МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. РАЗЗАКОВА

Кафедра «Прикладная математика и информатика»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методические указания к проведению практических занятий
и самостоятельной работы студентов первого курса

Бишкек 2015

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
«Прикладная математика и
информатика»
Прот. № 8 от 29.04.2015г

«Одобрено»
методической комиссией
факультета информационных
технологий
Прот. № 12 от 12.05.2015г.

УДК 517.91

Составители: Сабиров Я.А., Каденова Р.Ж.

Дифференциальные уравнения второго порядка. Методические указания к проведению практических занятий для студентов всех специальностей очной формы обучения. /КГТУ им. И. Раззакова; Сост.: Сабиров Я.А., Каденова Р.Ж. / - Б.: ИЦ «Текник», 2015. - 24 с.

Написано в соответствии с программой. Содержат основные теоретические сведения и типовые задания. Каждое типовое задание содержит 30 вариантов. Типовые задания снабжены ответами. Имеются вопросы для самопроверки.

Предназначены для студентов всех специальностей очной формы обучения.

Рецензент к.ф.-м.н. доцент Пахыров З.П.

§1. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Линейное однородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами записывается в виде

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ являются непрерывными функциями на отрезке [a,b].

Линейная независимость функций. Определитель Вронского

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на отрезке [a,b], если существуют постоянные α_1, α_2, ..., α_n, одновременное не равные нулю, такие, что для всех значений x из этого отрезка справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Если же это тождество выполняется лишь при $\alpha_1 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, то указанные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются линейно независимыми на отрезке [a,b].

Для случая двух функций критерий линейной независимости можно записать в более простом виде: Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ будут линейно независимыми на отрезке [a,b], если их отношение на данном отрезке тождественно не равно постоянной:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv \text{const}.$$

В противном случае, при $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}$, эти функции будут линейно зависимыми.

Пусть n функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ имеют производные $(n-1)$ порядка. Определитель

$$W(x) = W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Называется определителем Вронского или вронскианом для указанной системы функций.

Теорема. Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейна зависима на отрезке [a,b], то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом отрезке.

Отсюда следует, что если определитель отличен от нуля хотя бы в одной точке отрезка [a,b], то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ будут линейно независимыми. Это свойство определителя Вронского позволяет выяснить, являются ли найденные решения однородного дифференциального уравнения линейно независимыми.

Фундаментальная система решений

Совокупность двух линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка образует его фундаментальную систему решений.

Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ − фундаментальная система решений, то общее решение уравнения второго порядка представляется в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Заметим, что по заданной фундаментальной системе решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ можно построить соответствующее однородное дифференциальное уравнение. Для случая второго порядка такое уравнение выражается через определитель в виде:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

§2. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q − постоянные коэффициенты.

Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант характеристического квадратного уравнения положителен: $D > 0$. Тогда корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительны и различны. В этом случае общее решение описывается функцией

$$y(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x),$$

где C_1 и C_2 − произвольные действительные числа.

2. Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен нулю: $D = 0$. Тогда корни действительны и равны. В этом случае говорят, что существует один корень k_1 второго порядка. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = (C_1 x + C_2)\exp(k_1 x).$$

3. Дискриминант характеристического квадратного уравнения отрицателен: $D < 0$. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_1 = \alpha - \beta i$. Общее решение записывается в виде

$$y(x) = \exp(\alpha x)\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right].$$

Рассмотренные три случая удобно представить в виде таблицы:

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами		
Корни характеристического уравнения	**Дискриминант характеристического уравнения**	**Общее решение**
Корни k_1, k_2 действительные и различные	$D > 0$	$y(x)=C_1\exp(k_1x) + C_2\exp(k_2x)$
Корни k_1, k_2 действительные и равные	$D = 0$	$y(x)=(C_1x + C_2)\exp(k_1x)$
Корни k_1, k_2 комплексные: $k_1 =\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$	$D < 0$	$y(x)= \exp(\alpha x)$ $[(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 5y = 0$.

Решение.

Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корни данного уравнения равны $k1 = 1$, $k2 = 5$. Поскольку корни действительны и различны, общее решение будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 \exp x + C_2 \exp(5x),$$

где C1 и C2 − произвольные постоянные.

Пример 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение.

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \quad \Rightarrow \; D = 36 - 4\cdot 9 = 0, \quad \Rightarrow \; k_{1,2} = 3.$$

Как видно, характеристическое уравнение имеет один корень второго порядка: $k1 = 3$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения определяется формулой

$$y(x) = (C_1x + C_2)\exp(3x),$$

где C1, C2 − произвольные действительные числа.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение.

Сначала запишем соответствующее характеристическое уравнение и определим его корни:

$$k^2 - 4k + 5 = 0, \quad \Rightarrow D = 16 - 4\cdot 5 = -4, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней: k1 = 2 + i, k2 = 2 − i. В этом случае общее решение выражается формулой

$$y(x) = \exp(2x)\left[C_1 \cos x + C_2 \sin x\right],$$

где C1, C2 − произвольные постоянные.

Пример 4

Решить уравнение y'' + 25y = 0.

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 25 = 0.$$

Корни этого уравнения являются чисто мнимыми:

$$k^2 = -25, \quad \Rightarrow k_1 = 5i, \quad \Rightarrow k_2 = -5i.$$

Тогда ответ записывается в следующем виде:

$$y(x) = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x),$$

где C1, C2 − постоянные интегрирования.

§4. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Структура общего решения

Линейное неоднородное уравнение данного типа имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p, q − постоянные числа (которые могут быть как действительными, так и комплексными). Для каждого такого уравнения можно записать соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Теорема: Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения $y_0(x)$ соответствуюшего однородного уравнения и частного решения $y_1(x)$ неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

Ниже мы рассмотрим два способа решения неоднородных дифференциальных уравнений.

Метод вариации постоянных

Если общее решение y_0 ассоциированного однородного уравнения известно, то общее решение неоднородного уравнения можно найти, используя метод вариации постоянных.

Пусть общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$y_0(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x).$$

Вместо постоянных C_1 и C_2 будем рассматривать вспомогательные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Будем искать эти функции такими, чтобы решение

$$y = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x)$$

удовлетворяло неоднородному уравнению с правой частью f(x).

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)Y_1(x) + C_2'(x)Y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)Y_1'(x) + C_2'(x)Y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Правая часть f(x) неоднородного дифференциального уравнения часто представляет собой многочлен, экспоненциальную или тригонометрическую функцию, или некоторую комбинацию указанных функций. В этом случае решение удобнее искать с помощью метода неопределенных коэффициентов. Подчеркнем, что данный метод работает лишь для ограниченного класса функций в правой части, таких как

1. $f(x) = P_n(x)\exp(\alpha x);$
2. $f(x) = \left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x),$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − многочлены степени n и m, соответственно.

В обоих случаях выбор частного решения должен соответствовать структуре правой части неоднородного дифференциального уравнения.

В случае 1, если число α в экспоненциальной функции совпадает с корнем характеристического уравнения, то частное решение будет содержать дополнительный множитель x^s, где s − кратность корня α в характеристическом уравнении.

В случае 2, если число $\alpha + \beta i$ совпадает с корнем характеристического уравнения, то выражение для частного решения будет содержать дополнительный множитель x.

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой найденного выражения для частного решения в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

Принцип суперпозиции

Если правая часть неоднородного уравнения представляет собой сумму нескольких функций вида то частное решение дифференциального уравнения

$$P_n(x)\exp(\alpha x) \quad \text{и/или} \quad \left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x),$$

также будет являться суммой частных решений, построенных отдельно для каждого слагаемого в правой части.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \sin(2x)$.

Решение.

Сначала мы решим соответствующее однородное уравнение y'' + y = 0. В данном случае корни характеристического уравнения являтся чисто мнимыми:

$$k^2+1=0, \quad \Rightarrow k^2=-1, \quad \Rightarrow k_{1,2}=\pm i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется выражением

$$y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Вернемся снова к неоднородному уравнению. Будем искать его решение в виде

$$y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x,$$

используя метод вариации постоянных.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ C_1'(x)(\cos x)'+C_2'(x)(\sin x)'=\sin(2x) \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ C_1'(x)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\sin(2x) \end{cases}.$$

Выразим производную $C_1'(x)$ из первого уравнения:

$$C_1'(x)=-C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим производную $C_2'(x)$:

$$\left(-C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x}\right)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\sin(2x),$$

$$C_2'(x)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos x\right)=\sin(2x),$$

$$C_2'(x)\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}=\sin(2x),$$

$$C_2'(x)\frac{1}{\cos x}=\sin(2x),$$

$$C_2'(x)=\sin(2x)\cos x.$$

Отсюда следует, что

$$C_1'(x)=-\sin(2x)\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=-\sin(2x)\sin x.$$

Интегрируя выражения для производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получаем:

$$C_1(x)=\int\left[-\sin(2x)\sin x\right]dx=-2\int\sin^2 x\cos x\,dx=-2\int\sin^2 x\,d(\sin x)=-2\cdot\frac{\sin^3 x}{3}=-\frac{2}{3}\sin^3 x+A_1,$$

$$C_2(x)=\int\left[\sin(2x)\cos x\right]dx=2\int\sin x\cos^2 x\,dx=-2\int\cos^2 x\,d(\cos x)=-2\cdot\frac{\cos^3 x}{3}=-\frac{2}{3}\cos^3 x+A_2.$$

где A_1, A_2 − постоянные интегрирования.

Теперь подставим найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу для $y_1(x)$ и запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \left[-\frac{2}{3}\sin^3 x + A_1\right]\cos x + \left[-\frac{2}{3}\cos^3 x + A_2\right]\sin x$$

$$= A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x\sin x = A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{2}{3}\sin x\cos x\left(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}\right)$$

$$= A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{1}{3}\cdot 2\sin x\cos x = A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x).$$

Пример 2

Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 6y = 36x$.

Решение.

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Правая часть заданного уравнения представляет собой линейную функцию $f(x) = ax + b$. Поэтому будем искать частное решение в виде

$$y_1 = Ax + B.$$

Производные равны:

$$y_1' = A, \quad y_1'' = 0.$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, получаем:

$$0 + A - 6(Ax + B) = 36x,$$

$$A - 6Ax - 6B = 36x.$$

Последнее уравнение является тождеством, то есть справедливо для всех x, поэтому приравняем коэффициенты при слагаемых с одинаковыми степенями x в левой и правой части:

$$\begin{cases} -6A = 36 \\ A - 6B = 0 \end{cases}.$$

Из полученной системы находим: $A = -6$, $B = -1$. В результате, частное решение записывается в виде

$$y_1 = -6x - 1.$$

Теперь найдем общее решение однородного дифференциального уравнения. Вычислим корни вспомогательного характеристического уравнения:

$$k^2 + k - 6 = 0, \quad D = 1 - 4\cdot(-6) = 25, \quad k_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = -3, 2.$$

Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(x) = C_1\exp(-3x) + C_2\exp(2x).$$

Итак, общее решение исходного неоднородного уравнения выражается формулой

$$y = y_0 + y_1 = C_1\exp(-3x) + C_2\exp(2x) - 6x - 1.$$

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 5y' + 4y = \exp(4x)$.

Решение.

Сначала решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$. Корни характеристического уравнения равны:

$$k^2 - 5k + 4 = 0, \quad D = 25 - 4\cdot 4 = 9, \quad k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4,1.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения записывается как

$$y_0(x) = C_1 \exp(4x) + C_2 \exp(x),$$

где C_1, C_2 − постоянные числа.

Найдем теперь частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Заметим, что показатель экспоненциальной функции в правой части совпадает с корнем $k_1 = 4$ характеристического уравнения. Поэтому будем искать частное решение в виде

$$y_1 = Ax \exp(4x).$$

Производные равны:

$$y_1' = \left[Ax \exp(4x)\right]' = A\exp(4x) + 4Ax\exp(4x) = (A + 4Ax)\exp(4x).$$

$$y_1'' = \left[(A + 4Ax)\exp(4x)\right]'' = 4A\exp(4x) + (4A + 16Ax)\exp(4x) = (8A + 16Ax)\exp(4x).$$

Подставляя функцию y_1 и ее производные в дифференциальное уравнение, получаем:

$$(8A + 16Ax)\exp(4x) - 5(A + 4Ax)\exp(4x) + 4Ax\exp(4x) = \exp(4x),$$

$$8A + \cancel{16Ax} - 5A - \cancel{20Ax} + \cancel{4Ax} = 1,$$

$$3A = 1,$$

$$A = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y_1 = \frac{x}{3}\exp(4x).$$

Теперь можно записать полное решение неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + y_1 = C_1 \exp(4x) + C_2 \exp(x) + \frac{x}{3}\exp(4x).$$

Пример 4

Найти общее решение уравнения $y'' + 9y = 2x^2 - 5$.

Решение.

Сначала определим общее решение соответствующего однородного уравнения. Вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2 + 9 = 0, \quad \Rightarrow k^2 = -9, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i.$$

Следовательно, решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(x) = C_1 \cos(3x) + C_1 \sin(3x).$$

Построим теперь частное решение. Правая часть в заданном уравнении является квадратичной функцией. Поэтому попробуем найти частное решение в аналогичной форме:

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C,$$

где числа A, B, C можно определить методом неопределенных коэффициентов. В результате получаем:

$$y_1' = 2Ax + B, \qquad y_1'' = 2A$$

Подставляем это в исходное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$2A + 9\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - 5,$$

$$2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - 5.$$

Приравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми степенями x, находим:

$$\begin{cases} 9A = 2 \\ 9B = 0 \\ 2A + 9C = -5 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{9} \\ B = 0 \\ C = -\dfrac{49}{81} \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение определяется формулой $y_1 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{49}{81}.$

Тогда общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения выражается в виде:

$$y = y_0 + y_1 = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{2}{9}x^2 - \frac{49}{81}.$$

Пример 5

Решить дифференциальное уравнение $y'' + 16y = 2\cos^2 x$.

Решение.

Прежде всего, решим соответствующее однородное уравнение. Характеристическое уравнение имеет корни:

$$k^2 + 16 = 0, \quad \Rightarrow k^2 = -16, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \pm 4i,$$

так что общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(x) = C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x).$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Представим правую часть как

$$2\cos^2 x = \cos(2x) + 1.$$

Отсюда следует, что частное решение определяется функцией

$$y_1 = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C,$$

где числа A, B и C можно вычислить, используя метод неопределенных коэффициентов. Первая и вторая производные функции y_1 равны:

$$y_1' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x),$$

$$y_1'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, находим:

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 16\left[A\cos(2x) + B\sin(2x) + C\right] = \cos(2x) + 1,$$

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 16A\cos(2x) + 16B\sin(2x) + 16C = \cos(2x) + 1,$$

$$12A\cos(2x) + 12B\sin(2x) + 16C = \cos(2x) + 1.$$

Последнее выражение является тождеством. Поэтому можно записать следующую систему уравнений для определения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 12B = 0, \\ 16C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{12} \\ B = 0 \\ C = \dfrac{1}{16} \end{cases}.$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_1 = \frac{1}{12}\cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

Соответственно, общее решение неоднородного уравнения записывается как

$$y = y_0 + y_1 = C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x) + \frac{1}{12}\cos(2x) + \frac{1}{16}.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1: Проинтегрировать дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

1. $y'' = \dfrac{(y')^2}{x^2}$; Ответ: $y = -\dfrac{1}{C_1}\left(x + \dfrac{1}{C_1}\ln\left|x - \dfrac{1}{C_1}\right|\right) + C_2$
2. $y^3 y'' = 1$; Ответ: $\sqrt{2C_1 y^2 - 1} = 2C_1(C_2 \pm x)$
3. $y'' = 2yy'$; Ответ: $arctg\,\dfrac{y}{\sqrt{C_1}} = \sqrt{C_1}(x + C_2)$
4. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$; Ответ: $y = \pm\dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(1 + C_1 x)^3} + C_2$
5. $(y')^2 + 2yy'' = 0$; Ответ: $\dfrac{2}{3}y\sqrt{y} = C_1 x + C_2$
6. $y'' = x + \cos x$; Ответ: $y = \dfrac{x^3}{6} - \cos x + C_1 x + C_2$
7. $(y'')^2 - 5y' + 6 = 0$; Ответ: $y = \dfrac{6}{5} \pm \dfrac{(C_1 \pm x)^3}{12} + C_2$
8. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$; Ответ: $y = C_1\int e^{-arctgx}dx - x + C_2$
9. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$; Ответ: $y = \dfrac{xe^{xC_1+1}}{C_1} - \dfrac{xe^{xC_1+1}}{C_1^{\,2}} + C_2$

10. $y'' - \frac{x}{1-x^2} y' = \frac{2}{1-x^2}$; Ответ: $y = C_1 \arcsin x + \arcsin^2 x + C_2$

11. $2xy''y' = (y')^2 - 1$; Ответ: $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{C_1}} \sqrt{(1+xC_1)^3} + C_2$

12. $yy'' + 1 = (y')^2$; Ответ: $\ln\left|yC_1 + \sqrt{1 + C_1^{\,2} y^2}\right| = C_1(C_2 \pm x)$

13. $1 + (y')^2 = yy''$; Ответ: $\ln\left|yC_1 + \sqrt{y^2 C_1^{\,2} - 1}\right| = C_1(C_2 + x)$

14. $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$; Ответ: $\ln|2y+3| = 2(C_1 x + C_2)$

15. $yy'' - (y')^2 = 0$; Ответ: $y = e^{C_1 x + C_2}$

16. $a^2 y'' = 1 + (y')^2$; Ответ: $y = -a^2 \ln\left|\cos(\frac{1}{a^2} x + C_1)\right| + C_2$

17. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$; Ответ: $\ln\left|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 2C_1}\right| = C_2 \pm x$

18. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$; Ответ: $y = (1-x)e^{x+C_1} + e^{x+C_1} + C_2$

19. $y''(1+y) = (y')^2 + y'$; Ответ: $\ln|C_1 y + C_1 - 1| = C_1(x + C_2)$

20. $y'' = y^{-\frac{1}{2}} y'$; Ответ: $\sqrt{y} - \frac{C_1}{2} \ln\left|2\sqrt{y} + C_1\right| = x + C_2$

21. $3y' - y'' = 2y$; Ответ: $\ln\sqrt{C_1 + 2y} = x + C_2$

22. $y''(x-1) - y' = 0$; Ответ: $y = 0{,}5C_1(x-1)^2 + C_2$

23. $yy'' = (y')^2$; Ответ: $\ln y = C_1 x + C_2$

24. $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$; Ответ: $\ln\frac{y}{y + C_1} = C_1(x + C_2)$

25. $4y'' = \frac{1}{4\sqrt{x}}$; Ответ: $y = \frac{\sqrt{x}}{8} + C_1 x + C_2$

26. $y''y^3 = 1$; Ответ: $\frac{1}{2C_1}\sqrt{2C_1 y^2 - 1} = x + C_2$

27. $3y'y'' = 2$; Ответ: $y = 0{,}5(2C_1 + \frac{4}{3}x)^{\frac{3}{2}} + C_2$

28. $y'' = (\frac{y'}{x}) + \frac{x^2}{y'}$; Ответ: $y = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{(x+C_1)^5}}{5} - \frac{C_1}{3}\sqrt{(x+C_1)^3}) + C_2$

29. $y'' = 1 + e^x$; Ответ: $y = 0{,}5x^2 + e^x + C_1 x + C_2$

30. $y'' - 9y = 0$; Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$

Задание 2: Найти частные решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях. Использовать метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных).

1. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$; $y(0) = 3, y'(0) = 0$

   Ответ: $y = 3\cos \pi x + \cos \pi x \cdot \ln|\cos \pi x| + \pi x \cdot \sin \pi x$

2. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$; $y(0) = \ln 4, y'(0) = 3(1 - \ln 2)$

Ответ: $y=-1+\ln 16-\ln\left|1+e^{3x}\right|+e^{3x}+3xe^{3x}-e^{3x}\ln\left|1+e^{3x}\right|$

3. $y''+4y=8ctg\,2x$; $y(\frac{\pi}{4})=5, y'(\frac{\pi}{4})=4$

Ответ: $y=-\cos 2x+5\sin 2x+2\sin 2x\cdot\ln|tgx|$

4. $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{1+e^{-2x}}$; $y(0)=1+2\ln 2, y'(0)=6\ln 2$

Ответ: $y=e^{4x}\cdot\ln\left|1+e^{-2x}\right|+e^{2x}\cdot\ln\left|1+e^{-2x}\right|+e^{4x}+e^{2x}-e^{3x}$

5. $y''-9y'+18y=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$; $y(0)=y'(0)=0$

Ответ: $y=e^{6x}\left(\ln 2-\ln\left|1+e^{-3x}\right|\right)+e^{3x}\left(\ln 2-3x-\ln\left|1+e^{-3x}\right|\right)$

6. $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\sin\pi x}$; $y(\frac{1}{2})=1, y'(\frac{1}{2})=\dfrac{\pi^2}{2}$

Ответ: $y=-\pi x\cdot\cos\pi x+\sin\pi x(1+\ln|\sin\pi x|)$

7. $y''+\dfrac{1}{\pi^2}y=\dfrac{1}{\pi^2\cos\frac{x}{\pi}}$; $y(0)=2, y'(0)=0$

Ответ: $y=\cos\dfrac{x}{\pi}\left(\ln\left|\cos\dfrac{x}{\pi}\right|+2\right)+\dfrac{x}{\pi}\sin\dfrac{x}{\pi}$

8. $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$; $y(0)=4\ln 4, y'(0)=3(3\ln 4-1)$

Ответ: $y=\ln\left|3+e^{-3x}\right|\left(1+3e^{3x}\right)$

9. $y''+y=4ctgx$; $y(\frac{\pi}{2})=4, y'(\frac{\pi}{2})=4$

Ответ: $y=4\sin x-4\cos x+4\sin x\cdot\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|$

10. $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{2+e^{2x}}$; $y(0)=1+3\ln 3, y'(0)=10\ln 3$

Ответ: $y=\ln\left|2+e^{2x}\right|\cdot\left(2+e^{4x}\right)-2e^{4x}+e^{4x}\ln 3+e^{2x}\left(3-\ln 3\right)$

11. $y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$; $y(0)=-\dfrac{3}{2}\ln 3, y'(0)=5\ln 3$

Ответ: $y=-e^{-4x}\ln\left|2+e^{2x}\right|+e^{-2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\ln\left|2+e^{2x}\right|\right)$

12. $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}$; $y(\frac{\pi}{6})=4; y'(\frac{\pi}{6})=\dfrac{3\pi}{2}$

Ответ: $y=-3x\cos 3x+\sin 3x\cdot\left(4+\ln|\sin 3x|\right)$

13. $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x}$; $y(0)=1; y'(0)=0$

Ответ: $y=\cos 3x\cdot\left(1+\ln|\cos 3x|\right)+3x\sin 3x$

14. $y''-y'=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$; $y(0)=\ln 27; y'(0)=\ln 9-1$

Ответ: $y=\ln\left|2+e^{-x}\right|\left(1+2e^{x}\right)$

15. $y''+4y=4ctg\,2x$; $y(\frac{\pi}{4})=3; y'(\frac{\pi}{4})=2$

Ответ: $y=\sin 2x\left(3+\ln|tgx|\right)$

16. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{3+e^{-x}}$; $y(0)=1+8\ln 2; y'(0)=14\ln 2$

Ответ: $y=e^{x}+e^{x}\ln\left|3+e^{-x}\right|\cdot\left(3e^{x}+1\right)$

17. $y''-6y'+8y=\dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$; $y(0)=-2\ln 2; y'(0)=-6\ln 2$

Ответ: $y=-e^{2x}\left(2x+\ln\left|1+e^{-2x}\right|\right)-e^{4x}\ln\left|1+e^{-2x}\right|$

18. $y''+16y=\dfrac{16}{\sin 4x}$; $y(\frac{\pi}{8})=-\frac{3}{4}; y'(\frac{\pi}{8})=2\pi$

Ответ: $y=-4x\cos 4x+(\ln|\sin 4x|-\frac{3}{4})\sin 4x$

19. $y''+16y=\dfrac{16}{\cos 4x}$; $y(0)=3$; $y'(0)=0$

Ответ: $y=\cos 4x\left(3+\ln|\cos 4x|\right)+4x\sin 4x$

20. $y''-2y=\dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$; $y(0)=\ln 4; y'(0)=\ln 4-2$

Ответ: $y=\ln\left|1+e^{-2x}\right|\cdot(1+e^{2x})$

21. $y''+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}ctg\,\frac{x}{2}$; $y(\pi)=2; y'(\pi)=\frac{1}{2}$

Ответ: $y=\sin\frac{x}{2}(2+\ln\left|tg\,\frac{x}{4}\right|)$

22. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{2+e^{-x}}$; $y(0)=1+3\ln 3; y'(0)=5\ln 3$

Ответ: $y=e^{x}\left(1+\ln\left|2+e^{-x}\right|+2e^{x}\ln\left|2+e^{-x}\right|\right)$

23. $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{x}}$; $y(0)=y'(0)=0$

Ответ: $y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln 3+1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|2+e^{x}\right|\right)+e^{-2x}\left(\ln 3-1-\ln\left|2+e^{x}\right|\right)$

24. $y''+4y=\dfrac{4}{\sin 2x}$; $y(\frac{\pi}{4})=2; y'(\frac{\pi}{4})=\pi$

Ответ: $y=-2x\cos 2x+\sin 2x\left(2+\ln|\sin 2x|\right)$

25. $y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2x}$; $y(0)=2; y'(0)=0$

Ответ: $y=\cos 2x(2+\ln|\cos 2x|)+2x\sin 2x$

26. $y''+y'=\dfrac{e^{x}}{2+e^{x}}$; $y(0)=\ln 27; y'(0)=1-\ln 9$

Ответ: $y=1+\ln\left|2+e^{x}\right|+2e^{-x}\ln\left|2+e^{x}\right|$

27. $y''+y=2ctgx$; $y(\frac{\pi}{2})=1; y'(\frac{\pi}{2})=2$

Ответ: $y=-\sin 2x+\sin x\left(1+2\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+2\cos x\right)$

28. $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$; $y(0)=1+2\ln 2; y'(0)=3\ln 2$

Ответ: $y=e^{x}(3+\ln\left|1+e^{-x}\right|)+e^{2x}\left(\ln\left|1+e^{-x}\right|-e^{-x}-1\right)$

29. $y''-3y'+2y=\frac{e^{x}}{1+e^{-x}}$; $y(0)=-2\ln 2; y'(0)=-3\ln 2$

Ответ: $y=e^{x}\left(-2\ln 2+\ln\left|1+e^{x}\right|-x\right)-e^{2x}\ln\left|1+e^{-x}\right|$

30. $y''+y=\frac{1}{\sin x}$; $y(\frac{\pi}{2})=1; y'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$

Ответ: $y=-x\cos x+\sin(1+\ln|\sin x|)$

Задание 3: Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью (найти общее решение).

1. $y''+y=1$; Ответ: $y=C_1+C_2e^{-x}+x$
2. $y''-6y'+9y=e^{x}$; Ответ: $y=e^{3x}(C_1x+C_2)+0{,}25e^{x}$
3. $y''+9y=x\sin 2x$; Ответ: $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{x}{5}\sin 2x-\frac{4}{25}\cos 2x$
4. $y''+y=x^2+x$; Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2+x-2$
5. $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$; Ответ: $y=e^{-2x}\left(4x^2+C_1x+C_2\right)$
6. $y''+8y'=8x$; Ответ: $y=C_1+C_2e^{-8x}+0{,}5x^2-\frac{x}{8}$
7. $y''+4y'+3y=9e^{3x}$; Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{9}{24}e^{3x}$
8. $y''-y=\cos x$; Ответ: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}-0{,}5\cos x$
9. $y''-y'=e^{x}\sin x$; Ответ: $y=C_1e^{x}+C_2-0{,}5e^{x}(\sin x+\cos x)$
10. $y''-2y'+y=x^3$; Ответ: $y=e^{x}(C_1x+C_2)+x^3+6x^2+18x+24$
11. $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$; Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{12}\cos 5x-\frac{1}{8}\sin 5x$
12. $y''+y'+y=\sin x$; Ответ: $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\cos x$
13. $y''+3y'=3xe^{-3x}$; Ответ: $y=C_1+C_2e^{-3x}+xe^{-3x}\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)$
14. $y''+2y'+y=2-x^3$; Ответ: $y=e^{-x}\left(C_1x+C_2\right)-x^3+6x^2-18x+24$
15. $y''+4y'+4y=8\sin 2x$; Ответ: $y=e^{-2x}\left(C_1x+C_2\right)-\cos 2x$
16. $y''+25y=50e^{5x}$; Ответ: $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x+e^{5x}$
17. $y''+y'-2y=x^2e^{4x}$; Ответ: $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+e^{4x}\left(\frac{x^2}{18}-\frac{x}{18}-\frac{1}{324}\right)$
18. $y''+16y=24\sin 6x-12\cos 6x$; Ответ:

$y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x-\frac{6}{5}\sin 6x+\frac{3}{5}\cos 6x$

19. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{3x};$ Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 x + C_2) + e^{3x}\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{12}\right)$

20. $y'' + 2y' + 5y = x^2 + x;$ Ответ: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{25} - \frac{12}{125}$

21. $y'' - 7y' = 49 \cos 7x;$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{7x} - \frac{1}{98}(\cos 7x + \sin 7x)$

22. $y'' - 100y' = 20e^{10x};$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{100x} - \frac{e^{10x}}{45}$

23. $y'' + 6y' + 9y = 1;$ Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 x + C_2) + \frac{1}{9}$

24. $4y'' - y' = 4;$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{4}} - 4x$

25. $y'' + y' = 4x \cos 5x;$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x + 2)\cos x + (-2x + 4)\sin x$

26. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x};$ Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1)$

27. $y'' - 36y' = 6x^2 - 1;$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{36x} - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{216}x^2 - \frac{107}{324}$

28. $y'' - 81y = 9 \sin 9x + 3 \cos 9x;$ Ответ: $y = C_1 e^{-9x} + C_2 e^{9x} - \frac{1}{18}\sin 9x - \frac{1}{54}\cos 9x$

29. $y'' - 49y' = 14e^{7x};$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{49x} - \frac{e^{7x}}{21}$

30. $y'' + y' - 2y = 2x;$ Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - x - 0{,}5$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука, 1970-1977, т.1,2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1975.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1978.
4. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей мвтематики. Под ред. Кручковича Г.И. М.: Высшая школа, 1970.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Для втузов. М.: Высшая школа, 1966.
6. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике.М.: Наука, 1977 и далее.

Корректор ***Эркинбек к. Ж.***
Редактор ***Турдукулова А.К.***
Тех.редактор ***Кочоров А.Д***

Подписано к печати 10.08.2015 г. Формат бумаги 60х84$^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 1,25 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 355. Цена 26,65с.
Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru