МАТЕМАТИКАЛЫК ФИЗИКАНЫН МЕТОДУ КУРСУНДА ГИПЕРБОЛА ТИБИНДЕГИ ТЕҢДЕМЕНИ КАНОНИКАЛЫК ФОРМАГА КЕЛТИРҮҮДӨГҮ ПРОГРАММАНЫ ТҮЗҮҮ

БАКИРОВА Э.М., БАКИРОВА Н.М.,
Ж.Баласагына атындагы КУУ

Математикалык физиканын методу курсу дифференциялдык теңдемелерди каноникалык формага келтирүү менен башталат. Теңдеменин эң жөнөкөй формасы каноникалык форма деп аталат. Теңдемени каноникалык формага келтирүү деп, теңдемени жөнөкөйлөтүү ыкмаларын айтабыз. Дифференциялдык теңдемелер чексиз көп чыгарылыштарга ээ болот. Экинчи тартиптеги жекече туундулу дифференциялдык теңдеме эки каалагандай алынган функциялардан көз каранды.

Жогорку тартиптеги туундуларга карата сызыктуу теңдеме төмөнкүдөй жазылат:

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (1)$$

Бул теңдемеде $u = u(x, y)$ тен көз каранды. Теңдемени чыгарганда маселенин симметриясын эсепке алган декарттык координат системасын колдонуу ыңгайлуу. Жалпы учурда жаңы координат системасы ξ (кси), η (этта) ийри сызыктуу координат системасы болот. Мында бир гана шарт коюлат. Белгисиз функция жаңы координат системасында ξ, η дан көз каранды функция болот.

$$u = u(\xi, \eta) = u(\xi(x, y); \eta(x, y)) \qquad (2)$$

Сызыктуу жекече туундулуу дифференциялдык теңдеменин дискриминанты $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}$.
(3)

Эгерде дискриминант нөлдөн чоң болсо ($D > 0$), анда теңдеме гипербола тибиндеги теңдеме деп аталат.

Дифференциялдык теңдемелер биринчи жекече туундулуу дифференциялдык теңдемени изилдөөчү теңдеме, эки тамырга ээ болот:

$$y' = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}}; \qquad y' = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} \qquad (4)$$

Ушул тендемелерди чыгарып, айкын эмес формада жазсак:

$$C_1 = \varphi(x, y) \qquad C_2 = \psi(x, y) \qquad (5)$$

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad \eta = \psi(x, y) \qquad (6)$$

б.а. маселенин симметриясын толугу менен эсепке алган координат системасын мүнөздөөчү функциялардан түзүлгөн координат системасы болушат.

U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} - туундуларды жарым координат кылып өзгөртүп түзөбүз.

Студенттер үчүн татаал математикалык маселелерди каноникалык формага келтирүү.

Мисалы, гипербола тибиндеги теңдемени канононикалык формага келтирүү төмөнкүчө:

$$U_{xx} - 2U_{xy} - 3U_{yy} = 0. \qquad (*)$$

Бул теңдеме негизинен татаал теңдеме болуп эсептелет.

1-этап: Теңдемеге кирген коэффициенттерди аныктап алышыбыз керек:

$$a_{11} = 1; \qquad a_{12} = -1; \qquad a_{22} = -3$$

2-этап: Дискриминантты эсептөө:

$$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = (-1)^2 - 1 \cdot (-3) = 1 + 3 = 4$$

$D \geq 4 > 0$ гипербола

3-этап: Теңдемеге маанилерин коюу менен тамырларын табуу:

$$y' = \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}}; \qquad y' = \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}}$$

$$y' = \frac{-1 + 2}{1} \qquad y' = \frac{-1 - 2}{1}$$

$$y' = 1 \qquad y' = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{dy}{dx} = -3$$

$dy = dx$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $dy = -3dx$

Интегралдоо

$\int dy = \int dx$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\int dy = -3\int dx$

Тендемелерди чыгарып жана жалпы чыгарылышты айкын эмес формада жазуу:

$y = x + C_1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y = -3x + C_2$

$C_1 = y - x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $C_2 = y + 3x$

Жаңы координата системасына киргизүү

$\xi = y - x$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\eta = y + 3x$

4-этап: Жаңы координат системасында өзгөртүп түзүү

а) $U_{чч} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_ч^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_ч \eta_ч + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + U_\xi \cdot \xi_{чч} + U_\eta \eta_{чч}$

$\xi_ч = -1;$ $\qquad\qquad$ $\xi_{чч} = 0$

$\eta_ч = 3;$ $\qquad\qquad$ $\eta_{чч} = 0$

$U_{xx} = U_{\xi\xi}(-1)^2 + 2U_{\xi\eta}(-1)\cdot 3 + U_{\eta\eta} \cdot 3^2$

$U_{xx} = U_{\xi\xi} - 6U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}$

б) $U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + U_{\xi\eta}\left(\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \cdot \eta_x\right) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}$

$\xi_x = -1;$ $\qquad\qquad$ $\eta_x = 3;$

$\xi_y = 1;$ $\qquad\qquad$ $\eta_y = 1;$

$\xi_{xy} = 0;$ $\qquad\qquad$ $\eta_{xy} = 0$

$U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot (-1)\cdot 1 + U_{\xi\eta}(-1\cdot 1 + 1\cdot 3) + U_{\eta\eta} \cdot 3\cdot 1$

$U_{xy} = -U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + 3U_{\eta\eta}$

в) $U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_y + U_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy}$

$\xi_y = 1$ $\qquad\qquad$ $\eta_y = 1$

$\xi_{yy} = 0$ $\qquad\qquad$ $\eta_{yy} = 0$

$U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$

5-этап: U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} тин алынган маанилерин (*) татаал теңдемеге коюу:

$U_{\xi\xi} - 6U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta} + 2U_{\xi\xi} - 4U_{\xi\eta} - 6U_{\eta\eta} - 3U_{\xi\xi} - 6U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta} = 0$

$-16U_{\xi\eta} = 0$ барабардыктын эки жагын -16га бөлүү

$U_{\xi\eta} = 0$ бир эле мүчөсү бар жөнөкөй теңдеме болуп калат.

Математикалык физика үчүн эң ыңгайлуу программанын бири Matlab программалоо чөйрөсү. Matlabта математикалык функциялар киргизилген. Комплекстүү сандарды колдонсо болот. Дифференциялдоо, интегралдоо жана матрицалар менен бардык ыкмалар аткарылат. Студенттер үчүн эң ыңгайлуу, өз алдынча иштерди, курсттук иштерди жекече аткара алышат. Маселенин программасын түзүү менен параметрлерин өзгөртүп, графиктерди тургузуп жана интерфейс түзүүгө да болот.

Бул статьяда Matlab чөйрөсүндө гипербола тибиндеги теңдеменин компьютердик программасы иштелип чыкты.

```
syms x y Uksiksi Uksietta Uettaetta C1 real
%1
a11=1
a12=-1
a22=-3
%2
D=a12^2-a11*a22;
%3  %3.1
pr1=(a12+D^(1/2))/a11
```

```
z1=subs(dsolve('Dy=pr1','x'))-y
%3.2
pr2=(a12-D^(1/2))/a11
z2=subs(dsolve('Dy=pr2','x'))-y
if(D>0)
ksi=solve(z1,'C1')
etta=solve(z2,'C1')
elseif(D==0)
ksi=solfe(z1,'C1')
etta=x
else
ksi=real(solfe(z1,'C1'))
etta=imag(solfe(z1,'C1'))
end
%4
Uxx=Uksiksi*(diff(ksi,x))^2+2*Uksietta*(diff(ksi,x))*(diff(etta,x))+Uettaetta*(diff(etta,x))^2
Uyy=Uksiksi*(diff(ksi,'y'))^2+2*Uksietta*(diff(ksi,'y'))*(diff(etta,'y'))+Uettaetta*(diff(etta,'y'))^2

Uxy=Uksiksi*(diff(ksi,x))*(diff(ksi,'y'))+Uksietta*(diff(ksi,x)*diff(etta,'y')+diff(ksi,'y')*diff(etta,x))+Uettaetta
*diff(etta,x)*diff(etta,'y')
%5
O=a11*Uxx+2*a12*Uxy+a22*Uyy
%6 graphic
ksi
D=4
pr1=1
z1=x+C1-y
pr2=-3
z2=-3*x+C1-y
ksi=-x+y
etta=3*x+y
Uxx=Uksiksi-6*Uksietta+9*Uettaetta
Uyy=Uksiksi+2*Uksietta+Uettaetta
Uxy=-Uksiksi+2*Uksietta+3*Uettaetta
O=-16*Uksietta
ksi=-x+y
```

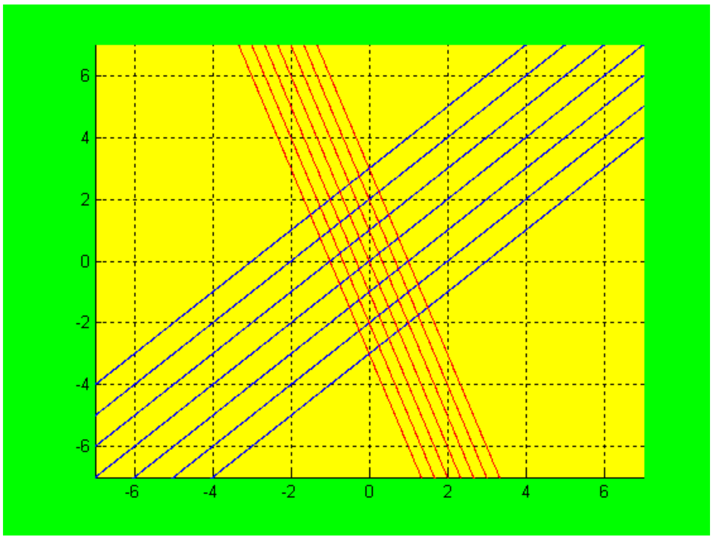
Жаңы координата системасына киргизилген $\xi = y - x$, $\eta = y + 3x$ барабардыктан y ти таап, ξ жана η га маани берүү менен графикти тургузабыз.

$y = \xi + x$, $y = -3x + \eta$

```
figure('color',[0 1 0])
axes ('color',[1 1 0],'xlim',[-7 7],'ylim',[-7 7])
grid on;

for ksi =-3:3
for x=-7:0.01:7
y=x+ksi;
line(x,y,'color',[0 0 1]);
end
end
for etta =-3:3
for x=-6:0.01:6
y=-3*x+etta;
line(x,y,'color',[1 0 0]);
end
end
```

Matlabта бардык маселенин графигин төмөнкүчө тургузууга болот:



Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.:Наука, 1988г.
2. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. – М.: Просвещение, 1976г.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961г.