

УДК 627.43 (575.2) (04)

**ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ  
ФРАГМЕНТА ПЛОТИНЫ ТОКТОГУЛЬСКОЙ ГЭС**

*А.А. Землянский* – канд. физ.-мат. наук, доц.

In work, on the basis of creation and qualification of the phase portrait of special points of investigated dynamic system fixing bifurcational zones and their level is offered.

Наличие поля значений скоростей ста точек (10x10) каждого из семи фрагментов плотины дает возможность исследовать координаты вектора скорости  $U(u,v)$ ,  $V(u,v)$  обозначают вертикальную и горизонтальную скорость точек исследуемого фрагмента плотины.

Рассмотрим первый фрагмент (уровень 710G). Даны проекции поля скоростей на оси координат  $U$ ,  $V$  скоростей точек первого фрагмента плотины.

*Таблица 1*

Проекция скоростей точек на ось  $U$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.11	0.122	0.134	0.146	0.158	0.17	0.182	0.194	0.206	0.218
2	0.05	0.074	0.098	0.122	0.146	0.17	0.194	0.218	0.242	0.266
3	0.091	0.127	0.163	0.199	0.235	0.271	0.307	0.343	0.379	0.415
4	0.16	0.208	0.256	0.304	0.352	0.4	0.448	0.496	0.544	0.592
5	0.25	0.31	0.37	0.43	0.49	0.55	0.61	0.67	0.73	0.79
6	0.36	0.432	0.504	0.576	0.648	0.72	0.792	0.864	0.936	1.008
7	0.49	0.574	0.658	0.742	0.826	0.91	0.994	1.078	1.162	1.246
8	0.64	0.736	0.832	0.928	1.024	1.12	1.216	1.312	1.408	1.504
9	0.81	0.918	1.026	1.134	1.242	1.35	1.458	1.566	1.674	1.782

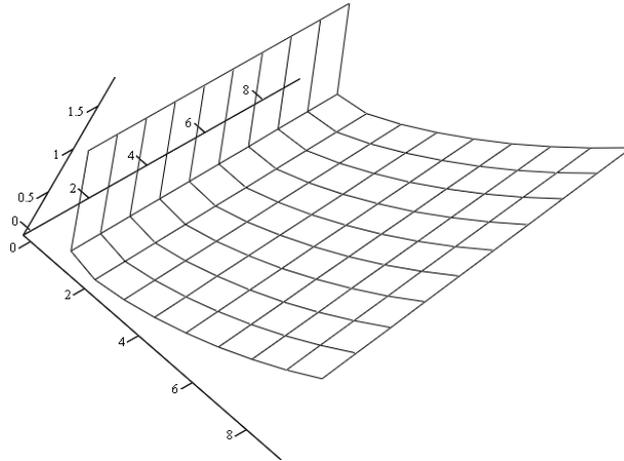


Рис. 1. Проекция скоростей точек на ось U.

Таблица 2

Проекция скоростей точек на ось V

	0	1	2	3	4
0	1	1.1	1.4	1.9	2.6
1	0.3	1.2	2.3	3.6	5.1
2	0.09	1.79	3.69	5.79	8.09
3	0.027	2.527	5.227	8.127	11.227
4	$8.1 \cdot 10^{-3}$	3.308	6.808	10.508	14.408
5	$2.43 \cdot 10^{-3}$	4.102	8.402	12.902	17.602
6	$7.29 \cdot 10^{-4}$	4.901	10.001	15.301	20.801
7	$2.187 \cdot 10^{-4}$	5.7	11.6	17.7	24
8	$6.561 \cdot 10^{-5}$	6.5	13.2	20.1	27.2
9	$1.968 \cdot 10^{-5}$	7.3	14.8	22.5	30.4

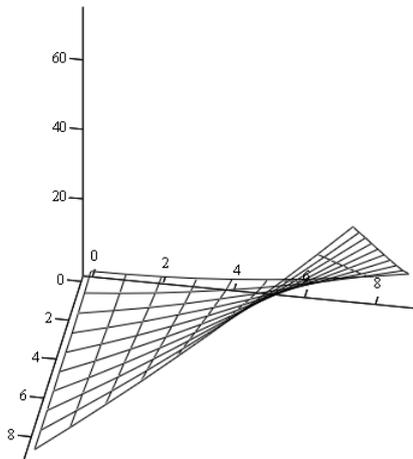


Рис. 2. Проекция скоростей точек на ось V.

Требуется получить фазовые портреты, определяющие наличие переходных процессов. Функции двух переменных  $U(u,v)$ ,  $V(u,v)$ , аппроксимированные кубическим сплайном, определяют координаты вектора скорости:

$$U(u,v) = 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u \quad V(u,v) = 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u. \quad (1)$$

Запишем два уравнения, которые определяют динамическую систему исследуемого поля скоростей точек первого фрагмента плотины:

$$\frac{d}{dt}u := 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u \quad \frac{d}{dt}v := 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u \quad (2)$$

*Постановка задачи*

Требуется исследовать полученную динамическую систему (2):

$$\frac{d}{dt}u := 0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u \quad \frac{d}{dt}v := 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u \quad (3)$$

Запишем систему уравнений [1] для определения стационарных точек:

$$0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u = 0 \quad 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u = 0 \quad (4)$$

Находим приближенное решение системы нелинейных уравнений (4):

$$\text{Find}(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0467673824068885394 \\ -8.0205801363956174998 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Проверка решения системы нелинейных уравнений

$$u_0 := 1.0467673824068885394 \quad v_0 := -8.0205801363956174998.$$

$$0.01 \cdot u^2 + 0.012 \cdot u \cdot v + 0.1^u = (0) \quad 0.1 \cdot v^2 + 0.8 \cdot u \cdot v + 0.3^u = (0) \quad (6)$$

Система нелинейных уравнений приближенно решена верно.

Сделаем замену переменной и определим производную  $\frac{dy}{dx}$ :

$$z := \frac{x}{y} \quad y := z \cdot x \quad \frac{d}{dx}y := \frac{d}{dx}x(x) \cdot x + z(x)$$

Решение уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$\left( |y - \alpha_1 \cdot x| \right)^{k_1} \cdot \left( |y - \alpha_2 \cdot x| \right)^{-k_2} \rightarrow \frac{1}{\left( |y - \alpha_1 \cdot x| \right)^{1.9842819034909430389}} \cdot \left( |y - \alpha_2 \cdot x| \right)^{0.9842819034909430389} \quad (7)$$

Введем новую систему координат:

$$\xi := y - \alpha_1 \cdot x \quad \eta := y - \alpha_2 \cdot x \quad \xi^{-k_1} \cdot \eta^{k_2} := \Psi_1 \quad (8)$$

В новой системе координат получаем уравнение:

$$\frac{d}{dx}\xi := \Psi_1 \cdot \xi^{\frac{k_1}{k_2}} \quad (9)$$

Отношение  $k_1, k_2$ :

$$\frac{k_1}{k_2} = 2.016 \quad (10)$$

Первоначальный коэффициент, определяющий семейство интегральных кривых,  $\Psi_1 := 1$ .  
Получаем фазовые портреты в разных квадрантах (рис. 3, 4, табл. 3).

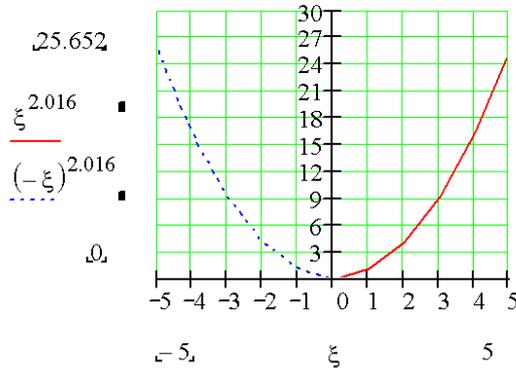


Рис. 3. Фазовый портрет первого квадранта.

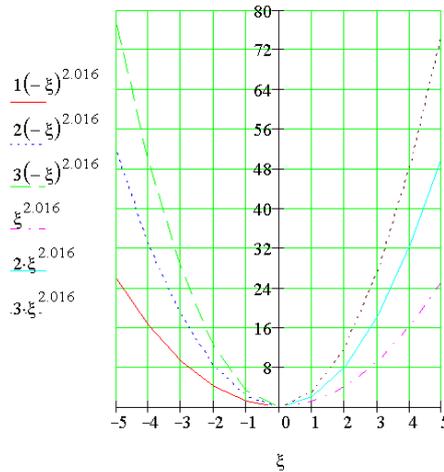


Рис. 4. Фазовый портрет второго квадранта.

Таблица 3

Значения для первого и второго квадрантов:

$$\xi := -5..5$$

$$(-\xi)^{2.016} =$$

	0
0	25.652
1	16.359
2	9.16
3	4.045
4	1
5	0
6	0.999+0.05i
7	4.039+0.203i
8	9.148+0.46i
9	16.338+0.822i
10	25.62+1.289i

$$\xi =$$

-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

$$\xi^{2.016} =$$

	0
0	25.62+1.289i
1	16.338+0.822i
2	9.148+0.46i
3	4.039+0.203i
4	0.999+0.05i
5	0
6	1
7	4.045
8	9.16
9	16.359
10	25.652

**Функция, описывающая фазовый портрет в первом и третьем квадранте.** Получив значение функции [1–3, 6] не только в действительной, но и в комплексной плоскостях, рассматриваем только действительную плоскость (рис. 5–9).

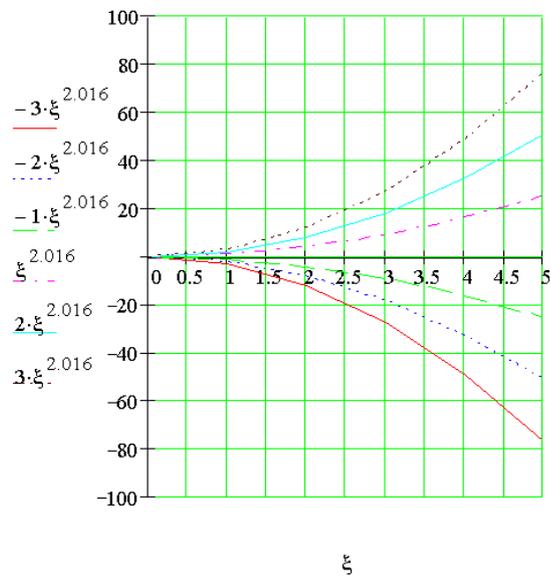


Рис. 5. Фазовый портрет в первом и четвертом квадранте.

Третий и четвертый квадранты при различных значениях коэффициента  $\psi$ :

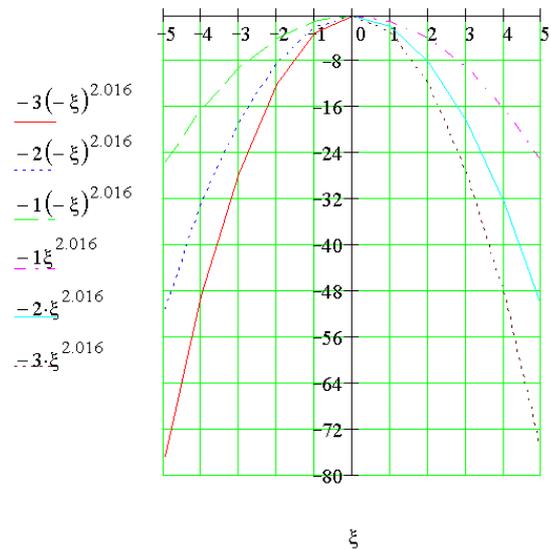


Рис. 6. Фазовый портрет в третьем и четвертом квадранте.

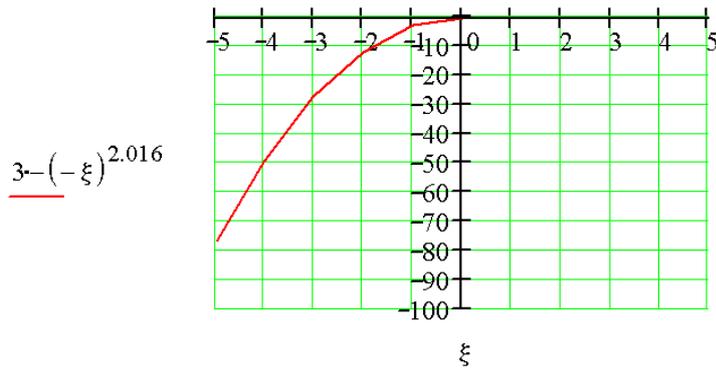


Рис. 7. Фазовый портрет в третьем квадранте.

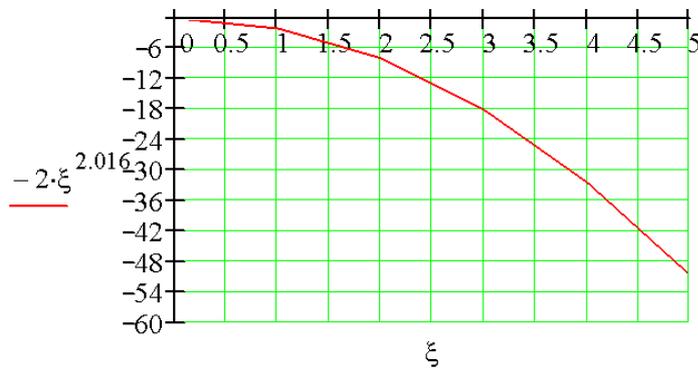


Рис. 8. Фазовый портрет в четвертом квадранте.

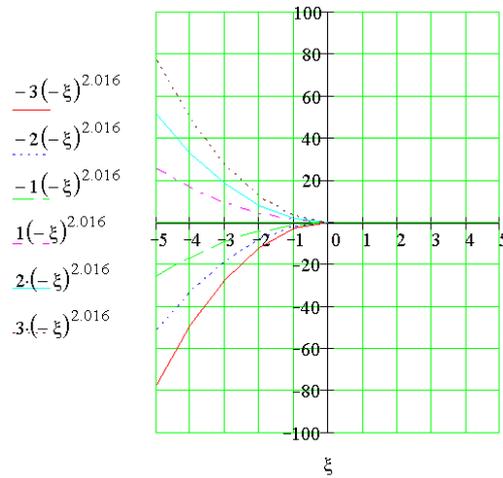


Рис. 9. Фазовый портрет во втором и третьем квадрантах.

Функция, определяющая перемещения точек фазового портрета, формирует вид особой точки [4, 5, 8, 10, 11], неразрывно переходя из октанта в октант через оси криволинейных осей координат. Представление частей фазового портрета в первоначальных прямоугольных координатах приводит к некоторому деформированию значений координат. Это не меняет вида, перехода зависимостей на

границах квадрантов и наличия особой точки. Правильность методики определения степени устойчивости [9] исследуемых точек поверхности нижнего участка (710) плотины подтверждается.

*Литература*

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гос. изд-во тех.-теоретич. лит., 1949. – 550 с.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 384 с.
3. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. – М.: Л.: Гос. изд-во тех.-теоретич. лит., 1950. – 344 с.
4. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
6. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. – М.: Гл. изд. физ.-мат. лит., 1959. – 915 с.
7. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.
8. *Йосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
9. *Себехей В.Дж.* Неустойчивости в динамических системах. – М.: Мир, 1982. – 167 с.
10. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 271 с.
11. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.