УДК: 517. 946 +518.5

Мурзакматов М.У., Аалиева Ч.Б.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОЙ СТЕРЖНЯ

Численно решается задача оптимального управления распределением тепла в стержне с помощью тепловых источников.

Рассмотрим процесс распространения тепла в стержне длиной *l*, который описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

с начальным

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$-a^2 \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \mu[q(t) - U(0,t)], \tag{3}$$

$$a^2 \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = \nu[p(t) - U(l,t)], \quad 0 < t \le T. \tag{4}$$

В уравнениях (1), (2) функция $U(x,t)$ означает температуру стержня в точке x в момент времени t; a^2 – коэффициент температуропроводности; $f(x,t)$ - плотность источников тепла; $\varphi(x)$- начальное распределение тепла в стержне. Граничные условия (3), (4) выражают обмен температурой с окружающей средой, где $q(t)$ и $p(t)$ – температура среды на левом и правом концах стержня соответственно, μ, ν - заданные параметры. Граничные условия (3), (4) для удобства изложения представим в виде

$$-a^2 \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} + \mu \cdot U(0,t) = \beta_1(t), \quad 0 < t \le T, \tag{3′}$$

$$a^2 \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} + \nu \cdot U(l,t) = \beta_2(t), \quad 0 < t \le T, \tag{4}$$

где $\beta_1(t) = \mu \cdot q(t), \quad \beta_2(t) = \nu \cdot p(t),$

Задача оптимального управления температурой стержня ставится следующим образом [3]. Требуется найти такую управляющую функцию $f(x, t)$ которая при $t = T$ доставляет минимум функционалу

$$J(f) = \int_0^l [U(x,T; f(x,T)) - b(x)]^2 dx + \alpha \int_0^T \int_0^l [f(x,t)]^2 dx dt, \tag{5}$$

где $b(x)$ – заданная оптимальная температура, $\alpha > 0$- параметр регуляризации. Функция $f^0(x,t)$, доставляющая минимум функционалу (5), называется оптимальным управлением, а соответствующее решение уравнения (1), т.е. функция $U^0(x,t)$- оптимальной температурой.

Для решения сформулированной задачи вводится сопряженная функция $\psi(x,t)$, которая является решением следующей сопряженной задачи [3]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \le t < T, \tag{6}$$

$$-a^2\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}+\mu\cdot\psi(0,t)=0,\quad 0\le t<T,$$

$$a^2\frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}+\nu\cdot\psi(l,t)=0,\quad 0\le t<T,$$

с «начальным условием»

$$\psi(x,T)=-2[U(x,T)-b(x)] \tag{7}$$

и доказывается, что оптимальное уравнение выражается формулой

$$f^0(x,t)=\frac{1}{2\alpha}\psi(x,t). \tag{8}$$

Теперь рассмотрим алгоритм решения задачи (1) – (4) методом конечных элементов [2].

Образуем прямоугольную сетку

$$x_i=ih,\quad i=0,1,\ldots,n,\quad h=l/(n-1);$$

$$t_k=k\tau,\quad k=0,1,\ldots,n_t,\quad \tau=T/(n_t-1)\text{'}$$

и, заменив производную по времени разностным отношением

$$\frac{\partial U}{\partial t}\approx\frac{U-\breve{u}}{\tau},\ \text{где}\ U=U(x,t_k),\breve{u}=U(x,t_{k-1}),$$

перепишем уравнение (1) в виде

$$-a^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+Q\cdot U=F(x,t_k),\quad 0<x<l,U(x,0)=\varphi(x),0\le x\le l, \tag{9}$$

с граничными условиями (3), (4). Здесь

$$Q=1/\tau,\quad F(x,t_k)=\breve{u}/\tau+f(x,t_k),$$

Задачу (9), (3′), (4′) решаем методом конечных элементов. На частичном отрезке x_{i-1}, x_i образуем базисные функции

$$\varphi_{i-1}(x)=\frac{x_i-x}{h},\quad \varphi_i(x)=\frac{x-x_{i-1}}{h}$$

и функцию $U(x)$ на этом отрезке представим в виде

$$U(x)\approx\varphi_{i-1}(x)U_{i-1}+\varphi_i(x)\cdot U_i, \tag{10}$$

где $U_i=U(x_i,t_k)$.

Суммируя равенство (10) по всем элементарным отрезкам, получаем разложение для искомой функции

$$U_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}[\varphi_{i-1}(x)U_{i-1}+\varphi_i(x)U_i]. \tag{11}$$

К задаче (9), (3′), (4′) применяем принцип Галеркина. Имеем

$$\int_0^l\varphi_i(x)\left(-a^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+QU-F\right)dx+\varphi_j(x)\left(-a^2\frac{\partial U}{\partial x}+\mu\cdot U-\beta_1(t)\right)\Big\|_{x=0}+$$

$$+\varphi_j(x)\left(-a^2\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\cdot U-\beta_2(t)\right)\Big\|_{x=l}=0,\quad j=0,1,\ldots,n$$

или после применения формулы Грина

$$\int_0^l a^2 \frac{d\varphi_j}{dx}\frac{dU}{dx}dx + \int_0^l Q\varphi_j(x)U dx - \int_0^l \varphi_j(x)F dx + \mu U_0 - \beta_1 + \nu U_n - \beta_2 = 0, \quad j = 0,1,\dots,n.$$

Поставляя вместо $U(x,t_k)$ ее разложение (11), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} a^2 \frac{d\varphi_j}{dx}\left(U_{i-1}\frac{d\varphi_{i-1}}{dx} + U_i\frac{d\varphi_i}{dx}\right)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_j\left(U_{i-1}\varphi_{i-1} + U_i\varphi_i\right)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_j(x)F dx\right\} + \tag{12}$$
$$+\mu U_0 - \beta_1 + \nu U_n - \beta_2 = 0, \quad j = 0,1,\dots,n.$$

Так как функции $\varphi_{i-1}(x)$ и $\varphi_i(x)$ отличны от нуля только на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, а вне его равны нулю, равенства (12) примут вид

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} a^2 \frac{d\varphi_i}{dx}\left(U_{i-1}\frac{d\varphi_{i-1}}{dx} + U_i\frac{d\varphi_i}{dx}\right)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} a^2 \frac{d\varphi_i}{dx}\left(U_i\frac{d\varphi_i}{dx} + U_{i+1}\frac{d\varphi_{i+1}}{dx}\right)dx +$$
$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i} Q\varphi_i\left(U_{i-1}\varphi_{i-1} + U_i\varphi_i\right)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q\varphi_i\left(U_i\varphi_i + U_{i+1}\varphi_{i+1}\right)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i F dx \int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i F dx + \tag{13}$$
$$+\mu U_0 - \beta_1 + \nu U_n - \beta_2 = 0, \quad i = 1,2,\dots,n-1$$

или
$$a_i U_{i-1} + b_i U_i + c_i U_{i+1} = d_i, \quad i = 1,2,\dots,n-1, \tag{14}$$
где

$$a_i = a^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q\varphi_{i-1}\varphi_i dx,$$
$$b_i = a^2\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)^2 dx + a^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q\varphi_i^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q\varphi_i^2 dx,$$
$$c_i = a^2\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_{i+1}}{dx}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q\varphi_i\varphi_{i+1} dx,$$
$$d_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i F(x,t_k)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i F(x,t_k)dx.$$

При $i = 0$ получаем уравнение
$$b_0 U_0 + C_0 U_1 = d_0, \tag{15}$$
где
$$b_0 = a^2\int_{x_0}^{x_1}\frac{d\varphi_0}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}dx + \int_{x_0}^{x_1} Q\varphi_0^2 dx + \mu,$$
$$C_0 = a^2\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_0}^{x_1} Q\varphi_0\varphi_1 dx,$$
$$d_0 = \int_{x_0}^{x_1}\varphi_0 F(x,t_k)dx + \beta_1.$$

При $i = n$ имеем
$$a_n U_{n-1} + b_n U_n = d_n, \tag{16}$$
где
$$a_n = a^2\int_{x_{n-1}}^{x_n}\left(\frac{d\varphi_{n-1}}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n}\varphi_{n-1}\varphi_n Q dx,$$
$$b_n = a^2\int_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{d\varphi_{n-1}}{dx}\frac{d\varphi_n}{dx}dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} Q\varphi_n^2 dx + \nu,$$

$$d_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_n F(x,t_k)dx + \beta_2.$$

Систему (14) – (16) решаем методом прогонки. Искомую функцию вычисляем по формуле

$$U_i = \alpha_i U_{i+1} + \beta_i, \quad i = 0,1,2,\dots,n-1. \qquad (17)$$

Тогда

$$U_{i-1} = \alpha_{i-1}\alpha_i U_{i+1} + \alpha_{i-1}\beta_i + \beta_{i-1},.$$

Подставляя выражение для U_{i-1} и Ui в уравнение (14), получаем формулы для прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = \frac{-c_i}{a_i\alpha_{i-1} + \beta_i}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}, \quad i = 1,2,\dots,n-1. \qquad (18)$$

α_0 и β_0 находим из уравнений (15) и (17) при $i = 0$:

$$\alpha_0 = -c_0 / b_0, \quad \beta_0 = d_0 / b_0. \qquad (19)$$

из уравнений (16) и (17) при $i = n-1$ определяем U_n :

$$U_n = \frac{d_n - a_n\beta_{n-1}}{a_n\alpha_{n-1} + \beta_n}. \qquad (20)$$

Вычисления производятся в следующем порядке. По формулам (19) находятся α_0 и β_0, затем по формулам (18) вычисляются α_i и β_i, $i = 1,2,\dots,n-1$. Значения искомой функции определяются по формулам (20) и (17) при $i = n-1, n-2, \dots,1,0$.

Приводим один пример расчета оптимального управления. Пусть начальный момент времени $t = 0$ температура в стержне равна нулю:

$$U_0(x) = U(x,0) = 0.$$

Требуется за время $T = 1$ привести температуру в оптимальное состояние, равное *b(x)= 5(-2x + 10).*

В табл. 1. даны значения управляющей функции *f (x,t)* при $z=T$, а на рис. 1. изображены точные и приближенные значения оптимальной температуры.

Значения управляющей функции

Таблица. 1.

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f_i	50.12	49.03	48.07	47.13	45.86	45.07	44.09	42.75	41.91	41.05	39.81

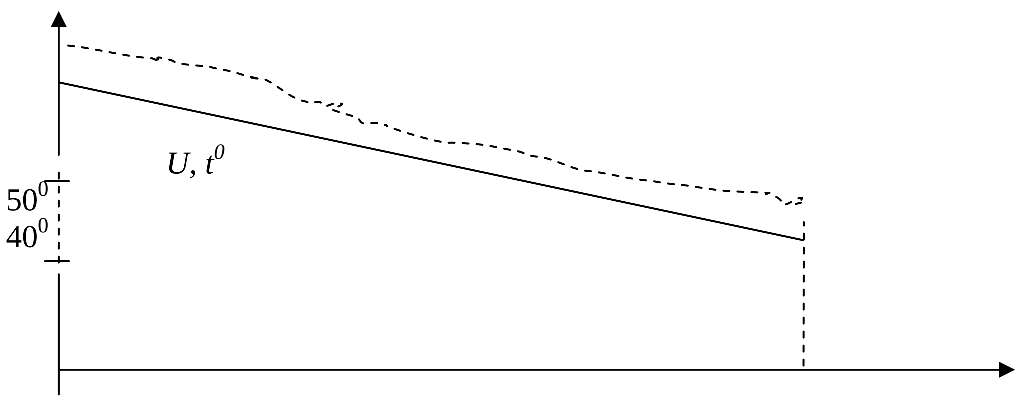

Рис.1. Графические функции

Рис. 1. Графики функции $U_{опт}(x,T)$

точные значения

приближенные значения

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир. 1979. –392 с.
3. Васильев П.Ф. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.