{pmatrix}.$$
$$-u^*(0) = u^*(1) = 1,\ -u^*(2) = u^*(3) = 1,$$
$$-u^*(4) = u^*(5) = 1 \rightarrow y(0) = \begin{pmatrix}-10.6857\\2.1792\end{pmatrix}.$$

Выпуклый многоугольник с этими четырьмя вершинами показан на рис.1.

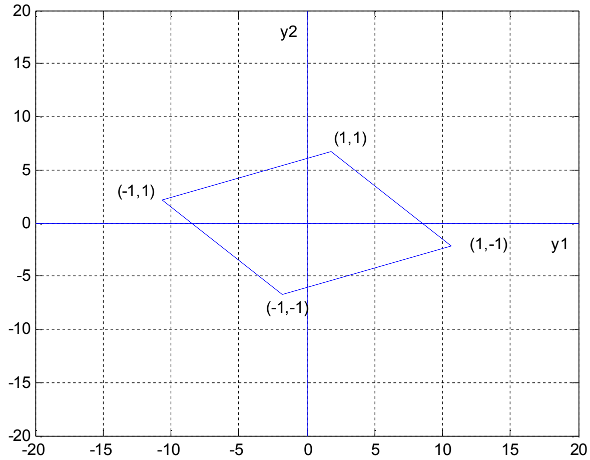

Рис.1. Область управляемых состояний для $y(0)$ ($N < 6$ и $y(N) = (0\ \ 0)'$)

3. С учетом (16) из (13) имеем

$$0{,}3051\left(\propto_6^{(1)}\right)^2 + 0{,}1268\propto_6^{(1)}\propto_6^{(2)} + 0{,}4774\left(\propto_6^{(2)}\right)^2 \le 1. \qquad (18)$$

Выражение (18) описывает эллипс. Эту выражению приведем к каноническому виду. Для этого воспользуемся формулами поворота осей координат:

$$\propto_6^{(1)} = x\cos\propto - y\sin\propto,\quad \propto_6^{(2)} = x\sin\propto + y\cos\propto. \qquad (19)$$

Тогда из (18) после преобразований получаем

$$x^2\cos^2\propto(0{,}4774tg^2\propto + 0{,}1268tg\propto + 0{,}3051) +$$
$$+xy\cos^2\propto(-0{,}1268tg^2\propto + 0{,}3446tg\propto + 0{,}1268) +$$
$$+y^2\cos^2\propto(0{,}3051tg^2\propto - 0{,}1268tg\propto + 0{,}4774) \le 1. \qquad (20)$$

Выберем угол $\propto$ таким, чтобы коэффициент при xy стал равным нулю т.е.

$$-0{,}1268tg^2\propto + 0{,}3446tg\propto + 0{,}1268 = 0, \qquad (21)$$

где корни уравнения $tg\propto - 3{,}045968$ и $tg\propto - -10{,}6521$.

Пусть $tg\propto - 3{,}045968$, известно, что $\frac{1}{\cos^2\propto} = 1 + tg^2\propto$, тогда $\cos^2\propto - 0{,}097296$. В результате с учетом (19) из (20) получаем

$$\frac{\left(\propto_6^{(1)}\right)^2}{1{,}304727^2} + \frac{\left(\propto_6^{(2)}\right)^2}{1{,}875524^2} \le 1. \qquad (22)$$

Область определяемый неравенством (22) показан на рис.2.

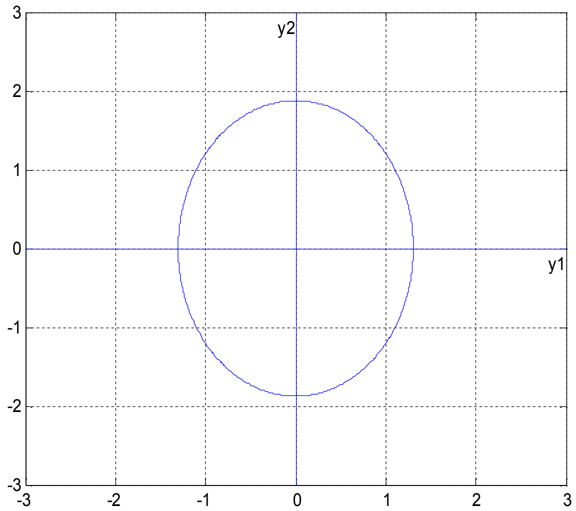

Рис.2. Область управляемых состояний для $y(N)$
на плоскости состояний для $N = 6$ при $y(0) = (1\ \ 1)'$ и $J \le 1$

Заключение

Предложенный в статье алгоритм определения оптимального управления дискретной задачи оптимального управления при ограниченной энергии позволяет разработать прикладных программ для дискретной задачи оптимального управления, и будут использованы при проектировании линейного регулятора с конечным интервалом времени.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением [Текст] / Н.Н.Красовский. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами [Текст] / Ю.Н.Андреев. - Москва: Наука, 1976.- 424 с.

3. Егоров А.И. Оптимальное управление линейными системами [Текст] / А.И.Егоров. - Киев: Выща школа, 1988. - 278 с.

4. Иманалиев З.К. Управление с минимальной энергией в дискретной задаче оптимального управления с малым шагом [Текст] / З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев, А.М. Осмонканов // Тр. научно-практ. конф. «Информационные технологии в Азии: состояние, проблемы и перспективы ITPA-2014» /// Вестник КГУСТА им. Н. Исанова, №2 (44). – Бишкек, 2014. С. 138 -141.