

УДК 517.968.22

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА**

Т.Т. Каракеев, Н.Т. Мустафаева

Рассмотрены вопросы метода построения и обоснования регуляризации линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

Ключевые слова: регуляризация; уравнение Вольтерра; равномерная сходимость.

**REGULARIZATION OF LINEAR TWO-DIMENSIONAL
INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS OF FIRST KIND**

T.T. Karakeev, N.T. Mustafaeva

It is considered the issues about the method of the construction and justification of the regularization of linear two-dimensional integral Volterra equations of the first kind.

Keywords: regularization; Volterra equation; uniform convergence.

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода возникают при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, в частности при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности [1, с. 28], задачи Бицадзе – Самарского для уравнения Буссинеска – Лява [2] и др.

Методы регуляризации лаврентьевского типа для интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве непрерывных и суммируемых функций предложены в [3]. Случай с двумя независимыми переменными уравнения исследован в [4], в работе [5] построено регуляризирующее решение для некорректного случая уравнения, когда нарушается необходимое условие существования непрерывного решения. В данной работе в пространстве непрерывных функций исследуются вопросы регуляризации уравнения с непрерывным ядром и правой частью.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$\int_0^x K(x, t, \tau) u(t, \tau) dt = g(x, \tau), \quad (1)$$

где заданные функции $K(x, t, \tau)$, $g(x, \tau)$ подчиняются условиям:

а) $K(x, t, \tau) \in C(D)$, $K(x, x, \tau) \geq 0$, $g(x, \tau) \in C(D_0)$, $g(0, \tau) = 0$,

$$D = D_1 \times [0, T], \quad D_1 = \{(x, t) / 0 \leq t \leq x \leq b\}, \quad D_0 = [0, b] \times [0, T];$$

б) $G(x, \tau) \geq d_1$, $G(x, \tau) = K(x, x, \tau) + C_1 g(x, \tau)$, $0 < C_0, C_1, d_1 = const$.

Пусть T – оператор Вольтерра вида $(Tv)(x, \tau) = \int_0^x u(t, \tau) v(t, \tau) dt$. Действуем оператором $I + C_1 T$, где I – тождественный оператор, на уравнение (1). Тогда получим уравнение, которое после эквивалентного преобразования примет следующий вид:

$$\int_0^x G(t, \tau) u(t, \tau) dt = \int_0^x L(x, t, \tau) u(t, \tau) dt + C_1 \int_0^x u(t, \tau) dt \int_t^x K(s, t, \tau) u(s, \tau) ds + g(x, \tau), \quad (2)$$

где $L(x, t, \tau) = K(t, t, \tau) - K(x, t, \tau)$.

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала $(0, 1)$:

$$\varepsilon u_\varepsilon(x, \tau) + \int_0^x G(t, \tau) u_\varepsilon(t, \tau) dt = \int_0^x L(x, t, \tau) u_\varepsilon(t, \tau) dt + C_1 \int_0^x u_\varepsilon(t, \tau) dt \int_t^x K(s, t, \tau) \times u_\varepsilon(s, \tau) ds + g(x, \tau). \quad (3)$$

С помощью резольвенты ядра $(-G(t, \tau)/\varepsilon)$, уравнение (3) приведем к следующему виду:

$$u_\varepsilon(x, \tau) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) \left\{ \int_0^t L(t, s, \tau) u_\varepsilon(s, \tau) ds - \int_0^x L(x, s, \tau) \times u_\varepsilon(s, \tau) ds + C_1 \int_0^t u_\varepsilon(s, \tau) ds \int_s^t K(v, s, \tau) u_\varepsilon(v, \tau) dv - \int_0^x u_\varepsilon(s, \tau) ds \int_s^x K(v, s, \tau) \times u_\varepsilon(v, \tau) dv + g(t, \tau) - g(x, \tau) \right\} + \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \left\{ \int_0^x L(x, t, \tau) \times u_\varepsilon(t, \tau) dt + C_1 \int_0^x u_\varepsilon(t, \tau) dt \int_t^x K(s, t, \tau) u_\varepsilon(s, \tau) ds + g(x, \tau) \right\} \equiv (Au_\varepsilon)(x, \tau). \quad (4)$$

Пусть $\bar{u}_\varepsilon(x, \tau), \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau) \in \Omega(D_0)$, где

$$\Omega(D_0) = \{u(x, \tau) \in C(D_0) : |u(x, \tau) - u_0| \leq r_0, 0 < u_0, r_0 = const\}.$$

Оценим разность операторов $(A\bar{u}_\varepsilon)(x, \tau) - (A\tilde{u}_\varepsilon)(x, \tau)$. Оценивая выражения из этой разности, получим неравенства:

$$1) \left| \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) \left\{ \int_0^t [L(x, s, \tau) - L(t, s, \tau)] [\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)] ds + \int_t^x L(x, s, \tau) [\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)] ds \right\} dt \right| \leq \frac{L_k}{\varepsilon^2} \int_0^x G(t, \tau) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) (x-t) \times \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)| ds dt \leq \frac{L_k}{\varepsilon^2} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) \times \int_t^x \frac{G(s, \tau)}{d_1} ds dt \leq \frac{L_k}{d_1} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \int_0^x \exp\left(-\int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds\right) \int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds \times \times d_t \left(\int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds \right) \leq L_k d_1^{-1} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt,$$

где $0 < L_k$ – коэффициент Липшица ядра $K(x, t, \tau)$ по первому аргументу;

$$2) \left| \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \int_0^x L(x, t, \tau) [\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)] dt \right| \leq \frac{L_k}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \times \int_0^x (x-t) |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \leq \frac{L_k}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) x \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \leq \leq \frac{L_k}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \int_0^x \frac{G(s, \tau)}{d_1} ds \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \leq \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \times \times \frac{L_k}{d_1} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \int_0^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds \leq L_k d_1^{-1} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt;$$

$$3) \left| \frac{C_1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \left\{ \int_0^x [\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)] dt \int_t^x K(s, t, \tau) \bar{u}_\varepsilon(s, \tau) ds + \int_0^x \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau) dt \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \int_t^x K(s, t, \tau) [\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)] ds \Bigg\} \leq \frac{2C_1 Mr}{\varepsilon} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \times \\ & \times \int_0^x \frac{G(s, \tau)}{d_1} ds \leq 2C_1 Mr d_1^{-1} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt, \quad \exists \partial e \quad M = \max_D |K(x, t, \tau)|, r = r_0 + u_0; \\ 4) & \left| \frac{C_1}{\varepsilon^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) \left\{ \int_0^t [\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)] ds \int_t^x K(v, s, \tau) \bar{u}_\varepsilon(v, \tau) dv + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^x [\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)] ds \int_s^x K(v, s, \tau) \bar{u}_\varepsilon(v, \tau) dv \right\} dt \right| \leq \frac{C_1 Mr}{\varepsilon^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) \times \\ & \times G(t, \tau) (x-t) \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(s, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau)| ds dt \leq \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) \times \\ & \times \frac{C_1 Mr}{d_1} \int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds d_t \left(\int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds \right) \leq C_1 Mr d_1^{-1} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt; \\ 5) & \left| \frac{C_1}{\varepsilon^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) \left\{ \int_0^t \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau) ds \int_t^x K(v, s, \tau) [\bar{u}_\varepsilon(v, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(v, \tau)] dv + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^x \tilde{u}_\varepsilon(s, \tau) ds \int_s^x K(v, s, \tau) [\bar{u}_\varepsilon(v, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(v, \tau)] dv \right\} dt \right| \leq \frac{C_1 Mbr}{\varepsilon^2} \|\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)} \times \\ & \times \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) (x-t) dt \leq \frac{C_1 Mbr}{d_1} \|\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)} \times \\ & \times \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) \int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds d_t \left(\int_t^x \frac{G(s, \tau)}{\varepsilon} ds \right) \leq \frac{C_1 Mbr}{d_1} \|\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)}, \end{aligned}$$

где

$$\|\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)} = \max_{D_0} |\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)|.$$

На основе оценок 1) – 5) приходим к следующему неравенству:

$$|(A\bar{u}_\varepsilon)(x, \tau) - (A\tilde{u}_\varepsilon)(x, \tau)| \leq q_0 b \|\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)} + q_1 \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t, \tau)| dt,$$

где $q_0 = C_1 Mr d_1^{-1}$, $q_1 = (2L_k + 3C_1 Mr) d_1^{-1}$.

В итоге по норме получим оценку:

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x, \tau) - (A\tilde{u}_\varepsilon)(x, \tau)\|_{C(D_0)} \leq q \|\bar{u}_\varepsilon(x, \tau) - \tilde{u}_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)}, \quad q = (q_0 + q_1) b. \quad (5)$$

Пусть оператор $(H_\varepsilon u)(x, \tau)$ задается в виде

$$\begin{aligned} (H_\varepsilon u)(x, \tau) & \equiv \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) u(x, \tau) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) \times \\ & \times G(t, \tau) [u(x, \tau) - u(t, \tau)] dt, \end{aligned}$$

Аналогично, как в [1, с. 5], можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. При выполнении условий (а)–(б) и $u(x, \tau) \in C[0, b]$ имеет место оценка

$$\|(H_\varepsilon u)(x, \tau)\|_{C(D_0)} \leq 3 \|u(x, \tau)\|_{C(D_0)} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |u(x, \tau) - u(y, \tau)|$, $\tau \in [0, T]$, $0 < \beta < 1$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (а) – (б), $q < 1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x, \tau) \in \Omega(D_\rho)$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon(x, \tau) - u(x, \tau)\|_{C(D_0)} \leq (1-q)^{-1} \times \left(3u\|(x, \tau)\|_{C(D_0)} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \omega_u(\varepsilon^\beta) \right).$$

Доказательство. С помощью подстановки

$$\eta_\varepsilon(x, \tau) = u_\varepsilon(x, \tau) - u(x, \tau) \tag{6}$$

из (4) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(x, \tau) = & -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^x G(s, \tau) ds\right) G(t, \tau) \left\{ \int_0^t L(t, s, \tau) \eta_\varepsilon(s, \tau) ds - \int_0^x L(x, s, \tau) \eta_\varepsilon(s, \tau) ds + \right. \\ & + C_1 \left[\int_0^t \eta_\varepsilon(s, \tau) ds \int_s^t K(v, s, \tau) u_\varepsilon(v, \tau) dv - \int_0^x \eta_\varepsilon(s, \tau) ds \int_s^x K(v, s, \tau) u_\varepsilon(v, \tau) dv + \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t u(s, \tau) ds \int_s^t K(v, s, \tau) \eta_\varepsilon(v, \tau) dv - \int_0^x u(s, \tau) ds \int_s^x K(v, s, \tau) \eta_\varepsilon(v, \tau) dv \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon \left[u(t, \tau) - u(x, \tau) \right] \right\} dt + \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x G(s, \tau) ds\right) \left\{ \int_0^x L(x, t, \tau) \eta_\varepsilon(t, \tau) dt + \right. \\ & \left. + C_1 \int_0^x \eta_\varepsilon(t, \tau) dt \int_t^x K(s, t, \tau) u_\varepsilon(s, \tau) ds + C_1 \int_0^x u(t, \tau) dt \int_t^x K(s, t, \tau) \eta_\varepsilon(s, \tau) ds + \varepsilon u(x, \tau) \right\}. \end{aligned}$$

Используя оценку (5), получим:

$$|\eta_\varepsilon(x, \tau)| \leq q_0 \|\eta_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)} + q_1 \int_0^x |\eta_\varepsilon(t, \tau)| dt + \|(H_\varepsilon u)(x, \tau)\|_{C(D_0)}.$$

В обеих частях неравенства переходим к норме. Тогда

$$\|\eta_\varepsilon(x, \tau)\|_{C(D_0)} \leq (1-q)^{-1} \|(H_\varepsilon u)(x, \tau)\|_{C(D_0)}.$$

Откуда в силу леммы 1 и (6), при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ равномерна. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $\Omega(D_\rho)$.

Литература

1. Алифанов О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. Сопуев А. Задача Бицадзе – Самарского для уравнения Буссинеска – Лява / А. Сопуев, А.Б. Осмоналиев // Вестник КГНУ: Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. межд. научн. конф. Бишкек, 2001. Серия 3. Вып. 6. С. 112–116.
3. Иманалиев М.И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Вып. 21. Фрунзе: Илим, 1988. С. 38.
4. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Вып. 13. Фрунзе: Илим, 1980. С. 207–215.
5. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода / Т.Д. Омуров. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.