КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

И. РАЗЗАКОВ АТЫНДАГЫ КЫРГЫЗ МАМЛЕКЕТТИК ТЕХНИКАЛЫК УНИВЕРСИТЕТИ

ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ

“Математика -2” курсун үйрөнүүдө бардык багыттагы биринчи курстун студенттери үчүн усулдук колдонмо

Бишкек 2015

“Колдонмо математика жана информатика” кафедрасынын жыйынында каралган

Маалымат технологиялар факультетинин усулдук комиссиясынын жыйынында бекитилген

Түзүүчүлөр: Пахыров З.П., Токтогулова А.Ш.

Функциянын предели. Маалымат технологиясы Энергетикалык, Унаа жана машина куруу факультеттеринин жана Башкаруу жана бизнес институтунун студенттери үчүн практикалык сабактардын усулдук көрсөтмөсү. /И.Раззаков атындагы КМТУ; Түз: /-Б.«Текник» ББ, 2015. – 28б.

Сунушталып жаткан усулдук көрсөтмөдө эң керектүү теоретикалык маалыматтар, аныктамалар, формулалар камтылган, ошондой эле типтүү тапшырмалардын кенен чыгарылышы берилген.

Усулдук көрсөтмө функциялардын пределдерин табууда практикалык жардам берүү максатында жазылган. Кыскача теоретикалык материалды жана көп сандаган типтүүмисалдардын кенен чыгарылышын камтыйт. Студенттердин практикалык көнүмдөрүн текшерүү максатында алардын өз алдынча иштөөсү үчүн жекече тапшырмалар берилген.

Усулдук көрсөтмөнү окутуучунун жетекчилиги астында жана материалды өз алдынча үйрөнүүдө да пайдаланууга болот. Бардык мисалдар жооптору менен жазылган.

Рецензент: Иманалиев З.К.

Функциянын предели

Өзгөрүлмө чоңдуктун предели – учурдагы математиканын айрым бир өзгөчө түшүнүгү, анда көптөгөн башка фундаменталдуу түшүнүктөр (функциянын үзгүлтүксүздүгү, туунду, интервал, катарлардын суммасы ж.б.) негизделген.

Аныктама 1. a турактуу саны өзгөрүлмө чоңдук x тин предели деп аталат, эгерде мурунтадан берилген ар кандай кичине δ оң саны үчүн өзгөрүлмө x тин баардык кийинки маанилери

$$|x-a|<\delta$$

барабарсыздыгын канаатандырса.

Эгерде a саны өзгөрүлмө чоңдук x тин предели болот, анда x предели a га умтулат жана төмөнкүчө жазылат:

$$x \to a^{1)} \quad же \quad \lim x = a$$

Аныктама 2. Өзгөрүлмө x чексизге умтулат, эгерде x тин ар бир алдын ала берилген М оң саны үчүн, ага берилген маанисинен баштап, баардык кийинки маанилери үчүн $|x|>M$ болгон барабарсыздык аткарылса.

Эгерде өзгөрүлмөлүү х чексиздикке карай умтулса, анда ал төмөнкүчө жазылат:

$$x \to \infty \quad или \quad \lim x = \infty$$

x өзгөрүлмө чоңдугу өзүнүн пределине ар түрдүү ыкмалар менен умтулат:

1. өзүнүнүн пределинен кичине боюнча калуу (символикалык түрдө $x \to a-0$);
2. өзүнүнүн пределинен чоң боюнча калуу (символикалык түрдө $x \to a+0$);
3. оң маанини кабыл алуу менен гана ($x \to +\infty$);
4. терс маанини кабыл алуу менен гана ($x \to -\infty$);

Ошентип, мындан ары көз карандысыз өзгөрүлмө чоңдук x тин тартибине мүнөздүү пределдүү процесстери деп аталчу төмөнкү абалдарды бөлүп карайбыз:

$$x \to a,\ x \to a-0, x \to a+0, x \to \infty, x \to -\infty, x \to +\infty$$

Жогоруда белгиленген пределдүү процесстердин у = f(x), айрым функциялардын тартибин карап жатып, көз карандысыз чоңдук үчүн окшош учурларды карап жатып, б.а. у чектүү ($y \to в$) же болбосо ($y \to \infty$) умтулат.

у = f(x) функциясынын айрым $x=a$ чекитинин айланасында; $x=a$ чекитинин өзүндө функция болорун жана аныкталбасын карайбыз.

----

1) *эркин мүнөздө х α санына умтулганда ($x<a$ же $x>a$ болушу мүмкүн).*

Аныктама 3. $в$ саны у = f(x) функциясынын x a чекитине **(**же a чекитинде) умтулгандагы предели деп аталат, эгерде каалагандай мурдатан берилген ε оң саны жашаса, анда δ оң саны бардык x үчүн (1) шарты канаатандырылса

$$0<|x-a|<\delta \qquad (1)$$

анда (2) барабарсыздыгы аткарылат

$$|f(x)-в|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Бул учурда төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=в \quad же\ болбосо \quad f(x)\to в \quad x\to a \ болсо$$

Аныктама 4. $в$ саны у = f(x) функциясынын x чексизге умтулгандагы предели деп аталат, эгерде каалагандай $\varepsilon>0$ оң саны үчүн бардык x тин маанилеринде N оң санын көрсөтүүгө мүмкүн болсо, $|x|>N$ шарты канаатандырылса, $|f(x)-в|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат.

Эгерде $x\to\infty$ болгон f(x) функциясынын предели $в$ болсо, анда төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=в \quad же\ болбосо \quad f(x)\to в \quad x\to\infty \ болгондо$$

Ошондой эле предел сол жагынан болсо $\lim\limits_{\substack{x\to a-0\\(x<a)}} f(x)=f(a-0)=в_1$

жана предел оң жагынан болсо $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\(x>a)}} f(x)=f(x+0)=в_2$

Эгерде бир жактуу пределдери барабар экендигин белгилесек,

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=в$$

анда $в$ предели $x=a$ чекитинде жашайт жана бир жактуу пределдери барабар

$$\lim_{x\to a} f(x)=в$$

Эгерде бир жактуу пределдер ар түрдүү болушса

$$\lim_{x\to a-0} f(x)\neq \lim_{x\to a+0} f(x)=в \qquad \text{т.е. } в_1\neq в_2$$

же болбосо, жок дегенде алардын бирөөсү жашабаса анда $x=a$ чекитинде функциянын предели болбойт.

Качан гана, пределдик процесс маанилүү болбойт деген айрым бекемдөөлөр болгондо, же болбосо бекемдөөлөр ар кандай процесстерге салыштырмалуу туура болсо, анда төмөнкүчө жазылат $\lim f(x)$.

Бул киргизилген аныктамалар пределдерди табуунун эрежелерин бербей тургандыгын эске тутуу керек. Алардын жардамы менен конкреттүү сан берилген функциянын предели болотургандыгын гана текшерүүгө жана ошондой эле ар түрдүү теоретикалык бекемдөөлөрдү далилдөөгө болот.

Пределдерди табуу үчүн пределдердин касиеттерин колдонуу менен, арифметикалык амалдарга пределдик өтүү эрежелери болгон пределдердин касиеттерин колдонуу менен пределдерди табууну колдонушат.

$$\lim C = C, \quad C - const \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x) \tag{4}$$

$\lim\limits_{x\to a} f(x), \quad \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ *жашаса*, анда

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} \varphi(x) \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} \varphi(x) \tag{6}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}, \quad \text{эгерде} \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) \neq 0 \tag{7}$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \tag{8}$$

$$\lim_{x\to a} в^{\varphi(x)} = в^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \tag{9}$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{к} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{к} \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a}\left[\log_{в} f(x)\right]^{\varphi(x)} = \log_{в}\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \tag{11}$$

(эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$)

Ошондой эле биринчи сонун предел жана анын ар түрүн колдонобуз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{Sinx}{x} = 1 \quad (12_1), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{Sinx} = 1 \quad (12_2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1 \quad (12_3), \quad \lim_{x\to 0} \frac{arcSinx}{x} = 1 \quad (12_4), \quad \lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1 \quad (12_5)$$ жана

экинчи сонун предел жана анын ар түрүн:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad (13_1), \quad \lim_{x\to 0}\left(1 + x\right)^{1/x} = e \quad (13_2) \qquad e = 2{,}71828\ldots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1 \quad (13_3), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \quad (13_4).$$

x санынын логарифмасы е негизи боюнча натуралдык логарифма деп атайбыз жана төмөнкүчө белгилейбиз $\ln x$ (ln1 = 0, lne = 1).

Бардык функциялардын ичинен, кайсы функция нөлгө умтулса, ошол функция кызыгууну жаратат.

Аныктама 5. Эгерде $\lim \alpha(x)=0$ болсо, анда функция $\alpha=\alpha(x)$ чексиз кичине (ч/к) функция деп аталат

Мисалы, функция $\alpha(x)=(x-2)^2$ $x\to 2$ умтулганда чексиз кичине функция болсо, анда $\lim\limits_{x\to 2}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$.

Функциянын предели жөнүндөгү түшүнүктөрү эске алып, чексиз кичине [1)] деген аныктаманы төмөнкүчө айтсак болот.

Аныктама 6. Функция $\alpha=\alpha(x)$ функциясычексиз кичине деп аталат, эгерде $x\to a$ умтулуп, $\varepsilon>0$, бардык x үчүн $\delta>0$ саны табылып, $|x-a|<\delta$ шарты канаатандырылса, анда $|\alpha(x)|<\varepsilon$ орун алат.

Ч/к функциясы төмөнкү касиеттерге ээ:

1. Чексиз кичине чектелген сандардын алгебралык суммасы ч/к.
2. Чексиз кичиненин чектелген функцияга болгон көбөйтүндүсү ч/к болот.
3. Эки чексиз кичине көбөйтүндүсү чексиз кичине
4. Чексиз кичине туруктуу санга көбөйтүндүсү чексиз кичине болот

Аныктама 7. $\beta(x)$ функциясы чексиз чоңдук (ч/ч) деп аталат, эгерде кээ бир учурда $\lim \beta(x)=\infty$[2)] болсо

----

1) *“Чексиз кичине” деген терминди жалгыз бир мааниге ээ болгон өтө кичинекей сан деп түшүндүрүүгө мүмкүн эмес.чексиз кичине чоңдук өзгөрмө чоңдук, ал пределдөө процесинде $\varepsilon>0$ оң саны карчылык кичинекей болсо, да модулу боюнча $\mathcal{E}$ санынан кичине боло алат. Башкача айтканда эч кандай нөлдөн айырмаланган эң кичинекей санды чексиз кичине чоңдук деп кабыл алууга болбойт.*

2) *Студенттер чексизди предел деп түшүнүшпөсү керек башкача айтканда предел бул сан, ал эми чексиздик сан эмес: чексиз чоң жана чексиз кичине деген түшүнүктөр- бул болгону чоңдуктар.*

Аныктама 8. $\beta(x)$ функциясы ч/ч деп аталат, эгерде каалагандай $N>0$ бардык x тин маанисинде $\delta>0$ саны табылып, $|x-a|<\delta$ шарты канаатандырылса, анда $|\beta(x)|>N$ барабарсыздыгы аткарылат.

Бул учурда төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{x\to a}\beta(x)=\infty \text{ же болбсо } \beta(x)\to\infty \quad x\to a$$

Мисалы, $f(x)=\log_a x$ функциясы $x\to 0$ умтулганда чексиз чоң функция болот. Эгерде $f(x)$ функциясы чексизге умтулганда $x\to a$ умтулгандагы учурун оң жана терс маанилерин төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

Эгерде $f(x)$функциясы чексизге умтулганда $x\to\infty$ ге умтулган учуру төмөнкүчө жазылат:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\,.$$

Чексиз чоң функция төмөнкү касиеттерге ээ:

1. Эгерде $\alpha(x)$ функциясы чектелген пределге ээ болсо, ал эми $\beta(x)$ ч/ч функция болсо, анда алардын суммасы дагы ч/ч функция болот.
2. Эки ч/ч функциялардын суммасы жана көбөйтүндүсү дагы ч/ч функция болушат.

Теорема 1. а) Эгерде $\beta(x)$ айрым процесстерде ч/ч функция болсо, анда

$\dfrac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичине.

б) Эгерде $\alpha(x)$ ч/к болсо, анда $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ функциясы ч/ч.

Төмөнкү мисалдарды карайлы:

Мисал 1. Тапкыла $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x+4)$.

Чыгаруу. (3), (4), (5) формулаларын колдонуп, төмөнкүлөрду алабыз:

$$\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+4)=2\lim_{x\to 1}x^2-3\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4=2\cdot 1^2-3\cdot 1+4=3$$

Мисал 2. Тапкыла $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\,Sinx$.

Чыгаруу. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\,Sinx \overset{(6)^{1)}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Sinx=\frac{\pi}{2}\cdot Sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Мисал 3. Тапкыла $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x+9}{x^2+3x+7}$.

Чыгаруу. (7) формуланы колдонордун алдында бөлчөктүн бөлүмү $x=-1$ болгондо нөлгө барабар эместигин текшеребиз.

Текшерүү: $(-1)^2+3(-1)+7=5\neq 0$;

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x+9}{x^2+3x+7}\overset{(7)}{=}\frac{\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+x+9)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x+7)}\overset{(3)-(5)}{=}\frac{2\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}x+\lim\limits_{x\to -1}9}{\lim\limits_{x\to -1}x^2+3\lim\limits_{x\to -1}x+\lim\limits_{x\to -1}7}=$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^2+(-1)+9}{(-1)^2+3\cdot(-1)+7}=\frac{10}{5}=2$$

Мисал 4. Тапкыла $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+3}$.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+3}\overset{(7)}{=}\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}\overset{(3),(5)}{=}\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}=\dfrac{0}{5}=0$

Мисал 5. Тапкыла $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$.

Чыгаруу. Пределдин алымы $x\to 2$ умтулган учурда: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$

Пределдин бөлүмү: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-6)=0$.

Бөлчөктүн предели жөнүндөгү (7) формуланы колдонууга болбойт.

$\dfrac{x^2+x-6}{2x+1}$ тескери бөлчөгүн карайбыз жана анын $x\to 2$ умтулгандагы предели $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}=\dfrac{0}{5}=0$ (бул учурда бөлчөктүн предели жөнүндөгү (7) формуланы колдонууга болот, анткени бөлчөктүн бөлүмү 2x + 1 нөлгө барабар эмес). $\dfrac{x^2+x-6}{2x+1}$ функциясынын предели 0 го барабар болгондуктан, $x\to 2$умтулганда функция чексиз кичине , ал эми $\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}$ функциясы $x\to 2$умтулганда чексиз чоң жана анын предели $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}=\infty$ (биз теорема 1 ди колдондук).

Чыгаруу үчүн көнүгүүлөр

1.1 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-7x+2)$ (жообу - 8).

1.2 $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+2x-1)$ (жообу 3)

1.3 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^2+5x+1\right)$ (жообу 13).

1.4 $\lim\limits_{x\to 0} xe^x$ (жообу 0).

1.5 $\lim\limits_{x\to e} x^2\ln x$ (жообу e^2).

1.6 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} 8x\,tgx$ (жообу $\sqrt{2}\pi$).

1.7 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x+3}$ (жообу 0).

1.8 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$ (жообу 0).

1.9 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$ (жообу 1).

1.10 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+1}{4x^2-x+3}$ (жообу 1).

1.11 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x-2}$ (жообу ∞).

1.12 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{2x^2-x-6}$ (жообу ∞).

1.13 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+x+1}{4x^3-x^2+x}$ (жообу $-\frac{1}{3}$).

1.14 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+4x-1}{3x^2+x+2}$ (жообу $\frac{2}{3}$).

1.15 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-2x^2)$ (жообу ∞)

1.16 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2}{x-4}$ (жообу ∞)

1.17 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x+2}{2x+3}$ (жообу 2)

1.18 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (жообу 1)

1.19 $\lim\limits_{x\to 2}(3x)^{x^2}$ (жообу 1296)

1.120 $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$ (жообу 0)

1.21 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{8}{x^2}}$ (жообу $\frac{1}{64}$)

1.22 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$ (жообу 0)

1.23 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin x$ (жообу $\frac{\pi}{6}$)

1.24 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+5}{x^2+3x+7}$ (жообу $\frac{3}{5}$)

1.25 $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2)^{\lg x}$ (жообу 1)

Ч/к жана ч/ч чоңдуктардын функцияларынын касиеттерин колдонуп, айрым ч/к жана ч/ч функциялардын үстүнөн жүргүзүлгөн айрым операциялардын тартибинин мүнөзүн жана жыйынтыгын оңой эле алдын ала айтууга болот. Көпчүлүк учурда функциялардын тартибинин мүнөзүн алдын ала айтууга мүмкүн болбойт, анткени анын өзүнүн мүнөзү функциянын өзүнө жараша болот. Мисалы, мына, ч/к жана ч/ч функциялардын көбөйтүндүсүнө карата алдын ала эч нерсе айтууга мүмкүн эмес, б.а. $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ болгон учурда. Мындай көбөйтүндү ч/к же ч/ч же болбосо чектелген функцияларды бере алат. Ошондуктан, айрым процесстерде каралган $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ көбөйтүндүсү жөнүндө "аныксыздык" деп айтылат жана символикалык түрдө $[0\cdot\infty]$ деп белгиленет. $\lim[\alpha(x)\cdot\beta(x)]$- пределин табуу деген, $[0\cdot\infty]$ түрүндөгү аныксыздыкты "ачуу" дегенди билдирет. Көрсөтүлгөндөн сырткары көп учурда төмөнкү аныксыздыктарды кароого туура келет:

$\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$, $\left[\infty^{\circ}\right]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{\circ}\right]$, бул аныксыздыктарды $[0\cdot\infty]$ түрүндөгү аныксыздык сыяктуу түшүнөбүз.

Жогорудагы каралган маселелердин чыгаруусу көрсөткөн сыяктуу жөнөкөй учурда пределди табуу берилген туюнтмадагы аргументтин пределдүү маанисине коюууга алып келет. Бирок, көп учурда пределди табуудан мурун, берилген туюнтамны өзгөртүп түзүүгө туура келет.

Өзгөртүп түзүүнү кайсы учурда жана кандай ыкманы колдонуу пайдаланылат?

I. Эки көп мүчөнүн катышы менен берилген учурдагы аныксыздык $\frac{0}{0}$ болгон түрү.

Мисал 6. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ пределин табуу.

Чыгаруу. Бөлчөктүн бөлүмү $x = 2$ болгондо бөлчөктүн бөлүмү нөл болуп кеткендиектен, $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ функциясы $x = 2$ болгондо жашабайт. Бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабр болгондуктан бөлчөктүн предели жөнүндөгү (7) формуланы колдонууга болбойт. Бирок, функциянын пределинин аныктамасы өзүнө төмөнкү орчундуу белгилеп кетүүнү камтыйт: $x\to a$ умтулганда $f(x)$ функциясынын пределин табуу үчүн $x=a$ болгондо $f(a)$ функциясынын маанисин карабай койсо болот. Бул аныктама $f(x)$ функциясынан $x=a$ болгондогу чекитте функциянын жашоо чөйрөсүнө кирүүсүн талап кылбайт. Ошондуктан $x=a$ маанисине көңүл бурбай койсок деле болот. Так айтылган бул ойлонуу маселени чыгаруу мүмкүндүк берет. Биздин учурда x 2 ге умтулганда, эч качан 2 ге барабар болбойт, ошондуктан $\frac{x^3-8}{x-2}$ функциясынын мааниси $x = 2$ болгондо бизди кызыктырбайт..

Эгер $x = 2$ болсо бөлчөктүн алымы да, бөлүмү да нөлгө айланып кетет. Бул учурда биз эки ч/к жана ч/ч функциялардын катышын алабыз, андыктан алар жөнүндө атайын изилдөөсүз анык эч нерсе айта албайбыз. Мисалды чыгаруу үчүн $\frac{x^3-8}{x-2}$ функциясынын алымын да, бөлүмүн да (x - 2) ге бөлөбүз. Мында $x = 2$ болгон мааниси каралбагындыктан, $x-2\neq 0$ деп жазып алууга толук укугубуз бар.

Эгерде функциянын пределинин аныктамасында көрсөтүлүп кеткен орчундуу белгилеп кетүү болбосо, биз $x = 2$ маанисин да кароого милдетүү болмокбуз, анда бөлчөктүн алымын да, бөлүмүн да (x - 2) ге бөлө албайт болчубуз. Анткени, мындай бөлүү бөлчөктүн алымын да, бөлүмүн да нөлгө бөлүү болуп калмак. Мындай бөлүүгө мүмкүн эмес. Берилген бөлчөктүн алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратып жана (x - 2) ге кыскарткандан кийин төмөнкүгө ээ болобуз,

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}=x^2+2x+4$$

Биз эми берилген функциянын пределин эмес x^2+2x+4 функциясынын пределин табуу керек болуп калат. Анда мындай суроо туулушу мүмкүн: $\frac{x^3-8}{x-2}$ жана x^2+2x+4 функциялары теӊдешби деген. Бул суроо оӊ жоопко ээ: x = 2 маанисин карабаган учурда функциялар теӊдеш. Мындан төмөнкүлөр келип чыгат: эки функция теӊдеш болот, эгерде алар эки талапты канаатандырса:

1) алардын жашоо чөйрөсү дал келишсе;

2) функциянын жашоо чөйрөсүнөн алынган аргументтердин маанилери бирдей болуп, функциялардын сан маанилери барабар болгон учурда.

Биздин учурда x = 2 маанисин карабаганда, чындыгында бул маани каралбайт, бул талаптар аткарылат . Б.а.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=$$
$$=2^2+4+4=20$$

Мисал 7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. Мында $x\to1$ умтулганда алымы да, бөлүмү да ч/к. Катыштын пределин чыгаруу үчүн бөлчөктүн алымын да, бөлүмүн да (x - 1) бөлүп, (x - 1) ге кыскартабыз. (x - 1) ге бөлүүнү төмөнкүчө жүргүзсөк болот:

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^3-x^2 & x^2-1 \\ \text{----------} & \\ -x+1 & \\ -x+1 & \\ \text{----------} & \\ 0+0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \cline{2-2} x^3-x^2 & x^2+x-2 \\ \text{-------------} & \\ x^2-3x+2 & \\ x^2-x & \\ \text{---------------} & \\ -2x+2 & \\ -2x+2 & \\ \text{---------------} & \\ 0+0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}.$$

Бөлүүдөн кийин алынган функция $x \to 1$ умтулганда кайрадан эле ч/к. Кайрадан ар бирин ($x-1$) ге бөлүү керек. Мындан төмөнкүнү алабыз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}.$$

Эми, бул мисалды чыгаргандан кийин, берилген эки көп мүчөнүн катышынын алымы менен бөлүмү ч/к болгондо, б.а качан алардын пределдери нөлгө барабар болгон учурда, функциянын пределин аныктоо үчүн колдонулуучу эреже сунушталат.

Эреже. ***Качан гана $x \to a$ умтулган учурда бөлчөктүн алымы менен бөлүмүнүн пределдери нөлгө барабар болушкан эки көп мүчолүү катыштар менен берилген функциянын пределин аныктоо үчүн бөлчөктүн бөлүмү менен алымын $(x-a)$ бөлүп, андан кийин пределге өтүү керек. Эгерде мындай кийин да $x \to a$ умтулган учурда жаңы болчөктүн алымы менен бөлүмү нөлгө барабар болуп калса, анда дагы кайрадан $(x-a)$га бөлүү керек. (Бул эреже элементардык алгебрадан белгилүү болгон Безунун теормеасынан келип чыккан, ага ылайык $x=a$ болгондо көп мүчө нөлгө барабар болсо, анда ал калдыксыз $(x-a)$ га бөлүнөт).***

Чыгаруу үчүн көнүгүүлөр

2.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ (жообу 0). 2.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2+x-x^2}{4-x^2}$ (жообу $\frac{3}{4}$).

2.3 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ (жообу -1). 2.4 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$ (жообу $\frac{3}{2}$).

2.5 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ (жообу $\frac{1}{8}$). 2.6 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x-2}$ (жообу $-\frac{4}{3}$).

2.7 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2-x-3}{2x^2-5x+3}$ (жообу 5). 2.8 $\lim\limits_{x\to -\sqrt[3]{2}}\dfrac{x+\sqrt[3]{2}}{x^3+2}$ (жообу $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$).

2.9 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$ (жообу 6). 2.10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$ (жообу $\frac{3}{4}$).

2.11 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$ (жообу $\frac{5}{2}$). 2.12 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$ (жообу 4).

2.13 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ (жообу $-\frac{1}{3}$) 2.14 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$ (жообу $-\frac{1}{6}$)

2.15 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$ (жообу ∞) 2.16 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$ (жообу 0,375)

2.17 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ (жообу 4) 2.18 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$ (жообу -4,5)

2.19 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ (жообу $28\sqrt{7}$) 2.20 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}-2)}{x^2-4}$ (жообу 0)

II. Алымы да, бөлүмү да иррацианалдуу болгон аныксыздыктын $\frac{0}{0}$ болгон учуру.

Мисал 8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $x\to 3$ умтулганда алымынын да, бөлүмүнүн да предели 0 го барабар болгондуктан, алар ч/к чоңдук болушат, б.а. $\frac{0}{0}$ аныксыздыгы пайда болот.

$$\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+6}-3)=0,\ \lim_{x\to 3}(x-3)=0$$

Бул катышты чыгаруу үчүн алгебрадагы белгилүү $(a-в)(a+в)=a^2-в^2$ формуласын колдонуп, бөлчөктүн алымы менен бөлүмүнө ($\sqrt{x+6}+3$) көбөйтүү менен иррацианалдуулукту бөлүмгө көтөрөбүз.

Анда төмөнкүнү алабыз,

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}$$

Бул мисалды чыгарууда биз $f(x)=\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ функциясынын пределин табуунун ордуна $\varphi(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3}$ функциясынын пределин таптык. Мында мисал 4тө пайда болгон суроо кайрадан туулушу мүмкүн, бул эки функция теңдешби деген. $\varphi(x)$ жана $f(x)$ функциялары жөнүндө биз $x\neq 3$ болгондо теңдеш деп айта алабыз. Ошентип, $f(x)$ функциясынын пределин табууда $\varphi(x)$ функциясына алмаштыруу мыйзамдуу болот.

Көп сандаган иррацианалдуу туюнтмаларды камтыган бөлчөктөрдүн пределдерин табууда көпчүлүк учурда берилген функциядан башка функцияга өтүүгө аргасыз болобуз. Ошондо окучуулардын өзгөртүлүп алынган функция берилген функцияга теңдешби деген суроо пайда болууга тийиш. Бирок биз мындан кийинки мисалдарды чыгырууда бул суроону изилдөө боюнча иштебейбиз.

Иррацианалдуу туюнтманы камтыган болчөктүн пределин табууда, качан анын алымы менен бөлүмү ч/к чондук болгон учурда, б.а. алардын пределдери нөл болгондо, мисалды чыгаруу үчүн эреже көсөтүлөт.

Эреже. ***Иррацианалдуу туюнтамны камтыган, алымынын да, бөлүмүнүн да пределдери нөл болгон учурда бөлчөктүн пределин табуу үчүн***

алымдагы иррацианалдуулукту бөлүмгө же бөлүмдөгүсүн алымына которуп, андан кийин керектүү математикалык упражнения (окшош мүчөлөрду топтоо, кыскартуу ж.б.у.с) колдонуп, анан пределге өтүү керек.

Түшүндүрмөсүз жогорку эрежени колдонуу менен чыгарыла турган мисалдарды карайбыз.

Мисал 9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x})(\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x})}{(x+2)(\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+7-3+x}{(x+2)(\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2}{\sqrt{x+7}+\sqrt{3-x}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Мисал 10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Мисал 11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. Мында бөлчөктүн алымы да, бөлүмү да нөлгө барабар. Иррационалдуулукту алымдан бөлүмгө которобуз. Алгебрадагы белгилүү формуланы колдонобуз $(a-в)(a^2+aв+в^2)=a^3-в^3$. $a=\sqrt[3]{x-2}, в=1$ деп алсак, анда алымындагы кубтардын айырмасын алуу үчүн $(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1)$ га көбөйтөбүз. Бөлүмүн да бул чоңдукка көбөйтүп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt[3]{x-2}-1)(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-2-1}{(x-3)(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1}=\frac{1}{3}$$

Мисал 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$ пределин тапкыла.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7x\left(\sqrt[3]{(6x-1)^2}-\sqrt[3]{(6x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}\right)\left(\sqrt[3]{(6x-1)^2}-\sqrt[3]{(6x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}=$$

Чыгаруу . $$=\lim_{x\to 0}\frac{7x\left(\sqrt[3]{(6x-1)^2}-\sqrt[3]{(6x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{6x-1+2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7x\left(\sqrt[3]{(6x-1)^2}-\sqrt[3]{(6x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)}{8x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7}{8}\left(\sqrt[3]{(6x-1)^2}-\sqrt[3]{(6x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)=\frac{7}{8}\cdot(1+1+1)=\frac{21}{8}$$

Көнүгүү үчүн мисалдар

3.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-3}-3}{3-x}$ (жообу $-\dfrac{1}{3}$)

3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ (жообу $\dfrac{2}{3}$)

3.3 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}$ (жообу $-\dfrac{1}{6}$)

3.4 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$ (жообу $\dfrac{1}{2}$)

3.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ (жообу 4)

3.6 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ (жообу $-\dfrac{1}{56}$)

3.7 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$ (жообу $-\dfrac{5}{64}$)

3.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (жообу 1)

3.9 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$ (жообу 1)

3.10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x-1}$ (жообу $-\dfrac{3}{4}$)

3.11 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-2}}{9-x^2}$ (жообу $\dfrac{1}{8}$)

3.12 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{Sin2x}$ (ж. $-\dfrac{3}{4}$)

3.13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ (жообу $\dfrac{1}{2}$)

3.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ (жообу $\dfrac{8}{3}$)

3.15 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$ (жообу $\dfrac{3}{2}$)

3.16 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ (жообу –3)

3.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ (жообу 4)

3.18 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$ (жообу $\dfrac{7}{12}$)

3.19 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x-7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$ (жообу $\dfrac{5}{12}$)

3.20 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$ (жообу 0)

3.21 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$ (жообу $-\dfrac{1}{12}$)

3.22 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ (жообу 12)

3.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ (жообу $\dfrac{1}{3}$)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ (жообу $-\dfrac{2}{3}$)

3.25 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ (жообу -2)

3.26 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ (жообу $\dfrac{3}{2}$)

3.27 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-3}$ (жообу $-\dfrac{1}{6}$)

III. $\dfrac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздык

Мисал 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x-2}{2x^2+5x+9}$ пределин табуу.

Чыгаруу. Бөлчөктүн предели жөнүндөгү (7) формуланы колдонуу үчүн бөлчөктүн алымы да, бөлүмү да пределге ээ болуп, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабар эмес болуусу керек. Бул мисалда (7) формуланы колдонууга болбойт, анткени бөлчоктүн алымынын жана бөлүмүнүн пределдери жашабайт. $x\to\infty$ умтулган учурда функциянын алымы жана бөлүмү ч/ч. Демек, биз эки чексиз чоң чоңдуктун катышын карайбыз. Атайын изилдөөсүз бул катыш жөнүндө, ошондой эле эки чексиз кичине чоңдуктардын катышы жөнүндө эч нерсе айтууга болбойт. Бул мисалды чыгаруу үчүн, бөлчөктө [1)] кездешкен x тин жогорку даражасына бөлүп, андан кийин пределге өтөбүз.
Ошентип,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x-2}{2x^2+5x+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{9}{x^2}}\overset{(3)-(5),\,(7).}{=}\frac{4}{2}=2$$

$x\to\infty$ умтулган учурда $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$ чоңдуктары нөлгө барабар болушат.

Алымын да, бөлүмүн да x^2 бөлгөндөн кийин бөлчөктүн предели жөнүндөгү (7) формуланы колдонууга мүмкүн болуп калды. Себеби, бөлчөктүн алымынын да, бөлүмүнүн да предели жашайт, алар 4 жана 2, ошондой эле бөлчөктүн бөлүмү нөлгө барабар эмес.

Мисал 14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-1}{x^2+5x+7}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-1}{x^2+5x+7}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\infty$.

$x \to \infty$ умтулган учурда бирди ч/к чондукка бөлсө ч/ч чондук келип чыгат.

Мисал 15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-5}{x^4-x^2+3x}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-5}{x^4-x^2+3x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}}{1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Мисал 16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{2x-1}}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{2x-1}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{3}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[6]{\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{9}{x^3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$.

Мисал 17. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$.

Чыгаруу.

1) Алач $x \to +\infty$ учурун карайлы.

$x \to +\infty$ умтулганда $x > 0$ болгондуктан $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}$, биз тамырдын арифметикалык маанисин карап жаткандыктан $\sqrt{x^2} = +x$ жана $\sqrt{x^2+2} = +x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}$, себеби

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$$

2) $x \to -\infty$ умтулган учуру.

Дагы эле $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}$, $x < 0$ болгондуктан $\sqrt{x^2} = -x$, тамырдын арифметикалык маанисин карап жаткандыктан $\sqrt{x^2+2} = -x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}$, ал эми

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = -1.$$

Эскертүү. Мындан көрүнүп тургандай $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$ жашабайт.

Көнүгүү үчүн мисалдар

4.1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{5+6x}$ (жообу $\dfrac{1}{2}$)

4.2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{5+x}$ (жообу 1)

4.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-6}{2x+17}$ (жообу ∞) 4.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+7x+1}{2-x+x^3}$ (жообу ∞)

4.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+12x-4}{x^3+6x}$ (жообу 0) 4.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-x^2-x^3}{x^4-x^2+11x+7}$ (жообу 0)

4.7 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$ (жообу $\dfrac{\sqrt{2}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$)

4.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$ (жообу $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$) 4.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2+x+3}}$ (жообу $\dfrac{2}{3}$)

4.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (жообу 1) 4.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$ (жообу 2)

4.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$ (жообу 0)

Бөлчөктүн алымы да, бөлүмү да ч/ч функция болгон учурдагы бөлчөктүн пределин табуунун эрежесин көрсөтөлү.

Эреже. $\dfrac{\infty}{\infty}$ ***аныксыздыктын түрүн чечүү үчүн бөлчөктө кездешкен*** $\boldsymbol{x}$ ***тин жогорку даражасына бөлүп, андан кийин пределге өтөбүз.***

Белгилей кетчү нерсе, $x\to\infty$ умтулганда, анда x тен болгон эки көп мүчөлү функциянын катышынын предели:

1) эгерде бул функциялардын даражалары өз ара барабар болгон учурда x тин жогорку даражаларынын коэффициенттеринин катыштары;

2) нөл болот, эгерде бөлүмүнүн даражасы алымынын даражасынан кичине;

3) $+\infty$ болот, эгерде алымынын даражасы бөлүмүнүн даражасынан чоң.

IV. $\infty-\infty$ ***түрүндөгү аныксыздык.***

Мисал 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. Мында (5) формуланы колдонууга болбойт, анткени $x\to\infty$ кошуунун предели жашабайт. Биз болсо эки ч/ч айырмалары менен иштешкенибиздиктен, атайын изилдөөсүз алар жөнүндө орчундуу эч нерсе айтуу мүмкүн эмес. Жалпы орток бөлүмгө келтирүү менен төмөнкүлөрдү алабыз.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{4x^2+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{4}$$

Мисал 19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. Берилген функциянын түйүндөшүнө көбөйтүп жана бөлүп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=0$$

Себеби, $x\to\infty$ болгондо бөлчөктүн бөлүмү ч/ч.

Мисал 20. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. Качан $x\to+\infty$ кашанын ичиндеги туюнтма эки ч/ч чоңдуктун айырмасы. Ал жөнүндө биз атайын изилдөөсүз эч нерсе айта албайбыз. Туюнтманын түйүндөшүнө көбөйтүп жана бөлүп төмөнкүнү алабыз.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

Анткени $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Эми $x\to-\infty$ болгон учурду карайбыз. Бул учурда кашанын ичиндеги туюнтма оң мааниге ээ болот жана абсолюттук чоңдугу боюнча чексиз өсөт, кашанын сыртындагы көбөйтүндү x, абсолюттук чоңдугу боюнча өсөт, бирок терс маанисин сактап калат. Ошондуктан бардык $x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ маанилери $x\to-\infty$ кезде абсолюттук чоңдугу боюнча чексиз өсөт да, терс маанисин сакталат жана $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\infty$.

Көнүгүү үчүн мисалдар

5.1 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$ (жообу $-\dfrac{1}{2}$) 5.2 $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$ (жообу $\dfrac{1}{2}$)

5.3 $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$ (жообу $\dfrac{1}{2}$) 5.4 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ (жообу -1)

5.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$ (жообу 0) 5.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$ (жообу $\dfrac{2}{9}$)

5.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$ (жообу -3) 5.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ (жообу 0)

5.9 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$ (жообу $+\infty$) 5.10 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ (жообу 1;-1)

5.11 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ (жообу 0; $+\infty$) 5.12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ (жообу $\dfrac{1}{2}$)

V. Тригонометриялык функцияларды камтыган $\frac{0}{0}, (0\,\infty)$ жана $(\infty - \infty)$ болгон аныксыздыктын түрлөрү.

Мындай аныксыздыктарды ачуу үчүн (12_4)–(12_5) формулалары колдонулат (биринчи сонун предел жана анын түрлөрү).

Мсиал 21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin4x}{Sin6x}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $x \to 0$ умтулганда бөлчөктүн бөлүмү менен алымы ч/к функциялар. Ошондуктан бөлчөктүн бөлүмүн да, алымын да x бөлөбүз. $x = 0$ мааниси каралбагандыктан, мындай жасоого мүмкүн.

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sin4x}{Sin6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4Sin4x}{4x}}{\frac{Sin6x}{2x}} \overset{(12_1)}{=} \frac{4}{2} = 2\,.$$

Мисал 22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-Cosmx}{x^2}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $x \to 0$ умтулганда бөлчөктүн бөлүмү менен алымы ч/к функциялар. $1 - Cosmx = 2Sin^2\frac{mx}{2}$ учурун колдонсок, анда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cosmx}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2Sin^2\frac{mx}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\left[\frac{Sin\,\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}\right]^2\cdot\frac{1}{\frac{4}{m^2}} \overset{(12_1)}{=} \frac{m^2}{2}\,.$$

Мисал 23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - Sinx}{x^3}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - Sinx}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{Sinx}{Cosx} - Sinx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{Sinx - SinxCosx}{x^3Cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{Sinx(1-Cosx)}{x^3Cosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{Sinx - 2Sin\frac{2x}{2}}{x^3Cosx} = \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{Sinx}{x}\cdot\left[\frac{Sin\,\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2\cdot\frac{1}{4\,Cosx} = \frac{1}{2}$$

Мисал 24. $\lim\limits_{x\to a}\frac{Cosa - Cosx}{x^2 - a^2}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $x \to 0$ умтулганда бөлчөктүн бөлүмү менен алымы ч/к функциялар. $Cosa - Cosx = 2Sin\frac{x+a}{2}\cdot Sin\frac{x-a}{2}$ учурун колдонсок, анда

$$\lim_{x\to a}\frac{Cosa-Cosx}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{2Sin\frac{x+a}{2}\cdot Sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{Sin\frac{x+a}{2}}{(x+a)}\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)\right]\overset{(12_1)}{=}\lim_{x\to a}\frac{Sin\frac{x+a}{2}}{x+a}=\frac{Sina}{2a}$$

$x\to a$ умтулганда $\frac{x-a}{2}\to 0$ болгон учурун колдонсок, анда $\frac{Sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\to 1$.

Мисал 25. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{Cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $1-x=t$ ны алабыз. $x\to 1$ умтулган учурда $x=1-t$ жана $t\to 0$. Анда,

$$\lim_{x\to 1}\frac{Cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{Cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{Sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{Sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Мисал 26. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\frac{\pi\lambda}{2}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $x\to 1$ умтулганда $tg\frac{\pi\lambda}{2}$ функциясынын предели жашабайт. Андыктан, көбөйтүндүүлөрдүн предели жөнүндө (6) формуланы колдонууга болбойт. $1-x=y$ ордуна коюу жолун колдонобуз. Качан $x\to 1$, анда $y\to 0$, жана $x=1-y$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2}=[0\ \infty]=\lim_{y\to 0}y\,tg\frac{\pi}{2}(1-y)=\lim_{y\to 0}y\,tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right)=\lim_{y\to 0}Ctg\frac{\pi}{2}y=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\frac{Cos\frac{\pi}{2}y}{Sin\frac{\pi}{2}y}=\lim_{y\to 0}y\frac{yCos\frac{\pi}{2}y}{\frac{Sin\frac{\pi}{2}y}{\pi y/2}\cdot\frac{\pi y}{2}}=\lim_{y\to 0}y\frac{2y}{\pi y}=\frac{2}{\pi}$$

Мисал 27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{Cosx}-tgx\right)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\frac{1}{Cosx}$ функциясы $x\to\frac{\pi}{2}$ умтулганда жана tgx ч/ч функциялар; ошентип, предел белгисинин алдында эки ч/ч функциялардын айырмасы турат. Пределдердин айырмасы жөнүндө (5) формуланы колдонууга болбойт, анткени $x\to\frac{\pi}{2}$ умтулганда $\frac{1}{Cosx}$ жана tgx функцияларынын акыркы предели жашабайт. $\frac{\pi}{2}-x=y$ ордуна коюу жолун колдонобуз. Качан $x\to\frac{\pi}{2}$, анда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{Cosx}-tgx\right)=[\infty-\infty]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{Cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}-tg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{Siny}-Ctgy\right]=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{Siny}-\frac{Cosy}{Siny}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{1-Cosy}{Siny}=\lim_{y\to 0}\frac{2Sin^2\frac{y}{2}}{Siny}=\lim_{y\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{Sin^2\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)}{\frac{Siny}{y}\cdot y}\overset{(12_1)}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{2y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2}=0$$

Көнүгүү үчүн тапшырмалар

6.1 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{Sin\,3x}$ (жообу $\frac{1}{3}$).

6.2 $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,2x}{x}$ (жообу 2).

6.3 $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{tg\,10x}$ (жообу $\frac{1}{2}$).

6.4 $\lim_{x\to 0}\frac{Sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ (жообу $\frac{1}{4}$).

6.5 $\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos\,3x}{x\,Sin\,x}$ (жообу 2).

6.6 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 Sin2x}{3tg^3\frac{x}{3}}$ (жообу 18).

6.7 $\lim_{x\to 0}\frac{Sinx-tgx}{4Sin^2\frac{x}{2}}$ (жообу 0).

6.8 $\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos3x}{tg^2 6x}$ (жообу 0).

6.9 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-Cosx}}$ (жообу $\sqrt{2}$).

6.10 $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{\sqrt[3]{(1-Cosx)^2}}$ (жообу ∞).

6.11 $\lim_{x\to 0}\frac{Sin(a+x)-Sin(a-x)}{x}$ (жообу $2Cosa$).

6.12 $\lim_{x\to 0}\frac{Coskx-Coslx}{x^2}$ (жообу $\frac{l^2-k^2}{2}$).

6.13 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-Sinx}{Cos^2 x}$ (жообу $\frac{1}{2}$).

6.14 $\lim_{x\to\pi}\frac{1-Sin\,x/2}{\pi-x}$ (жообу 0).

6.15 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-Sinx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ (жообу $\frac{1}{2}$).

6.16 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{Cosx}{\pi-2x}$ (жообу $\frac{1}{2}$).

6.17 $\lim_{x\to\infty} xSin\frac{1}{x}$ (жообу 1).

6.18 $\lim_{x\to 0} Ctg3x$ (жообу $\frac{1}{3}$).

6.19 $\lim_{x\to\infty}(x-3)\,Sin\frac{2}{3x}$ (жообу $\frac{2}{3}$).

6.20 $\lim_{x\to 0} Ctg2x\cdot Ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ (жообу $\frac{1}{2}$).

6.21 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)tgx$ (жообу 1).

6.22 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ (жообу $\frac{1}{2}$).

6.23 $\lim\limits_{x\to a} Sin\dfrac{x-2}{2}\cdot tg\dfrac{\pi x}{2a}$ (жообу $-\dfrac{a}{\pi}$). 6.24 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{Sinx}-\dfrac{1}{tgx}\right)$ (жообу 0).

6.25 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-Ctg^2x\right)$ (жообу 1). 6.26 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{Sinx}{Cos^2x}-tg^2x\right)$ (жообу $\dfrac{1}{2}$).

6.27 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{Cosx}{Cos2x}-\dfrac{Sinx}{Cos2x}\right)$ (жообу $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$). 6.28 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2xtgx-\dfrac{\pi}{Cosx}\right)$ (жообу -2).

VI. 1^∞ *Аныксыздык түрү*

Мындай аныксыздык түрүн ачуу үчүн (13_1)- (13_4) формулалары колдонулат (экинчи сонун предел жана анын түрлөрү).

Мисал 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2\overset{(13_1)}{=}e^2.$

Мисал 29. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right]^4\overset{(13_1)}{=}e^4.$

Мисал 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $x\to\infty$ умтулган учурда $f(x)=\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}$ функциясы өзүнүн даражасын көрсөтөт, анын негизи бирге умтулат, ал эми даража көрсөткүчү чексизге. Натыйжада 1^∞ аныксыздыгына ээ болобуз. Экинчи сонун пределди колдонуу үчүн $f(x)$ функциясын жөнөкөйлөтөбүз.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x-1}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+1}-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3-x-1}{x+1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+1}(x-1)}\overset{(13_1),(9)}{=}e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(1-x)}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(\frac{1}{x}-1)}{1+\frac{1}{x}}}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$$

Мисал 31. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу . $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}=\left[1^\infty\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}\overset{(13_1),(9)}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}=$

$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

Эскертүү. Эгерде (8) түрдөгү мисалдарды чыгарууда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1,$ ал эми $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ болуп калса, анда бул учурда пределди табуу үчүн жалпы бирдиктүү ыкма бар.

Ал ыкма төмөнкүдөй::

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\left\{1+\left[f(x)-1\right]\right\}^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\left\{1+\left[f(x)-1\right]^{1/f(x)-1}\right\}^{\varphi(x)[f(x)-1]}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\,[f(x)-1]}$$

Мисал 32. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(Sin2x)^{tg^2 2x}$

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(Sin2x)^{tg^2 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}1+\left[Sin2x-1\right]^{1/Sin2x-1\cdot(Sin2x-1)tg^2 2x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(Sin2x-1)Sin^2 2x}{Cos^2 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(Sin2x-1)Sin^2 2x}{1-Sin^2 2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(1-Sin2x)Sin^2 2x}{(1-Sin2x)\,(1+Sin2x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{Sin2x}{1+Sin2x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Көнүгүү үчүн тапшырмалар

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{x}$ (жообу $-k$).

7.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$ (жообу $\frac{2}{3}$).

7.3 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (жообу e^2).

7.4 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$ (жообу $e^{\frac{1}{3}}$).

7.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$ (жообу e^2).

7.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}$ (жообу $e^{-\frac{1}{3}}$).

7.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+7}\right)^{6x+1}$ (жообу e^{12}).

7.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$ (жообу 1).

7.9 $\lim\limits_{x\to 0}(1+Sinx)^{\frac{1}{x}}$ (жообу e).

7.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-4x}{3+2x}\right)^{\frac{x+1}{3}}$ (жообу $e^{-\frac{2}{3}}$).

7.11 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-2x}\right)^{\frac{2-x}{x}}$ (жообу e^6).

7.12 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (жообу e^2).

7.13 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(Sinx)^{tgx}$ (жообу 1).

7.14 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$ (жообу $\frac{1}{e}$).

7.15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{Cosx}{Cos2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (жообу $e\sqrt{e}$).

7.16 $\lim\limits_{x\to 0}(Cosx)^{\frac{1}{x^2}}$ (жообу $\frac{1}{\sqrt{e}}$).

7.17 $\lim\limits_{x\to 0}\left[tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{ctg\,2x}$ (жообу e).

7.18 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{Sinx}{Sina}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ (жообу e^{ctga})

VII. Логарифмаларды жана көрсөткүчтүү функцияларды камтыган туюнтмалардын пределдерин эсептөө

Мисал 33. $\lim\limits_{x\to 3}\lg(x^2+1)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to 3}\lg(x^2+1)\overset{(II)}{=}\lg\left[\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)\right]=\lg 10=1$.

Мисал 34. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+x+6}{x^2+2}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+x+6}{x^2+2}=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+6}{x^2+2}\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}\right]=\ln 1=0$.

Мисал 35. $\lim\limits_{x\to 2}\ln\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to 2}\ln\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}=\ln\left[\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 2}\frac{1}{4}(\sqrt{4x+1}+3)\right]=\ln\frac{6}{4}=\ln\frac{3}{2}$$

Мисал 36. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. $\ln e=1$ болгондуктан, $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{x-e}\ln\dfrac{x}{e}$.
$x-e=t$ алабыз, анда $x=t+e$, эгерде $x\to e$, анда $t\to 0$.

Натыйжада, $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{x-e}\ln\dfrac{x}{e}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\ln\left(1+\dfrac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}}=\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right]^{\frac{t}{e}\cdot\frac{1}{t}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\dfrac{1}{e}$.

Мисал 37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу. Алабыз $a^x=t$, анда $x\ln a=\ln t$, $x=\dfrac{\ln t}{\ln a}$, эгерде $x\to 0$,анда $t\to 1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-1}{\frac{\ln t}{\ln a}}$. Белгилейбиз $t-1=y$, анда $t=1+y$, $y\to 0$ $t\to 1$ болгон учурда.

$$\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)\ln a}{\ln t}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a.$$

Көнүгүү үчүн мисалдар

8.1 $\lim\limits_{x\to 2}\log_2(x+2)$ (жообу 2).

8.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2+x+5}{x^2-2}$ (жообу 0).

8.3 $\lim\limits_{x\to 4}\left[\ln\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right]$ (жообу $\ln 4\sqrt{2}$).

8.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$ (жообу $\dfrac{m}{n}$).

8.5 $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$ (жообу 1).

8.6 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $a>0$ (жообу $\dfrac{1}{a}$).

8.7 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ (жообу -1).

8.8 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ (жообу $\dfrac{2}{3}$).

8.9 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$ (жообу $\dfrac{3}{e}$).

8.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{Sinx}$ (жообу 2).

Аныксыздыктарды ачуунун бир нече учурларында иш оңой эмес экендигин байкадык. Ойдун жыйынтыктуулугу жана сөзсүз түрдө көп сандагы мисалдарды чыгаруунун тажрыйбасы талап кылынат.

Ошентип, $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\,\infty,\infty-\infty$ жана 1^∞ аныксыздыктын түрлөрү менен тааныштык.

Булардан башка дагы аныксыздыктар бар. Алар менен Лопиталянын эрежесин карагандан кийин таанышабыз.

Адабияттар

1. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. II “Высшая школа”, 1973г.
2. Пахыров З.П., Абдылдаева А.Р. Предел функции. Методическое руководство к самостоятельной работе по изучению раздела высшей математики. Бишкек, 1997г.
3. Абдылдаева А.Р., Курманбаева А.К. Введение в математический анализ. Методическое руководство по организации самостоятельной работы студентов при изучении курса «Высшая математика». Бишкек, 2001г.

Корректору ***Эркинбек к. Ж.***
Редактору ***Турдукулова А.К.***
Тех.редактору ***Кочоров А.Д***

Басууга 27.07.2015-ж. берилди. Форматы 60х84 $^{1}/_{16.}$ Офсеттик кагаз.
Офсеттик басуу. Көлөмү 1,75 б.т. Нускасы 50 д. Муктажы 268. Баасы 30 с.
Бишкек ш., Сухомлинов көч., 20.
“Текник” ББ Кыргыз мамлекеттик техникалык университети,
т: 54-29-43, e-mail: beknur@mail.ru