УСАРОВ А.С., РАХМАНБЕРДИЕВ С.,
МАМАТКАЛИЛ КЫЗЫ Г.,КАДЫШЕВ С.К.,
[1]ОшМУ, Ош ш., [2]КУУ

ДИФРАКЦИЯ МАСЕЛЕЛЕРИНИН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИ

Азыркы убакытта прикладдык математика боюнча мыкты адистерди даярдоодо бирден-бир көйгөйлүү маселе бул технология жана математикалык моделдештирүү болуп эсептелет. Азырынча математикалык моделдештирүүнүн ыкмаларын окутуу жеткиликтүү деңгээлге жете элек, ошондуктан окутуу үчүн жогорку курстардын студенттерин тиешелүү окуу куралдары менен камсыз кылуу орчундуу маселе.

Мейкиндикте толук электромагниттик талааны аныктоо үчүн Максвелл тендемелеринин системасын чыгаруу зарыл, б.а. алты скалярдык функцияны аныктоо керек, алар Е жана Н векторлорунун компоненттери болуп эсептелет. Мурдагы жумуштарда көрсөтүлгөндөй [1,2,3] Максвелл тендемелеринин системасы экинчи тартиптеги бир гана тендемеге, Е жана Н векторлоруна салыштырмалуу келтирсе болот. Ошондуктан маселе үч скалярдык функцияны аныктоого келтирилет.

Электродинамика боюнча бар болгон көптөгөн колдонмо жана адабияттарга салыштырмалуу дифракция теориясынын теңдемелери жана чекиттик шартта дал келген функционалдуу мейкиндикте аныктоочу оператор шарт катары каралган. Функциялардын классы изилденген, б.а. шарттардын аткарылышын камсыз кылган, чексиздикте жана беттердин кырынын жана четтеринин жанында. Ошондой эле чектик маселелердин чыгарылышынын теоремасы бар экендиги келтирилген.

Көпчүлүк учурда ыңгайлуу, эгерде электромагниттик потенциал деген жардамчы функция киргизилсе, ал аркылуу белгилүү денгээлде электромагниттик талаа мааниге ээ болот.

Е жана Н векторлору Максвелл тендемелеринин толук системасын канааттандырат дейли:

$$rotH = \frac{\partial D}{\partial t} + j + j^{(cm)}; \qquad (1)$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (2)$$

$$divD = \rho \qquad (3)$$

$$divB = 0 \qquad (4)$$

$div\ (\mu H) = 0$ болгондуктан, кандайдыр вектордук функция - А жашайт, ошондуктан

$$H = \frac{1}{\mu} rotA \qquad (5)$$

(5) тендемени (2) - тендемеге коюп, төмөнкү тендемени алабыз:

$$rot\left\{E + \frac{\partial A}{\partial t}\right\} = 0$$

Ошондой эле, φ - деген скалярдык функция жашайт, анткени

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - grad\,\varphi \qquad (6)$$

Ошентип, ар кандай электромагниттик талаа $\{E, H\}$ төмөнкү функциялар аркылуу берилсе болот: $A(M,t)$ жана $\varphi(M,t)$. Вектордук потенциал деп $A(M,t)$ функция аталат, ал эми $\varphi(M,t)$ - скалярдык потенциал. Ал эми (5) жана (6)-ны калган эки Максвеллдин тендемесине коюп А жана φ функциялары кандай тендемелерди канааттандыраарын аныктайбыз. Бардык калган учурларда $j = \sigma E$ деп эсептейбиз. Ошентип (5) жана (6) - ны (1) - жана (3)кө коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$rotrotA = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial A}{\partial t} = -\mu grad\left\{\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sigma\varphi\right\} + \mu^{(cm)} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} divA + \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (8)$$

Демек ар кандай электромагниттик талаа $\{E, H\}$ (5) жана (6) формулалар менен көрсөтүлүшү мүмкүн, эгерде вектордук потенциал А жана скалярдык потенциал φ аркылуу туюнтулса, алар, (7) жана (8) тендемелерин канааттандырат.

Ошондой эле тескерисинче, эгерде А жана φ (7) жана (8) тендемелерин канааттандырган эркин функциялар болсун. Анда $\{E, H\}$ векторлору (1) жана (2) формулалар менен туюунтулган Максвелл тендемелерин канааттандырат, б.а. электромагниттик талааны мүнөздөйт. Жогоруда айтылгандардан көрүнүп тургандай (1) жана (2) формулалар менен туюунтулган Е жана Н векторлору электромагниттик талааны мүнөздөсө, анда керектүү жана жеткиликтүү болот, эгерде А жана φ функциялары (7) жана (8) тендемелерин канааттандырса.

Белгилеп кетсек, вектордук потенциал А жана скалярдык потенциал φ, берилген электромагниттик талаада бирдей мааниде аныкталбайт. (1) тендемеден көрүнүп тургандай магниттик талаа Н өзгөрбөйт, эгерде А векторунун ордуна төмөнкү векторду алсак:

$$A' = A + grad\psi.$$

Бул учурда электр талаасы да өзгөрбөшү үчүн, φ-функциясынын ордуна төмөнкү функцияны колдонобуз:

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Бул учурда $H = \frac{1}{\mu} rotA'$, $E = -\frac{\partial A'}{\partial t} - grad\varphi'$ жана функция A' жана φ', (7) жана (8) теңдемелерин канааттандырат, бул учурду текшерип көрсө болот.

Бирдей мааниде аныкталбаган вектордук потенциалга А жана скалярдык потенциалга φ кээ бир кошумча шарттарды коюга мүмкүнчүлүк түзүлөт, жана алар (7) жана (8) теңдемелерди жөнөкөйлөнткөнгө мүмкүнчүлүк түзөт. Мындай шарттар төмөнкү көрүнүштө жазылат да Лоренц шарты деп аталат (же градиенттик инварианттыгынын шарты):

$$divA + \varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sigma\mu\varphi = 0 \qquad (9)$$

Бул (9) шартта (7) жана (8) теңдемелери төмөнкү көрүнүшкө ээ болот:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla^2 A = \mu j^{\text{ст}}; \qquad (10)$$

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon}\ , \qquad (11)$$

Бул жерде $\nabla^2 A = grad\, divA - rot\, rotA$. Лоренц шарты бирдей мааниде аныкталбаган А жана φ функцияларын жоготпойт, бирок эркин функция ψ төмөнкү теңдемени канааттандырышын талап кылат:

$$\varepsilon\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi = 0$$

А жана φ ни бири-бири менен байланыштырсак болот жана аларды бир вектор аркылуу мүнөздөсөк болот, бирок бул учурда (9), (10) жана (11) аткарылышы керек. Лоренц шарты (9) "айтып тургандай" бул учурду аткарсак болот, эгерде төмөнкүдөй эсептесек:

$$\varphi = -div\Pi \qquad (12)$$

Бул жерде П - кээ бир вектор. П вектору (12) шартты канааттандыруучу болуп ар дайым жашайт. Ал эми (9)-шарт аткарылат, эгерде

$$A = \varepsilon\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} + \sigma\mu H \qquad (13)$$

А жана φ функциялары мындай көрүнүштөгү берилишинде (10) жана (11) катыштары карама-каршы болбостугун текшерип көрүү керек. (12) жана (13) теңдемелерин (10) жана (11) теңдемелерине коюп төмөнкүнү алабыз:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} - \nabla^2\Pi\right\} + \sigma\mu\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2} + \sigma\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t} - \nabla^2\Pi\right\} = \mu j^{(\text{ст})} \qquad (14)$$

$$div\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t}-\nabla^2\Pi\right\}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\quad, \qquad (15)$$

Бул учурда заряддардын сакталуу закону аткарылат да төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ болот:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho+divj^{(ст)}-0$$

(14) жана (15)- теңдемелер карама-каршы эмес жана алар бири-биринен келип чыгат. П вектору болсо <u>поляризациялык потенциал</u> же Герц вектору (электрдик Герц вектору) деп аталат.

Ошентип ар кандай элекиромагниттик талааны Герцтин П вектору аркылуу көрсөтсө болот:

$$E=\ \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}=\ \sigma\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t}+grad\ div\Pi; \qquad (16)$$

$$H=\varepsilon\,rot\frac{\partial\Pi}{\partial t}+\sigma\,rot\Pi \qquad (17)$$

Герц вектору да бирдей мааниде аныкталбайт. (14) жана (15) катыштарды башка формада да жазса болот. Мейли $F(M,t)=\ \varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}+\ \sigma\mu\frac{\partial\Pi}{\partial t}-\nabla^2\Pi$

(14), (15) катыштардан келип чыгат, бул $F(M,t)$вектору төмөнкү теңдеменин чыгарылышы болуп эсептелет:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}F=\frac{j^{(ст)}}{\varepsilon} \qquad (18)$$

баштапкы шарт боюнча, төмөнкү шартты канааттандыруучу

$divF+\frac{\rho}{\varepsilon}/_{t=0}=0$. Эгерде, заряддардын сакталуу закону орун алат десек, анда F- үчүн теңдемени мындай алсак болот $divF=-\frac{\rho}{\varepsilon}$, (15) катыш менен дал келүүчү. Ал эми (18) теңдеме анык чыгарылышты киргизет:

$$F(M,t)=F/_{t=0}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t j^{(ст)}(\mathrm{M},\tau)\,e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}(t-\tau)}d\tau$$

Эми өзүнчө жекече өткөрбөөчү чөйрөнү карайбыз $(\sigma=0)$. Бул үчүн (18) дин негизинде төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}j^{(ст.)}.$$

Төмөнкү катыштын жардамында поляризация векторун киргизсек:

$$j^{(ст.)}=\frac{\partial\mathrm{P}_0}{\partial\iota}$$

анда вектор F кошулмага чейинки тактыкта, убакыттан көз каранды болбогон, поляризация вектору менен дал келет. $F=\frac{1}{\varepsilon}P_0$ (кошулма, убакыттан көз каранды болбогон, анда аны нөлгө барабар деп эсептейбиз). Бул жерде Герц вектору П, төмөнкү теңдемени канааттандырат:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}-\nabla^2\Pi=\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{P}_0 \qquad (19)$$

ал эми электромагниттик талаа (E,H) болсо, бул боюнча төмөнкү көрүнүшкө ээ болот:

$$E=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}+grad\,div\Pi=rot\,rot\Pi-\frac{1}{\varepsilon}P_0; \qquad (20)$$

$$H=\varepsilon\,rot\frac{\partial\Pi}{\partial t} \qquad (21)$$

Өткөрбөөчү чөйрө үчүн $(\sigma=0)$ кеңири Герц вектору кандай берилгенин карап көрөбүз. (20) жана (21) теңдемелерден көрүнүп тургандай электромагниттик талаа өзгөрбөйт, эгерде Герц векторунун ордуна төмөнкү вектор алынса:

$\Pi_1=\Pi=grad\chi,$

бул жерде χ – кээ бир эркин функция. Эгер дагы талап кылсак, χ(M,t) функциясы төмөнкү теңдемени канааттандырсын деп

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\Delta\chi=f(t),$$

бул жерде $f(t)$- убакыттын ар кандай функциясы, анда Π_1-вектору (19) теңдемени канааттандырат, б.а. ошондой эле шарт менен, Герц векторун аныктагандай. Чындыгында,

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial t^2}-\nabla^2\Pi_1=\varepsilon\mu\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}-\Delta\Pi+\varepsilon\mu\, grad\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-grad\, div\, grad\chi=\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{P}_0.$$

Ошентип, Герц вектору, кээ бир функциялардын градиентине чейинки тактыкта аныкталган. Ал эми электромагниттик талааны чыгаруу үчүн Герц векторунун куюндуу бөлүгү гана маанилүү.

Демек, ар кандай электромагниттик талааны вектордук жана скалярдык потенциалдар аркылуу же Герц вектору аркылуу көрсөтсөк болот. Ал төмөнкү теңдеменин негизинде келип чыккан $div\mu H=0$, б.а. магниттик заряддар жок экендигинен, бул эксперименталдык факт. Эгерде Максвелл теңдемелеринде электр заряды жок болсо (ρ = 0), анда жогорудагыдай эле, потенциалдарды төмөнкү теңдеменин негизинде чыгарса болот:

$$div\,\varepsilon E=0 \qquad (22)$$

Бул жерден (22) төмөнкү келип чыгат:

$$E=\frac{1}{\varepsilon}rotA^* \qquad (23)$$

Анткени ρ = 0, анда заряддардын сакталуусу төмөндөгүдөй болот:

$$divj^{(\text{ст})}=0$$

Демек ток векторун $j^{(\text{ст})}$ төмөндөгүдөй көрсөтсөк болот

$$j^{(\text{ст})}=rotj^*, \qquad (24)$$

Вектор j^* бирдей мааниде аныкталбайт жана, жекече учурда $divj^{(*)}$ деп эркин берилиши мүмкүн. (23) жана (24) теңдемеге коюп

$$rotH=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}+\sigma E+j^{(\text{ст.})},$$

муну алабыз: $H=\frac{\partial A^*}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}A^*+j^*-grad\text{т}\,\varphi^*$ (25)

Ал эми (23) жана (25) теңдемелерин Максвеллдин калган эки теңдемесине коюу менен A^* жана φ^* канаттандыра турган төмөнкү теңдемеге келебиз:

$$rot\,rotA^*+\varepsilon\mu\frac{\partial^2A^*}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\ A^*}{\partial t}-\varepsilon\mu\, grad\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}=-\varepsilon\mu\frac{dj^*}{\partial t}; \qquad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}divA^*+\frac{\sigma}{\varepsilon}divA^*+divj^*-\Delta\varphi^*=0 \qquad (27)$$

j^* аныктоодогу өз башымчылыктан пайдаланабыз жана төмөнкүдөй деп эсептейбиз $divj^*=0$.

Потенциалдар, A^* жана φ^*-да бирдей мааниде аныкталбаган (А жана φ потенциалдарына окшош). Аларды төмөнкү шартка багындырабыз

$$\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}=divA^* \qquad (29)$$

Бул шарт, градиенттик инварианттын шарты деп аталат же Лоренцтин шарты. (27) – ни эске алып, A^* жана φ^* - лер үчүн төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2A^*}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\ A^*}{\partial t}-\nabla^2A^*=-\varepsilon\mu\frac{\partial j^*}{\partial t}; \qquad (30)$$

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial\ \varphi^*}{\partial t}-\nabla^2\varphi^*=0 \qquad (31)$$

Ошентип, ρ=0 учурда, ар кандай электромагниттик талаа, потенциалдар A^* жана φ^* аркылуу туюнтулушу мүмкүн.

Эми, төмөнкү катышуу аркылуу Герц магниттик векторун киргизебиз,

$$\varphi^*=-div\Pi^*,$$

(29) – дан корүнүп тургандай A^*- ны төмөнкүдөй көрүнүштө алсак болот:

$$A^*=-\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t},$$

Анда теңдемелер (30) жана (31) тиешелүү көрүнүшкө ээ болот:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial \Pi^*}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial \Pi^*}{\partial t}-\nabla^2\ \Pi^*\right\}=\frac{\partial j^*}{\partial t}; \qquad (32)$$

$$div\left\{\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial \Pi^*}{\partial t}-\nabla^2\ \Pi^*\right\}=0 \qquad (33)$$

(33) теңдемени жазууда $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathrm{B}=0$ учур эске алынган.

Жогоруда белгиленгендей вектор j^* бир мааниде аныкталбаган, ошондуктан төмөнгүдөй кабыл алсак болот:

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial t^2}+\sigma\mu\frac{\partial \Pi^*}{\partial t}-\nabla^2\Pi^*=j^* \qquad (34)$$

Бул учурда (34) - дөн, (32) жана (33) келип чыгат. Демек ρ = 0 болгондо ар кандай электромагниттик талааны Герц магниттик вектору Π^* аркылуу көрсөтсө болот.

$$E=-\mu\, rot\frac{\partial \Pi^*}{\partial t},$$

$$H=-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial t^2}-\sigma\mu\frac{\partial \Pi^*}{\partial t}+grad\ div\Pi^*+j^*=rot\,rot\Pi^*,$$

анан да Π^* вектору, (34) теңдемени канаатандырат. Ал эми өткөрбөөчү чөйрө үчүн (σ ≠ 0) учурду, биз атайын карабайбыз.

Бирок, белгилеп кетсек A^* жана φ^* потенциалдарын жана Герц векторун

ρ ≠ 0 учур үчүн чыгарсак болот. Ал үчүн алдын ала төмөнкү алмашууларды аткарабыз: $E=\mathcal{E}+j_в$, бул жерде $j_в$ - вектору,

$$div\ \varepsilon\, j_в=\rho \qquad (35)$$

теңдемесин канаттандырат. Анда Максвелл теңдемеси төмөнкүгө ээ болот:

$$rotH=\varepsilon\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}+\sigma\varepsilon+J$$

$$rot\mathcal{E}=-\mu\frac{\partial H}{\partial t}+j_m,$$

ал эми $div\ \varepsilon\mathcal{E}=0, div\ \mu H=0,$

$$J=\varepsilon\frac{\partial j_в}{\partial t}+\sigma j_в+j^{(ст)},$$

$$j_m=rotj_в$$

Вектор $j_в$ (35) теңдемеси менен бирге бир маанилүү эмес аныкталган, ошондуктан көпчүлүк учурда аны кошумча шартка $rotj_в=0$ – багындырышат. Бирок кээ бир атайын учурларда ыңгайлуу болот, эгерде магниттик ток $j_m=rotj_в$ демек, нөлдөн айырмалуу болгон. Эми талаа $\{\mathcal{E},H\}$ – ны потенциалдар аркылуу туюнтсак мүмкүн же магниттик Герц вектору аркылуу, жогоруда аткарылгандай.

Ал эми калыптанган гармоникалык термелүүлөр үчүн биз кийинки жумуштарда кайрылабыз.

Адабияттар

1. Усаров А.С., Курбаналиев М.Б. Технология решения задач электростатики // Вестник КНУ имени Ж.Баласагына. – 2013. - №3. – с. 192 – 198.
2. Кадышев С.К., Усаров А.С. Методы решения задач электростатики // Вестник КНУ имени Ж.Баласагына. – 2014. – спец.выпуск, серия естественно технические науки с. – 222. – 225.
3. Усаров А.С. Дифракция маселелеринин математикалык модели // Ош мамлекеттик университетинин жарчысы. – 2013. - №2. в.ш. – с. 146 – 153.