ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОБЪЁМА ДОБЫЧИ СЫРЬЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЗАТРАТ
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

ст.преп. БЕЙШЕБАЕВА Ж.К.

УДК: 517.95(575.2)

Пусть компания имеет m пунктов добычи сырья A_i, $i = 1,2,\ldots,m$.Объем добываемого сырья каждого пункта добычи на каждом периоде предполагается a_i^t, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,T$.Согласно договора в каждом периодедобытое сырье должно транспортироваться двумпотребителям B_v и B_R. По договору компания должнаограниченной сверху величинойнаправлять сырье потребителю B_v за весь планируемый период в объеме Q, в том числе по каждому периодуtв объеме не более чем q_v^t, $t = 1,2,\ldots,T$, а B_R – должна транспортировать сырье равной в объеме q_R^t, $t = 1,2,\ldots,T$.

Известны для каждого пунктадобычи сырья функции$\varphi_i^t(x_i^t)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2\ldots,T$определяющие затраты на добычу сырья по каждому периоду, затраты на транспортировку сырья потребителем B_v и B_Rот каждогоA_i, $i = 1,2,\ldots,m$накаждый период добычи сырья.

Требуется определить оптимальный план добычи сырья компании и перевозку потребителям в каждом периоде доставляющий минимума суммарных затрат на добычу и перевозку сырья.

Для математической формализации задачи введем следующие обозначения:

i – индекс пунктадобычисырья, $i = 1,2,\ldots,m$;

t – индекс периода добычи и транспортировки сырья, $t = 1,2,\ldots,T$.

Известные параметры и функции:

C_{iv}^t, C_{iR}^t- затраты на перевозку единицы объема сырья из -го пункта добычи сырья до потребителей B_v и B_R, за t- й период, соответственно, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,T$;

a_i^t – максимальный объем добычи сырья в i- ом пункте компании за t –й период, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,T$;

q_v^t – максимальный объем сырья перевозимый компанией потребителю B_v за периодt, по договору, $t = 1,2,\ldots,T$;

Q – объем сырья поставляемый компанией потребителю B_v за планируемый период согласно договору;

b_R^t –обьем сырья поставляемый компанией потребителю B_Rза t- ом периоде, $t = 1,2,\ldots,T$;

$\varphi_i^t(x_i^t)$ –функция отражающая зависимости стоимости добываемого сырья от объема добычи на i- ом пункте добычи за t- й период, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,T$.

Искомые переменные:

x_{iv}^t, x_{iR}^t –объем сырья перевозимой компанией из i- го пункта добычи к потребителям B_v и B_Rсоответственно за t -йпериод, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,T$;

x_i^t- объем сырья добываемой i- мпунктом за t- й период, $i = 1,2,\ldots,m$, $t = 1,2,\ldots,T$.

Согласно принятым обозначениям математическую модель изложенной проблемы можно записать в виде:

найти минимум

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left[\left(c_{iv}^t x_{iv}^t + c_{iR}^t x_{iR}^t\right) + \varphi_i^t(x_i^t)\right] \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{iv}^t \le q_v^t, \qquad t = 1,2,\ldots,T, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} x_{iv}^t = Q, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{iR}^t = b_R^t, t = 1,2,\ldots,T, \tag{4}$$

$$x_{iv}^t + x_{iR}^t = x_i^t, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad t = 1,2,\ldots,T, \tag{5}$$

$$0 \le x_i^t \le a_i^t, i = 1,2,\ldots,m, \quad t = 1,2,\ldots,T, \tag{6}$$

$$x_i^t \ge 0, \quad x_{iv}^t \ge 0, \quad x_{iR}^t \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad t = 1,2,\ldots,T, \tag{7}$$

где $x = \|x_i^t\|_{m,T}$.

Предполагается,что имеют место следующие условия

$$Q \le \sum_{t=1}^{T} q_0^t, \qquad Q + \sum_{t=1}^{T} b_R^t \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} a_i^t. \tag{8}$$

Метод решения.

Рассмотрим метод решения задачи (1) – (7) в случае, когда $\varphi_i^t(x_i^t)$ – выпуклая возрастающая функция по $x_i^t \in [0,\ a_i^t]$, $i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$.

Для решения задачи используем метод кусочно-линейной аппроксимации в [1],[2].

Выпуклые функции $\varphi_i^t(x_i^t)$, $i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$ заменим кусочно-линейными функциями. Для этого разбиваем интервалы $[0, a_i^t]$ на e_i^t равныхчастей с шагом $h_i^t = \frac{a_i}{e_i^t}$, $i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$.

Построим кусочно-линейную аппроксимацию функций $\varphi_i^t(x_i^t), i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$. Переменные x_i^tзаменяемчерезz_{ik}^t следующим образом

$$x_i^t = \sum_{k=1}^{e_i} z_{ik}^t\ ,\ i = 1,2,\dots,m\ ,\ t = 1,2,\dots,T, \tag{9}$$

где $0 \le z_{ik}^t \le h_i^t$, $i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$.
(10)

Преобразовав неравенства (10) в равенство, имеем

$$h_i^t = z_{ik}^t + \xi_{ik}^t\ ,\quad i = 1,2,\dots,m, t = 1,2\dots,T,\quad k = 1,2\dots,e_i^t\ , \tag{11}$$

где $\xi_{ik}^t \ge 0, z_{ik}^t \ge 0$, $k = 1,2,\dots,e_i^t$, $i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$.

Функцию$\varphi_i^t(x_i^t)$ представим приближенно в виде

$$\varphi_i^t(x_i^t) \cong \sum \{\varphi_i^t(kh_i^t) - \varphi_i^t((k-1)h_i^t)\}\frac{z_{ik}}{h_i^t},$$
$$i = 1,2,\dots,m,\quad t = 1,2,\dots,T. \tag{12}$$

Из системы (9) и (11) получим

$$z_{ik}^t = h_i^t - \xi_{ik}^t\ ,\quad k = 1,2,\dots,e_i^t\ ,\quad i = 1,2,\dots,m, t = 1,2,\dots,T\ ,$$
$$x_i^t = \sum_{k=1}^{e_i}(h_i^t - \xi_{ik}^t),\quad i = 1,2,\dots,m,\quad t = 1,2,\dots,T. \tag{13}$$

Подставляя (13) в систему ограничений (5) , получаем

$$x_{im}^t + x_{iR}^t + \sum_{k=1}^{e_i}\xi_{ik}^t = a_i^t, i = 1,2,\dots,m,\quad t = 1,2,\dots,T, \tag{14}$$

где $0 \le \xi_{ik}^t \le h_i^t$, $k = 1,2,\dots,e_i^t$, $i = 1,2,\dots,m, t = 1,2,\dots,T$.

Суммируя по i и t равенства (9) и используя (3), (4), (5),получим

$$Q + \sum_{t=1}^{T} b_R^t = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{e_i} z_{ik}^t \ge 0.$$

Подставляязначения $\varphi_i^t(x_i^t)$ из (12) в целевой функциизадачи, получим

$$L(x) = \sum\sum\{(c_{im}^t x_{im}^t + c_{iR}^t x_{iR}^t) + \sum \frac{\Delta\varphi_{ik}}{h_i^t} z_{ik}^t\},$$

где$\frac{\Delta\varphi_{ik}}{h_i^t} = \frac{\varphi_i(kh_i) - \varphi_i((k-1)h_i)}{h_i^t}$, $k = 1,2,\dots,e_i^t$, $i = 1,2,\dots,m$, $t = 1,2,\dots,T$,

$\frac{\Delta\varphi_{ik}}{h_i^t}$ –угловые коэффициенты соответствующих звеньев кусочно-линейных функций.

Таким образом, окончательно имеем задачу

Найти минимум

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\{(c_{im}^t x_{im}^t + c_{iR}^t x_{iR}^t) + \sum_{k=1}^{e_i}\frac{\Delta\varphi_{ik}}{h_i^t} z_{ik}^t\} \tag{15}$$

при условиях

$$x_{im}^t + x_{iR}^t + \sum_{k=1}^{e_i}\xi_{ik}^t = a_i^t, i = 1,2,\dots,m, t = 1,2,\dots,T, \tag{16}$$
$$z_{ik}^t + \xi_{ik}^t = h_i^t\ , k = 1,2,\dots,e_i^t\ ,\ i = 1,2,\dots,m,\ t = 1,2,\dots,T, \tag{17}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{im}^t \le q_m^t\ ,\quad t = 1,2,\dots,T, \tag{18}$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{e_i} z_{ik}^t = Q + \sum_{t=1}^{T} b_R^t\ , \tag{19}$$
$$x_{im}^t \ge 0,\ x_{iR}^t \ge 0,\quad i = 1,2,\dots,m, t = 1,2,\dots,T, \tag{20}$$
$$z_{ik}^t \ge 0,\ \xi_{ik}^t \ge 0,\quad k = 1,2,\dots,e_i^t\ ,\quad i = 1,2,\dots,m,\quad t = 1,2,\dots,T. \tag{21}$$

Задачу (15) – (21) при помощи запрещающих тарифов можно свести к закрытой модели транспортной задачи линейного программирования. Введем дополнительные переменные$x_{0m}^t \ge 0, t = 1,2,\dots,T$. Обращаем неравенств (18) в равенстваи определяем объем фиктивного пункта добычи сырья индексом $\{0\}$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{im}^t + x_{0m}^t = q_m^t\ ,\quad t = 1,2,\dots,T. \tag{22}$$

Из (22) определяем объем фиктивного пункта добычисырья

$$\sum_{t=1}^{T} x_{0m}^t = \sum_{t=1}^{T} q_m^t - Q. \tag{23}$$

Транспортные расходы наперевозку единицы объема сырья от пункта добычи с индексом$\{0\}$ в предприятия B_p на каждый период t , $t = 1,2,\dots,T$ полагаем равным нулю, т.е. $c_{0m}^t = 0$, $t = 1,2,\dots,T$, а для предприятия B_R- равным достаточно большому числу M, т.е.$c_{0R}^t = M$, $t = 1,2,\dots,T$.

Задачу (15) - (21) с учетом (23) можно записать в виде следующей таблицы

1. Для компактной записи транспортной таблицы 1 введены следующие обозначения:

$\| \quad \|_{1,e_i^t}$- вектор строка размерности e_i^t, $\quad i = 1,2,\dots,m, \quad t = 1,2,\dots,T,$
$D = \sum q_v^t - Q, \quad B = Q + \sum b_R^t, \quad \Delta\varphi_i^t = \frac{\sum \varphi_{ik}^t}{e_i^t}, \quad k = 1,2,\dots,e_i^t,$
$i = 1,2,\dots,m, t = 1,2,\dots,T.$

Таблица1.

q_v^1	q_v^T	b_R^1	…	b_R^T	$\|h_1^1\|_{1,e_1^1}$	…	$\|h_m^1\|_{1,e_m^1}$	…	$\|h_1^T\|_{1,e_1^T}$	…	$\|h_m^T\|_{1,e_m^T}$
c_{1v}^1	M	c_{1R}^1	…	M	$\|0\|$	…	$\|M\|$	…	$\|M\|$	…	$\|M\|$
...											
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_{mv}^1	M	c_{mR}^1	…	M	$\|M\|$	…	$\|0\|$	…	$\|M\|$	…	$\|M\|$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
M	c_{1v}^T	M	…	c_{1R}^T	$\|M\|$	…	$\|M\|$	…	$\|0\|$	…	$\|M\|$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
M	c_{mv}^T	M	…	c_{mR}^T	$\|M\|$	…	$\|M\|$	…	$\|M\|$	…	$\|0\|$
0	0	M	…	M	$\|M\|$	…	$\|M\|$	…	$\|M\|$	…	$\|M\|$
M	M	M	…	M	$\|\Delta\varphi_{1k}^1\|$	…	$\|\Delta\varphi_{mk}^1\|$	…	$\|\Delta\varphi_{1k}^1\|$	…	$\|\Delta\varphi_{mk}^T\|$

Решая задачу (15) –(21) получим оптимальный план перевозок

$x_{iv}^t \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m, t = 1,2,\dots,T, \quad u \quad x_{iR}^t \ge 0, \quad i = 1,2 \dots,m, \quad t = 1,2,\dots,T,$ а также объемы добычи сырья каждого пункта на каждом периоде t, т.е.

$x_i^t = \sum_{k=1}^{e_i} z_{ik}^t, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad t = 1,2,\dots,T,$удовлетворяющий условиям (16) – (21) и доставляющий минимальное значение целевой функции (15) .

Литература.

1. Ланге Э.Г., Жусупбаев А. Комбинаторный метод решения задачи размещения.- Фрунзе,Илим, 1990. - 153.
2. Хедли ДЖ. Нелинейное и динамическое программирование. –М. : Мир, 1967.-506 с.