

УДК 624.131.5:681.142.2 (045) (575.2) (04)

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ГРУНТА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г.С. Исаева – канд. физ.-мат. наук,
З.С. Шамбетов – канд. физ.-мат. наук

The program of the plain dynamic clay soil motion simulation is made which based on the various soft soil models. It can take into account the unstable boundary conditions and internal parameters of the soil. The test simulation of ground dam was provided and the results of calculations show the excellent agreement with the results of stationary case results.

Введение. Горные склоны Кыргызстана представлены в основном глиной, поэтому периодически, особенно в весенний период, здесь активизируются оползневые процессы. Катастрофические последствия оползневых явлений можно значительно уменьшить за счет прогнозирования их схода путем математического моделирования лавиноопасных участков. Существующие теоретические модели движения грунтовых массивов позволяют моделировать поведение грунтовых склонов в зависимости от изменяющихся свойств ползучести и пластичности грунта и прогнозировать катастрофические явления оползневого характера.

Математические уравнения и алгоритм. На основе компьютерной программы [3, 4] расчета НДС массива горных пород разработана и создана программа для описания процессов нестационарного движения грунтовых масс. Были использованы математические уравнения [1, 2], которые решаются методом конечных элементов. Рассмотрена плоская задача. Описание процесса движения грунта происходит в переменных скоростей смещения – U, V . Если для стационарного описания НДС массива в качестве основных переменных рассматриваются смещения, то для нестационарного описания – производные по времени от смещений. Из

уравнений, связывающих деформации и смещения, следуют уравнения, связывающие скорости тензора деформаций со скоростями смещений [5].

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x}, & \dot{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

Производные тензоров напряжений по времени выражаются как:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_x &= K(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy}) + G(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy}), \\ \dot{\sigma}_y &= K(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy}) + G(\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{xx}), \\ \dot{\tau}_{xy} &= 2G\dot{\epsilon}_{xy}.\end{aligned}\quad (2)$$

Коэффициенты K, G представляют собой объемный и сдвиговой модули упругости среды соответственно. Для компонентов тензора напряжений на новом шаге по времени справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_x^t &= \sigma_x^0 + \dot{\sigma}_x \cdot \Delta t, \\ \sigma_y^t &= \sigma_y^0 + \dot{\sigma}_y \cdot \Delta t, \\ \tau_{xy}^t &= \tau_{xy}^0 + \dot{\tau}_{xy} \cdot \Delta t.\end{aligned}\quad (3)$$

Верхними индексами t и 0 обозначены величины в различные последующие моменты

времени, разделенные промежутком в Δt . Используя уравнения равновесия для среды.

$$\begin{aligned} \rho \frac{dU}{dt} + kU &= F_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{dV}{dt} + kV &= F_y - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

можно выразить скорости смещений U, V для следующего шага по времени. В уравнениях (4) приняты следующие обозначения: ρ – объемная плотность грунта, k – коэффициент трения. Величины F_x, F_y представляют собой компоненты объемных сил, к примеру сила тяжести $F_y = -\rho g$.

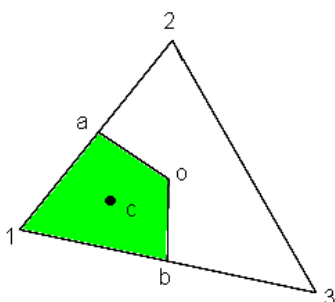


Рис 1. Треугольный элемент и область интегрирования уравнений (4)

Для преобразования уравнений движения для сплошной среды (4) в пригодный для численной реализации вид необходимо провести процедуру интегрирования этих уравнений на конечном треугольном элементе (на рис. 1 область интегрирования закрашена). В результате интегрирования уравнения движения (4) для численной реализации приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{S_1}{6} (4U_1^t + U_2^t + U_3^t) + \Delta t k \frac{S_1}{6} (4\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3) &= \\ = \rho \frac{S_1}{6} (4U_1^0 + U_2^0 + U_3^0) + \\ + \Delta t \left[F_x S_1 + \sigma_x \frac{y_3 - y_2}{2} - \tau_{xy} \frac{x_3 - x_2}{2} \right], & \quad (5) \\ \rho \frac{S_1}{6} (4V_1^t + V_2^t + V_3^t) + \Delta t k \frac{S_1}{6} (4\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3) &= \\ = \rho \frac{S_1}{6} (4V_1^0 + V_2^0 + V_3^0) + \\ + \Delta t \left[F_y S_1 + \tau_{xy} \frac{y_3 - y_2}{2} - \sigma_y \frac{x_3 - x_2}{2} \right]. \end{aligned}$$

При проведении интегрирования по всем треугольным элементам получим систему

уравнений относительно скоростей смещений U, V . Число уравнений равно числу точек вершин треугольных элементов, или числу узлов, увеличенному вдвое, поскольку в каждом узле присутствует две компоненты скорости перемещений.

В левой части уравнений (5) содержатся члены со средними значениями скоростей смещений \bar{U}, \bar{V} , которые будут различными в зависимости от применяемой схемы расчета: явной, неявной или промежуточной. В настоящей работе полностью применяется неявная схема, а вместо указанных скоростей смещений – скорость на искомом моменте времени: U^t, V^t .

Сформулируем этапы расчетных процедур для исследования динамики массива грунта. Пусть известны скорости перемещений U^0, V^0 в некоторый момент времени t_0 . Задаем некоторый шаг во времени Δt , в общем случае – это переменная величина. Нам необходимо найти значения скорости перемещений в следующий момент времени $t = t_0 + \Delta t$. Из (2) определяем скорости тензора напряжений $\dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, \dot{\tau}_{xy}$ для каждого треугольного элемента. Вслед за этим находим сами тензоры напряжений с помощью соотношений (3).

Следующий этап определения скоростей смещений состоит из нескольких независимых задач, представляющих собой:

- составление уравнений (5) для каждого элемента;
- составление системы уравнений путем соответствующего суммирования уравнений (5) для каждого узла расчетной сетки треугольных элементов;
- решение полученной линейной системы уравнений.

Решая систему уравнений, находим значения скоростей смещений в следующий момент времени $t = t_0 + \Delta t$, тем самым, завершая расчетный цикл. При необходимости, вышеуказанный цикл процедур повторяется вновь до достижения необходимого конечного пункта.

Граничные условия. Для нестационарных уравнений условия могут зависеть от времени. Имеется два вида граничных условий:

значения на границе скорости перемещений и производные от нее.

Таким образом, на границе могут быть заданы следующие условия:

- 1) значения $U(l,t)$, $V(l,t)$ – это компоненты скоростей перемещений, зависящие от времени и местоположения на границе;
- 2) компоненты напряжений $\sigma_n(t)$, $\sigma_\tau(t)$ – нормальная и тангенциальная, зависящие от времени.

Когда заданы скорости смещений либо сами смещения для граничных точек расчетной области, нет необходимости решать уравнения для этих точек. Во втором случае граничные точки расчетной области входят в сферу поиска и для компонент смещений в этих точках составляются уравнения, которые входят в общую систему уравнений. Граничные условия в данном случае выглядят так:

$$\begin{aligned} P_x &= \sigma_\tau \frac{x_2 - x_1}{2} - \sigma_n \frac{y_2 - y_1}{2}, \\ P_y &= \sigma_\tau \frac{y_2 - y_1}{2} + \sigma_n \frac{x_2 - x_1}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Дополнительные члены P_x , P_y входят в правые части уравнений (5) и представляют собой дополнительные слагаемые компоненты поверхностных сил. В системе уравнений они вносят вклад в виде свободных членов уравнений.

Примеры расчетов. Для тестирования созданной программы расчета нестационарного движения массива грунта были проведены расчеты, где в качестве нестационарного компонента принималось равномерное возникновение силы тяжести от нулевого значения до номинального за определенный промежуток времени. Результаты расчета сравнивали с результатами, полученными для стационарного случая по ранее созданной программе [3, 4].

Исследованный объект представляет собой трапециевидную плотину с основанием 100 м и высотой 25 м (рис. 2). Верхний гребень расположен в интервале между 40 и 60 м. Плотность материала плотины $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$. Модуль упругости – $E = 1000 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона – $\nu = 0,25$. Ускорение свободного падения g , нарастало в течение одной секунды до номинального значения $g=9,8 \text{ м/с}$. Элементная сетка использовалась как для стационарного, так и для нестационарного случая одна и та же, что позволило исключить влияние самого сеточного представления расчетной области на результаты.

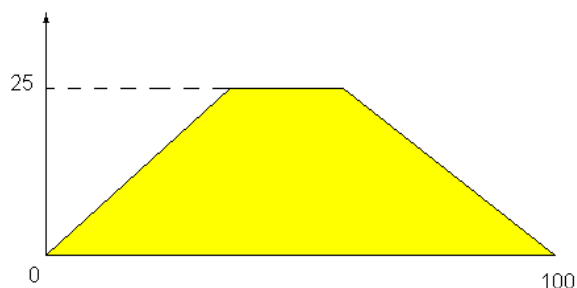


Рис. 2. Объект, подвергнутый исследованию

Граничные условия: на основании плотины были заданы значения смещений в стационарной задаче и значения скоростей смещений в нестационарной, равные нулевым. На остальных границах заданы значения напряжений равные нулевой величине.

В таблицах 1, 2 приведены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта (рис. 2) двумя программами.

Как видно из табл. 1, 2 результаты расчета напряженно-деформированного состояния плотины по нестационарному асимптотическому методу и стационарному методу согласуются между собой.

Таблица 1

Сравнение компонент тензора напряжений, МПа

Программа расчета динамики грунта методом конечных элементов

Xc	Yc	Стационар			Асимптотика			Относит. ошибка в %		
		Sx	Sy	Txy	Sx	Sy	Txy	для Sx	для Sy	для Txy
18,33	9,38	-0,03043	-0,04664	-0,02282	-0,03043	-0,04664	-0,02282	0,0	0,0	0,0
25,00	13,54	-0,04291	-0,09584	-0,03102	-0,04291	-0,09584	-0,03102	0,0	0,0	0,0
31,67	13,54	-0,02311	-0,11934	-0,01538	-0,02311	-0,11934	-0,01538	0,0	0,0	0,0
36,67	18,75	-0,03581	-0,12254	-0,02212	-0,03581	-0,12254	-0,02212	0,0	0,0	0,0
18,33	5,21	-0,06353	-0,21097	-0,04986	-0,06353	-0,21098	-0,04986	0,0	0,00474	0,0
28,33	3,13	-0,08513	-0,25539	-0,02233	-0,08513	-0,25539	-0,02233	0,0	0,0	0,0
35,00	7,29	-0,07712	-0,31198	-0,0201	-0,07712	-0,31198	-0,0201	0,0	0,0	0,0
43,33	16,67	-0,01267	-0,11482	-0,00186	-0,01267	-0,11482	-0,00186	0,0	0,0	0,0
46,67	20,83	-0,03709	-0,11367	-0,00495	-0,03709	-0,11367	-0,00495	0,0	0,0	0,0
53,33	16,67	-0,01873	-0,10756	0,00905	-0,01873	-0,10756	0,00905	0,0	0,0	0,0
56,67	20,83	-0,0338	-0,08807	0,01407	-0,0338	-0,08807	0,01407	0,0	0,0	0,0
46,67	8,33	-0,08417	-0,32932	-0,00555	-0,08417	-0,32932	-0,00555	0,0	0,0	0,0
56,67	8,33	-0,08465	-0,30532	0,01793	-0,08465	-0,30532	0,01793	0,0	0,0	0,0
63,33	18,75	-0,02731	-0,08591	0,01111	-0,02731	-0,08591	0,01111	0,0	0,0	0,0
68,33	13,54	-0,02553	-0,11262	0,0111	-0,02553	-0,11262	0,0111	0,0	0,0	0,0
81,67	9,38	-0,02964	-0,0463	0,02108	-0,02964	-0,0463	0,02108	0,0	0,0	0,0
65,00	7,29	-0,0768	-0,3027	0,01935	-0,0768	-0,3027	0,01935	0,0	0,0	0,0
71,67	3,13	-0,08353	-0,25058	0,02107	-0,08353	-0,25058	0,02107	0,0	0,0	0,0
90,00	2,08	-0,02922	-0,08766	0,02687	-0,02922	-0,08766	0,02687	0,0	0,0	0,0

Таблица 2

Сравнение смещений, мм

x	y	Стационар		Асимптотика		Относит. ошибка, %	
		U	V	U	V	$\Delta U/U$	$\Delta V/V$
20	12,5	-0,334	-1,625	-0,334	-1,625	0	6,152E-05
30	18,8	-0,16	-3,321	-0,16	-3,321	0	6,023E-05
40	25	-0,033	-4,651	-0,033	-4,651	0	2,15E-05
10	6,25	-0,434	-0,458	-0,434	-0,458	0	0,0005022
25	9,38	-0,523	-1,995	-0,523	-1,995	0	0,0001002
40	12,5	-0,194	-3,355	-0,194	-3,355	0	5,962E-05
50	25	-0,025	-4,718	-0,025	-4,718	0	4,239E-05
60	25	-0,067	-4,147	-0,067	-4,147	0,00015	4,822E-05
50	12,5	0,046	-3,53	0,046	-3,53	0	5,665E-05
60	12,5	0,2065	-3,247	0,2065	-3,247	0	3,08E-05
70	18,8	0,0823	-3,201	0,0823	-3,201	0,00012	3,124E-05
80	12,5	0,3014	-1,6	0,3014	-1,6	0	6,252E-05
75	9,38	0,4938	-1,958	0,4938	-1,958	2E-05	0,0001022
90	6,25	0,4199	-0,457	0,4199	-0,457	0	0,0004819

На основании изложенного можно сделать следующие выводы.

Программа расчета нестационарного движения массива грунта, разработанная на основе

метода конечных элементов, позволяет учесть пластические перемещения соответственно различным реологическим моделям грунта.

Результаты тестовых расчетов напряженно-деформированного состояния плотины по разработанной программе и при сравнении с результатами расчета по программе для стационарного случая [4] дали высокую согласованность результатов.

Литература

1. *Зарецкий Ю.К., Ломбардо В.Н.* Статика и динамика грунтовых плотин. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 256 с.
2. *Зарецкий Ю.К.* Лекции по современной механике грунтов. – Ростов: Изд-во Ростовск. ун-та, 1989. – 608 с.
3. *Исаева Г.С., Шамбетов З.С.* Методика моделирования напряженно-деформированного состояния массива горных пород с учетом остаточных напряжений на основе метода конечных элементов // Вестн. КНУ. – Бишкек, 2005. – Сер. 6. – Вып. 5. – С. 68–78.
4. *Исаева Г.С., Чунуев И.К., Шамбетов З.С.* Программа расчета напряженно-деформированного состояния массива горных пород на основе метода конечных элементов // Наука и новые технологии. – Бишкек: Кыргызпатент, 2005. – № 2. – С. 82–91.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 244 с.