

УДК 517.968.21

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА
ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

З.А. Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова

Рассмотрена регуляризация и получены оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения первого рода; регуляризация.

**REGULARIZATION AND STABILITY OF SOLUTIONS SYSTEMS OF THE LINEAR
INTEGRAL EQUATIONS OF FREDHOLM OF THE FIRST KIND IN UNLIMITED AREAS**

Z.A. Kadenova, J.Sh. Orozmatova

It is considered the regularization and it is received the stability of solutions systems of the linear integral equations of Fredholm of the first kind in unlimited areas.

Keywords: linear integral equations of the first kind; regularization.

Постановка задачи. В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях построена регуляризация и получены оценки устойчивости. Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \int_a^{\infty} K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a, \infty), \quad (1)$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} A(t, s), & a \leq s \leq t < \infty, \\ B(t, s), & a \leq t \leq s < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

$$K(t, s) = (K_{ij}(t, s)), \quad A(t, s) = (A_{ij}(t, s)), \quad B(t, s) = (B_{ij}(t, s)),$$

$$K(t, s) \in L_2([a, \infty) \times [a, \infty); M),$$

$$u(t) = (u_i(t)), \quad f(t) = (f_i(t)) \in L_2([a, \infty); E_n).$$

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, были изучены в [1–5], где были получены теоремы единственности, устойчивости и регуляризации.

В силу (2) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t, s)u(s)ds + \int_t^{\infty} B(t, s)u(s)ds = f(t). \quad (3)$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на вектор-функцию $u(t)$. Полученное произведение проинтегрируем по области $a \leq t < \infty$, получим:

$$\int_a^\infty \left\langle \int_a^t A(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle_n dt + \int_a^\infty \left\langle \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle_n dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt, \quad (4)$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t) \rangle_n ds dt + \int_a^\infty \int_t^\infty \langle B(t,s)u(s), u(t) \rangle_n ds dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt. \quad (5)$$

Применяя формулу Дирихле, из (5) имеем:

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t) \rangle_n ds dt + \int_a^\infty \int_a^t \langle B^*(s,t)u(s), u(t) \rangle_n ds dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt,$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle (A(t,s) + B^*(s,t))u(s), u(t) \rangle_n ds dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt.$$

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}(A(t,s) + B^*(s,t)), \quad (t,s) \in G = \{(t,s) \mid a \leq s \leq t < \infty\}. \quad (6)$$

Тогда

$$2 \int_a^\infty \int_a^t \langle H(t,s)u(s), u(t) \rangle_n ds dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt. \quad (7)$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$ следующим образом:

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \leq s \leq t < \infty, \\ H(s,t), & a \leq t \leq s < \infty, \end{cases} \quad (8)$$

где $H(t,s) = (H_{ij}(t,s))$, $H(s,t) = (H_{ij}(s,t))$.

Ясно, что $M(t,s) = M(s,t)$.

$$M(t,s) = \sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu \begin{pmatrix} \phi_1^{(\nu)}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n^{(\nu)}(t) \end{pmatrix} (\bar{\phi}_1^{(\nu)}(s) \dots \bar{\phi}_n^{(\nu)}(s)), \quad m \leq \infty. \quad (9)$$

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_ν матричного ядра $M(t,s)$ положительны. В силу полной непрерывности и самосопряженности оператора M , порожденного матричным ядром $M(t,s)$, ортонормированная последовательность собственных вектор-функций $\{\phi^{(\nu)}(t)\}$ полна в $L_2([a, \infty); E_n)$. Очевидно, что если $u(t) \in L_2([a, \infty), E_n)$, то $\|u(t)\| = \left(\sum_{\nu=1}^\infty |u^{(\nu)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, где $u^{(\nu)} = \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle$, $(\nu = 1, 2, \dots)$.

Пусть последовательность соответствующих собственных значений $\{\lambda_\nu\}$ расположена в порядке убывания их модулей.

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α , выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2([a, \infty); E_n) : \sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu^{-\alpha} |u^{(\nu)}|^2 \leq c \right\},$$

где $c > 0$, $0 < \alpha < \infty$, $u^{(\nu)} = \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle$, $(\nu = 1, 2, \dots)$, т. е.

$$u^{(\nu)} = \int_a^\infty \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle_n dt. \quad (10)$$

Ясно, что если $u(t) \in M_\alpha$, то $\|u(t)\| \leq c \lambda_1^\alpha$.

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда система (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$, и справедливо

$$\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu \left| \int_a^\infty \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle_{E_n} dt \right|^2 = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_{E_n} dt.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} |u^{(\nu)}|^2 \leq \|f(t)\| \cdot \|u(t)\|. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^{\frac{2}{1+\alpha}}}{\lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} |u^{(\nu)}|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_{\nu}^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} |u^{(\nu)}|^2 \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гельдера при $p = 1 + \alpha$, $q = (1 + \alpha) / \alpha$. Учитывая $u(t) \in M_{\alpha}$ и (11), из последнего неравенства имеем:

$$\|u(t)\|^2 \leq c^{\frac{1}{1+\alpha}} \langle \|f(t)\|, \|u(t)\| \rangle^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

отсюда получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\| \leq c^{\frac{1}{2+\alpha}} \cdot \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (12)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть оператор M порожденный матричным ядром $M(t,s)$ положительный, где $M(t,s)$ определен по формуле (8) и (9). Тогда решение системы (1) в $L_2([a,b]; E_n)$ единственно. Кроме того, на множестве $K(M_{\alpha})$ ($K(M_{\alpha})$ образ M_{α} при отображении оператором K оператор K^{-1} , обратный к K , равномерно непрерывен с гельдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_a^{\infty} K(t, s) u(s, \varepsilon) ds = f(t), \quad t \in [a, \infty), \quad \varepsilon > 0 \quad (13)$$

будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_{α} .

На самом деле, сделаем следующую подстановку в системе (1)

$$u(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon),$$

где $u(t) \in M_{\alpha}$ – решение системы (1), получим:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_a^{\infty} K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = -\varepsilon u(t).$$

Отсюда, учитывая (1), имеем:

$$\varepsilon \|\xi(t, \varepsilon)\|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} |\xi_{\nu}(\varepsilon)|^2 \leq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_{\nu}(\varepsilon)|, \quad (14)$$

где $\xi_{\nu}(\varepsilon)$ – коэффициенты Фурье для функции $\xi(t, \varepsilon)$, по ортонормированной системе $\phi^{(\nu)}(t) = \{\phi_i^{(\nu)}(t)\}$ т. е. $\xi_{\nu}(\varepsilon) = \langle \xi(t, \varepsilon), \phi^{(\nu)}(t) \rangle$. Применяя неравенство Гельдера при $p = q = \frac{1}{2}$, из (14) получим:

$$\|\xi(t, \varepsilon)\| \leq \|u(t)\|, \quad (15)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu} |\xi_{\nu}(\varepsilon)|^2 \leq \varepsilon \|u(t)\|^2 \leq \varepsilon c \lambda_1^{\alpha}, \quad \varepsilon > 0. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_{\nu}(\varepsilon)| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\xi_{\nu}(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} \cdot \lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} |u^{(\nu)}|^{\frac{1}{1+\alpha}} |\xi_{\nu}(\varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}} |u^{(\nu)}|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, $m = 2(1+\alpha)$, $n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем:

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|_{\xi_v}(\varepsilon) \leq \left(\sum_{v=1}^{\infty} |\xi_v(\varepsilon)|^2 \lambda_v \right)^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|u^{(v)}|^2}{\lambda_v^\alpha} \right)^{\frac{1}{(1+\alpha)^2}} \|\xi(t, \varepsilon)\|_{(1+\alpha)}^{\frac{1}{(1+\alpha)}} \|u(t)\|_{(1+\alpha)}^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|_{\xi_v}(\varepsilon) \leq \left(\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |\xi_v(\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|u^{(v)}|^2}{\lambda_v^\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \|\xi(t, \varepsilon)\|_{\frac{p}{q}}^2 \|u(t)\|_{\frac{p}{q}}^2.$$

Далее, в силу $u(t) \in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем:

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|_{\xi_v}(\varepsilon) \leq (\varepsilon c \lambda_1^\alpha)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} (c \lambda_1^\alpha)^{\frac{p+q}{pq}}.$$

Отсюда, подставляя $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, получим:

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|_{\xi_v}(\varepsilon) \leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \cdot (c \lambda_1^\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varepsilon c \lambda_1^\alpha)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \quad (17)$$

т. е. $\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|_{\xi_v}(\varepsilon) \leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \cdot c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha}{2}} \lambda_1^{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}$,

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|_{\xi_v}(\varepsilon) \leq c \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \quad (18)$$

Учитывая (18), из (14) имеем:

$$\|u(t, \varepsilon) - u(t)\|_{L_2} \leq c^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (19)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть оператор M , порожденный матричным ядром $M(t, s)$ положительный и $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (19), где $u(t, \varepsilon)$ – решение системы (13), $u(t)$ – решение системы (12); $M(t, s)$ определен по формуле (8).

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 31–33.
2. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
3. Иманалиев М.И. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1052–1055.
4. Asanov A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables / A. Asanov, M. Haluk Chelik, Z.A. Kadenova // International Journal of contemporary mathematical sciences. 2013. Vol. 7. № 19. P. 907–914. HIKARI Ltd.
5. Asanov A. Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables / A. Asanov, Z.A. Kadenova // Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, 2013. № 3. P. 30–36.