О СИЛЬНО τ-ФИНАЛЬНО ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

КАНЕТОВ Б.Э., ЖАНАКУНОВА М.О., БЕКЖАН УУЛУ Т.

УДК – 515.12

В настоящей статье исследуются сильно τ-финально компактные пространства введенное А. А. Борубаевым.

Напомним, что топологическое пространство X называется сильно τ-финально паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать звездно конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$.

При достаточно больших кардиналах τ, сильно τ-финально паракомпактные пространства превращается в сильно паракомпактные пространства.

ТЕОРЕМА 1. Всякое замкнутое подпространство сильно τ-финально паракомпактного пространства сильно τ-финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X является сильно τ-финально паракомпактным, M - замкнутое подмножество пространства X. Пусть α_M - произвольное открытое покрытие подпространством M. Тогда существует открытые семейство μ пространства X такое, что $\alpha_M = \mu \wedge M$. Положим $\alpha = \{\mu, X \setminus M\}$.

Ясно, что α открытое покрытие пространства X. В силу τ - финально паракомпактности X существует звездно конечное отрытое покрытие β мощности $\leq \tau$, вписанное в α. Положим $\beta_M = \beta \wedge M$. Легко видеть, что β_M - открытое покрытие подпространства M, вписанное в α_M. Нетрудно видеть также, что покрытие β_M и тому же и звездно конечно, и имеет мощность $\leq \tau$.

Действительно, пусть $B_M \in \beta_M$. Так как β звездно конечное покрытие, то множества B пересекаются лишь с конечным числом элементов покрытия β_M. Следовательно, замкнутые подпространство M является сильно τ-финально паракомпактным.

ТЕОРЕМА 2. Топологическая сумма любого семейства пространства сильно τ-финально паракомпактных пространств сильно τ-финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ произвольное семейство сильно τ-финально паракомпактных пространств X_i, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ - топологическая сумма этого семейства.

Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства X. Ясно, что семейство $\beta = \{A \cap X_i : i \in I\}$ является открытым покрытием пространства X и оно вписано в покрытие α. Для каждого $i \in I$ положим $\alpha_i = \{A \cap X_i : A \in \alpha\}$. Очевидно, α_i является открытым покрытием сильно τ-финально паракомпактно пространства X_i. Следовательно, существует звездно конечное отрытое покрытие β_i пространства X_i мощности $\leq \tau$, вписанное в α. Теперь рассмотрим семейство β, которое состоит из объединение всех семейств β_{X_i}, $i \in I$. Легко видеть, что семейство β образует открытое покрытие пространство X. Покажем, что β вписано в α. Каждый элемент семейство β являясь одним из элементов семейства β_{X_i}, $i \in I$, очевидно, будет содержаться в некотором элементе семейство β, которое состоит из объединение всех семейств α_i, и α. Теперь остается доказать, что β звездно конечно. Пусть $B \in \beta$. Тогда существует $i \in I$ такой, что $B = B_{X_i}$, $B_{X_i} \in \beta_{X_i}$. Так как β_{X_i} звездно конечное покрытия и X_i дизъюнктны, то B пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия β. Следовательно, β является звездно конечным открытым покрытием мощности $\leq \tau$, вписанное в α. Значит X является сильно τ - финально паракомпактным пространством.

ТЕОРЕМА 3. Топологическое пространство X сильно τ-финально паракомпактно тогда и только тогда, когда в любое его конечно – аддитивное открытое покрытие можно вписать звездно конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть топологическое пространство X является сильно τ-финально паракомпактным. Пусть α - произвольное конечно – аддитивное открытое покрытие пространства X. Тогда существует такое звездно конечное открытое покрытие β мощности $\leq \tau$, которое вписано в α.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы относительно каждого конечно – аддитивного покрытия пространства X. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства X. Рассмотрим всевозможные конечные объединения элементов этого покрытия. Составленное при этом открытое покрытие $\alpha_{\aleph_0}$, естественно является конечно – аддитивным. По условию впишем в него звездно - конечное открытое покрытие β мощности $\leq \tau$. Тогда каждое множество B из β принадлежит некоторому конечному объединению множеств $A_i^B \cap B$, где $A_i^B \in \alpha$, $B \in \beta$ образует звездно конечное открытое покрытие γ пространства X мощности $\leq \tau$, вписанное в открытое покрытие α. Следовательно, X является сильно τ-финально паракомпактным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Топологическое пространство X называется сильно локально компактным, если существует локально конечное открытое покрытие состоящее из элементов, замыкание каждой из которых компактно.

ТЕОРЕМА 4. Всякое сильно локально компактное пространство является локально компактным.

Доказательство очевидна.

ТЕОРЕМА 5. Всякое сильно локально компактное пространство является сильно паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X является сильно локально компактным пространством. Пусть α - произвольное конечно – аддитивное открытое покрытие пространства X. Тогда существует локально конечное открытое покрытия β, замыкание элементов которого компактно. Легко видеть, что покрытие β, вписано в покрытие α. Теперь остается показать, что покрытие β является звездно конечным покрытием. Пусть $B \in \beta$ - произвольный элемент. Докажем, что он пересекается лишь с конечным числом элементов покрытие β. В силу локальной конечности покрытия β для каждого $x \in [B]$ существует окрестность O_x в X, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия β. Из открытого покрытия $\{O_x : x \in [B]\}$ компактности [redacted] $[B]$ выделим конечные подпокрытие $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}\}$. Тогда множества $O = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$ и B тоже будет пересекаться лишь с конечным числом элементов покрытия β. Следовательно, покрытие β является звездно конечным. Значит, X является сильно паракомпактным.

ТЕОРЕМА 6. Если τ - финально паракомпактное пространство X локально компактно, то оно сильно τ - финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X является τ-финально паракомпактным и локально компактным. Пусть α - произвольное открытое покрытие пространства X. В силу локально компактности X для каждой точки $x \in X$ существует окрестность O_x, замыкание $[O_x]$ которой компактно. Положим $\beta = \{O_x : x \in X\}$. Через γ обозначим внутреннее пересечение покрытий α и β. Тогда существует локально конечное открытое покрытие δ мощности $\leq \tau$, вписанное в покрытие γ. Теперь покажем, что замыкание всех элементов E покрытия δ компактны. Для каждого $E \in \gamma$ существуют $A \in \alpha$ и $O_x \in \beta$ такие, что $E \subset A$ и $E \subset O_x$. Следовательно, $[E] \subset [O_x]$ т.е. $[E]$ компактно. Легко видеть, что γ является звездно конечным открытым покрытием мощности $\leq \tau$. Итак, топологическое пространство X является сильно τ-финально паракомпактным.

СЛЕДСТВИЕ 1. Всякое компактное пространство является сильно τ-финально паракомпактным.

ТЕОРЕМА 7. Произведение сильно τ-финально паракомпактного пространства на компактное сильно τ - финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = X \times Y$, где X - сильно τ-финально паракомпактно, а Y - компактно. Пусть α - произвольное открытое покрытие произведение T. Пусть $t = (x, y) \in T$ -

произвольная точка. Тогда существует $A_t \in \alpha$ такое, что $t \in A_t$. Так как множества $U \times V$, где U открыто в X, а V открыто в Y, образуют базу топологии произведении $X \times Y$, то существуют открытые окрестности U_x точки $x \in X$ и окрестность V_y, точки $y \in Y$ такие, что $U_x \times V_y \subset A_t$. Семейства $\{V_y : y \in Y\}$ является открытым покрытием компакта Y. Из него выделим конечное подпокрытие $\{V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}\}$.

Положим $W_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_x^i, i = 1, 2, ..., n$. Тогда семейство $\gamma = \{W_x : x \in X\}$ является открытым покрытием пространства X, и в которое в силу сильно τ-финально паракомпактности X можно вписать звездно конечное открытое покрытие λ мощности $\leq \tau$.

Далее рассмотрим семейство всех открытых в T подмножеств вида $L \times V_y$, где $L \in \lambda$ легко видеть, что во-первых δ есть покрытие T, и во-вторых оно вписано в покрытие α.

Теперь остается доказать, что δ звездно конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$. Т.к. λ звездно конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$, то каждый элемент L пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия λ. Следовательно, $L \times V_{y_i}, i = 1, 2, ..., n$ тоже пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия δ. Значит, T является сильно τ-финально паракомпактным.

ТЕОРЕМА 8. Если для всякого открытого покрытия ω пространства X существует ω-отображение $f : X \to Y$ на некоторое сильно τ-финально паракомпактное пространство Y, то X само сильно τ-финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω - произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда существует ω - отображение пространства X на сильно τ-финально паракомпактное пространства Y. Для каждой точки $y \in Y$ существует окрестность O_y, прообраз $f^{-1}O_y$ которой содержится в некотором элементе N покрытия ω. Положим $\beta = \{O_y : y \in Y\}$, где прообраз $f^{-1}O_y$ каждого O_y содержится в некотором элементе покрытия ω. Так как Y - является сильно τ-финально паракомпактным, то существует такое звездно конечное открытое покрытие γ мощности $\leq \tau$, вписанное в β. Положим $\alpha = f^{-1}\beta$. Ясно, что покрытие α вписано в покрытия ω, также ясно, что покрытие α имеет мощности $\leq \tau$.

ТЕОРЕМА 9. Если для всякого открытого покрытия ω пространства X существует ω-отображение $f : X \to Y$ на некоторое сильно τ-финально паракомпактное пространства Y, то X само сильно τ-финально паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω - произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда существует ω - отображение f пространства X на некоторое τ-финально паракомпактное пространства Y. Для каждой точки $y \in Y$ существует окрестность O_y, прообраз которой содержится в некотором элементе N покрытия ω. Положим $\beta = \{O_y : y \in Y\}$. Тогда β является открытым покрытием пространства Y. Так как пространство Y - является τ-финально паракомпактным, то существует локально конечное открытое покрытие α мощности $\leq \tau$, вписанное в покрытие β. Легко видеть, что $\gamma = \{f^{-1}A : A \in \alpha\}$ есть открытое покрытие пространства X, вписанное в покрытие ω. Если α локально конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$, то и γ локально конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$. Следовательно, пространство X является τ-финально паракомпактным.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.
2. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек: Илим, 2013.

3. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.
4. Энггелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986.