ОБОБЩЕННЫЕ РАВНОМЕРНОСТИ НА МУЛЬТИСИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЖАНАКУНОВА М.О.

УДК – 515.12

В предлагаемый статье изучается класс τ-симметрических пространств. Класс τ-симметрических пространств является содержательным обобщением симметрических пространств.

Напомним некоторые общеизвестные понятия и утверждения.

Пусть X непустое множество. Пусть $R_+ = [0,\infty)$, $R_+ = (-\infty,\infty)$, а, τ-произвольное кардинальное число. Через R_+^τ и R^τ обозначим тихоновское произведение τ-копий пространств R_+^τ и R^τ соответственно. В пространствах R_+^τ и R^τ естественным образом (по координатно) определяются операции сложения, умножения на скаляр, а также частичная упорядоченность.

Неотрицательная функция $d : X \times X \to R_+$ называется симметрикой на X, если выполняются следующие аксиомы:

1. $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$ для всех $x,y \in X$.

Пара (X,d), где X - заданное множество, а d симметрика на X называется симметрическим пространством.

Пусть $\{f_i : X \to Y_i : i \in I\}$ семейство отображений множества X в семейства $\{Y_i : i \in I\}$. Отображение $f : X \to \prod\{Y_i : i \in I\}$, определяемое формулой $fx = \{f_i x : i \in I\}$ называется диагональным произведением семейства отображений $\{f_i : i \in I\}$ и обозначается через $\Delta\{f_i : i \in I\}$.

Пусть U - некоторое семейство покрытий множества X. Семейства U - покрытий называется обобщенной равномерностью на X если выполняются следующие аксиомы:

1. Если $\alpha \in U$ и α вписано в некоторое покрытие β множества X, то $\beta \in U$;
2. Для любых $\alpha, \beta \in U$ существует такое $\gamma \in U$, что $\gamma \succ \alpha$ и $\gamma \succ \beta$.

Пара (X,U), где X - заданное множество, а U - обобщенная

равномерность на X называется обобщенным равномерным пространством.

Подсемейство $B \subset U$ называется базой обобщенной равномерности U, если для любого $\alpha \in U$ существует такое $\beta \in B$, что $\beta \succ \alpha$.

Наименьшее кардинальное число, являющееся мощности какой – либо базы обобщенной равномерности U называется весом обобщенного равномерного пространства (X,U) и обозначается $w(X,U)$ или $w(U)$.

Пусть B - некоторое семейство покрытий множества X. Семейство B покрытий множества X является базой обобщенной равномерности U на X тогда и только тогда, когда для любых $\beta_1, \beta_2 \in B$ существует такое $\beta \in B$, что $\beta \succ \beta_1$ и $\beta \succ \beta_2$.

Топологическое пространство (X,τ) называется симметризуемым, если существует симметрика порождающая топологию τ. Обобщенное равномерное пространство (X,U) называется симметризуемым, если существует симметрика порождающие обобщенную равномерность U.

Обобщенное равномерное пространство (X,U) называется симметризуемо тогда и только тогда, когда обобщенная равномерность U имеет счетную базу т. е. обобщенное равномерное пространство (X,U) имеет счетный вес $w(U) \le \aleph_0$. Действительно, пусть обобщенное равномерное пространство (X,U) симметризуемо. Тогда существует симметрика порождающая обобщенную равномерность U. Пусть (X,d) - симметрическое пространство, а $O_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ - открытый шар с центром в точке x и радиусом ε. Положим $\alpha_\varepsilon = \{O_d(x,\varepsilon) : x \in X\}$. Покажем, что семейство $B_d = \{\alpha_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ покрытий образует базу некоторой обобщенной равномерностью U_d на

X. Для этого достаточно показать, что для любых $\alpha_{\varepsilon_1}, \alpha_{\varepsilon_2} \in \beta_\alpha$ существует такое $\alpha_\varepsilon \in \beta_\alpha$, что $\alpha_\varepsilon \succ \alpha_{\varepsilon_1}$ и $\alpha_\varepsilon \succ \alpha_{\varepsilon_2}$. Пусть $\alpha_{\varepsilon_1}, \alpha_{\varepsilon_2} \in \beta_\alpha$. Тогда α_ε вписано и в α_{ε_1} и α_{ε_2}, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Заметим, что семейство $\{\alpha_{\frac{1}{n}} : n \in N\}$ также является базой обобщенной равномерности U_d. Значит, всякая обобщенная равномерность, порожденная симметрикой, имеет счетную базу. Следовательно, $w(U) \leq \aleph_0$. Обратно, пусть обобщенная равномерность U имеет счетную базу $B = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$.

Для любых двух точек x и y пространства X положим $d(x, y) = 1$, если нет никакого элемента какого бы то ни было B, содержащего обе точки x и y. В противном случае положим $d(x, y) = \frac{1}{2^n}$, где n есть наибольшее такое натуральное число, что обе точки x и y содержатся в некотором элементе покрытия α_n. Наконец, положим $d(x, y) = 0$ для любого x. Таким образом определенное расстояние, очевидно, симметрично. Легко видеть, что оно удовлетворяет аксиоме тождества $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Семейства U, состоящие из покрытий множества X, в каждое из которых можно вписать покрытия вида α_n, является обобщенной равномерностью в X. При этом говорят, что обобщенная равномерность U порождена симметрикой d.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X - непустое множество. Отображение $d_\tau : X \times X \to R_+^\tau$ называется τ-симметрикой или мультисимметрикой (если τ-не фиксировано) на X, а пара (X, d_τ) - τ-симметрическим или мультисимметрическим пространством, если выполняются следующие известные аксиомы:

1. $d_\tau(x, y) = \theta$ тогда и только тогда, когда $x = y$, где θ - точка пространства R_+^τ, все координаты которой состоят из нулей;
2. $d_\tau(x, y) = d_\tau(y, x)$ для всех $x, y \in X$.

Всякое τ-симметрическая пространство является τ-симметрическим пространством, а обратное утверждение, вообще говоря не верно.

ТЕОРЕМА 1. Всякая τ-симметрика d_τ на множестве X порождает обобщенную равномерность U_{d_τ}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d_τ - τ-симметрика на множестве X. Для каждой точки $x \in X$ положим $G_{d_\tau}(x, O(\theta)) = \{y \in X : d_\tau(x, y) \in O(\theta)\}$ где $O(\theta)$ - некоторая окрестность нуля θ в пространстве R_+^τ. Далее для каждой окрестности $O(\theta)$ точки θ пространства R_+^τ положим $\alpha_{O(\theta)} = \{G_{d_\tau}(x, O(\theta)) : x \in X\}$. Тогда семейство $B_{d_\tau} = \{\alpha_{O(\theta)} : O(\theta)$ пробегает базу окрестностей точки θ в пространстве $R_+^\tau\}$ образует базу некоторой обобщенной равномерности U_{d_τ} на множестве X. Действительно, во-первых семейство $\alpha_{O(\theta)} = \{G_{d_\tau}(x, O(\theta)) : x \in X\}$ является покрытием множестве X. Так, пусть $y \in X$ - произвольная точка. Тогда существует такая $O(\theta)$, что $G_{d_\tau}(y, O(\theta))$ содержит точку $y \in X$. Ясно, что $G_{d_\tau}(y, O(\theta)) \in \alpha_{O(\theta)}$. Следовательно, $\alpha_{O(\theta)}$ является покрытием множестве X. Теперь покажем, что семейство B_{d_τ} является базой некоторой обобщенной равномерности U_{d_τ} на множестве X. Пусть $\alpha_{O'(\theta)}, \alpha_{O''(\theta)} \in B_{d_\tau}$, где $O'(\theta)$ и $O''(\theta)$ являются элементами фундаментальной системы $B(\theta)$ окрестностей нуля θ в пространстве R_+^τ. Тогда существует такая окрестность $O(\theta)$ из $B(\theta)$, что $O(\theta) \subset O'(\theta) \cap O''(\theta)$. Отсюда следует, что $\alpha_{O(\theta)} \succ \alpha_{O'(\theta)}$ и $\alpha_{O(\theta)} \succ \alpha_{O''(\theta)}$. В самом деле, пусть $G_{d_\tau}(x, O(\theta)) \in \alpha_{O(\theta)}$. Так как $O(\theta) \subset O'(\theta)$, то $G_{d_\tau}(x,O(\theta)) \subset G_{d_\tau}(x,O'(\theta))$. Следовательно, $\alpha_{O(\theta)} \succ \alpha_{O'(\theta)}$. Аналогично доказывается соотношение $\alpha_{O(\theta)} \succ \alpha_{O''(\theta)}$. Через U_{d_τ} обозначим семейство, состоящее из всех покрытий множества X, в каждой из которых можно вписать покрытия из B_{d_τ}. Ясно, что U_{d_τ} является обобщенной равномерностью порожденной τ-симметрикой d_τ на множестве X.

ТЕОРЕМА 2. Всякая τ-симметрика d_τ на множестве X порождает топологию T_{d_τ}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d_τ - τ-симметрика на множестве X. Для каждой точки $x \in X$ положим $G_{d_\tau}(x,O(\theta)) = \{y \in X : d_\tau(x,y) \in O(\theta)\}$. Покажем, что семейство $T_{d_\tau} = \{O \subset X :$ для каждой точки $x \in O$ существует такое $O(\theta)$, что $G_{d_\tau}(x,O(\theta)) \subset O\}$ действительно образует топологию на множестве X. Проверим выполнение все аксиомы топологии. Ясно, что $\varnothing, X \in T_{d_\tau}$. Пусть $O_1, O_2 \in T_{d_\tau}$. Покажем, что $O_1 \cap O_2 \in T_{d_\tau}$. Пусть $x \in O_1 \cap O_2$, т. е. $x \in O_1$ и $x \in O_2$. Тогда существуют такие $O'(\theta)$ и $O''(\theta)$ окрестности нуля θ в пространстве R_+^τ, что $G(x,O'(\theta)) \subset O_1$ и $G(x,O''(\theta)) \subset O_2$. Заметим, что $G(x,O'(\theta)) \cap G(x,O''(\theta)) \subset O_1 \cap O_2$. Пусть $O(\theta)$ такая окрестность нуля θ в R_+^τ, что $O(\theta) \subset O'(\theta) \cap O''(\theta)$. Покажем, что $G(x,O(\theta)) \subset G(x,O'(\theta)) \cap G(x,O''(\theta))$. Пусть $y \in G(x,O(\theta))$. Тогда $d_\tau(x,y) \in O(\theta)$. Так как, $O(\theta) \subset O'(\theta) \cap O''(\theta)$, то $d_\tau(x,y) \in O'(\theta) \cap O''(\theta)$ т. е. $d_\tau(x,y) \in O'(\theta)$ и $d_\tau(x,y) \in O''(\theta)$. Следовательно, $y \in G(x,O'(\theta)) \cap G(x,O''(\theta))$ согласно условия T_{d_τ} получим, что $O_1 \cap O_2$ действительно принадлежит в T_{d_τ}. Значит, вторая аксиома топологии выполнена. Теперь, пусть $T'_{d_\tau} \subset T_{d_\tau}$ некоторое подсемейство. Докажем, что $\cup T'_{d_\tau} \subset T_{d_\tau}$. Тогда существует такое $O \in T'_{d_\tau}$, что $x \in O \subset \cup T'_{d_\tau}$. Следовательно, найдется такая окрестность нуля $O(\theta)$, что $G(x,O(\theta)) \subset O_1$ т. е. $G(x,O(\theta)) \subset \cup T'_{d_\tau}$. Значит, выполнена и третья аксиома топологии. Итак, T'_{d_τ} является топологией на X.

Топологические и равномерные пространства, топологии и равномерности которых порождены некоторыми τ-симметриками, называются τ- симметризуемым.

Пусть $\{(X_a, d_a) : a \in A\}$ произвольное семейство симметрических пространств и пусть $\tau = |A|$. Тогда $d_\tau(x,y) = \{d_a(x,y) : a \in A\}$ является τ-симметрикой на X, где $X = \prod\{X_a : a \in A\}$, $x = \{x_a : a \in A\}$, $y = \{y_a : a \in A\}$, $x_a, y_a \in X_a$ для каждого $a \in A$.

Понятия τ-метрического пространства введено А.А. Борубаевым [1], [2] и с его помощью со счетного случая на общий случай перенесены ряд фундаментальных результатов, полеченных в классе метрических пространств. Также А.А. Борубаевым было введено и изучено понятие полноты τ-симметрических пространств.

Имеет место следующая теорема для τ-симметрических пространств.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{(X_a, d_a) : a \in A\}$ произвольное семейство τ_a симметрических пространств. Тогда (X, d_τ) является τ-симметрическим пространством, где $X = \prod\{X_a : a \in A\}$, $d_\tau(x,y) = \{\rho_{\tau_\tau}(x_a, y_a) : a \in A\}$, $x = \{x_a : a \in A\}$, $y = \{y_a : a \in A\}$, $x_a, y_a \in X_a$ для любого $a \in A$, $\tau = \sum\{\tau_a : a \in A\}$.

СЛЕДСТВИЕ *1.* Произведение произвольного семейства мультисимметрических пространств также является мультисимметрическим пространством.

Литература

1. Борубаев А.А. О τ- метрических пространствах и их отображениях // Известия НАН

КР. – 2012. - №2. – С. 7 - 10.

2. Борубаев А.А. Об одном обобщении метрических, нормированных и унитарных пространств // Докл. РАН. – 2014. – Т. 455. -№2. – С. 127 - 129.

3. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.

4. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек: Илим, 2013.

5. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.

6. Келли Дж. Л. Общая топология. Москва: Наука, 1981.

7. Энггелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986.

8. Weil A. Sur Les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale. – Paris, 1938.

9. Hausdorff F. Grundzuge der Mendenlehre. – Leipzig, 1914.

10. Freshet M. // Rend. Gre/ Mat di Palermo 22 (1906), 1 – 74.