БИКОМПАКТИФИКАЦИЯ РАВНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ВОЛМЭНОВСКОГО ТИПА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ЧЕКЕЕВ А. А.

Кыргызкий национальный университет им.Ж.Баласагына

УДК 515.12.

Аннотация: *Сунушталган макалада барды бир калыптуу туюк көптүктөрдөн турган нормалдык база $Z(uX)$ боюнча жана Хараламбустун u - функциялары колдонуп, Волмэн тибиндеги $\beta_u X = \omega(Z(uX))$ бикомпактификациясы тургузулат жана $\beta_u X$ үчүнСтоун-Чехбикомпактификациясы βX окшош касиеттер тургузулат. Тугузулган $\beta_u X$ бикомпактификациясынын бирден-бир колдонулуштары катары uX биркалыптуу мейкиндиги үчүн, $\mathcal{B}_p^*$ базисибардык чектүү бир калыпта ачык жабуулардан турган предкомпактуу u_p^* бир калыптуулугунун жашашы далилденип, $u_p \subset u_p^*$, жана $Z(uX) = Z(u_p^* X)$ барабардыктары орун алат, мында $u_p \subset u$ - Исбеллдинпре компактуурефлексиясы. Анда u - $\dim X = \dim\left(X, u_p^*\right)$, мында $u - \dim X$ - Хараламбус өлчөмү, $\dim\left(X, u_p^*\right)$-Исбелл-Смирновөлчөмү. Демек, $u - \dim X \quad \dim\left(\tilde{X}, \tilde{u}_p^*\right) = \dim s_{u_p^*} X \quad \dim \beta_u X$. =*

Ошол эле $\beta_u X$ бикомпактификациясынын дагы бар колдоонулушу катары, Б.А. Пасынков методуна таянып, өлчөмү $\dim \le n$ жанасалмагы $\le \tau$ универсадуу бикомпакттары $u - \dim \le n$ жана топологиялык салмагы $\le \tau$ болгон бир калыптуу мейкиндиктери үчүн тургузулду. Таймановдун теоремасынын бир калыптуу аналогу далилденди жана анын жардамы менен Самюэльби компактификациясынын $s_u X$ тургузулган $\beta_u X$ бикомпактификациясын агомеоморфизмдуулугун зарыл жана жетиштүү шарты тургузулду. Жаңы u - жетик чагылдыруулар аныкталган, алардын Декарттык квадрат терминдерин декатегориялык жана ички мүнөздөмөлөрү тургузулду.

Аннотация: *В предлагаемой статье по нормальной базе $Z(uX)$ - всех равномерно замкнутых множеств и с использованием u - функций, определенных Хараламбусом, строится бикомпактификация Волмэновского типа $\beta_u X = \omega(Z(uX))$ и устанавливаются различные свойства $\beta_u X$, аналогичные Стоун-Чеховской бикомпактификации βX. В качестве одного из приложений бикомпактификации $\beta_u X$ доказано, что для равномерного пространства uX существует такая предкомпактная равномерность u_p^* с базой $\mathcal{B}_p^*$, состоящей из всех конечных равномерно открытых покрытий, что $u_p \subset u_p^*$, и $Z(uX) = Z(u_p^* X)$, где $u_p \subset u$ - предкомпактная рефлексия Исбелла.Тогда u - $\dim X = \dim\left(X, u_p^*\right)$, где $u - \dim X$ - размерность Хараламбуса, $\dim\left(X, u_p^*\right)$ - размерность Исбелла-Смирнова равномерного пространства $u_p^* X$. Следовательно, $u - \dim X \quad \dim\left(\tilde{X}, \tilde{u}_p^*\right) = \dim s_{u_p^*} X \quad \dim \beta_u X$. Также в качестве приложения бикомпактификации $\beta_u X$, методом Б.А. Пасынкова, построены универсальные бикомпакты размерности $\dim \le n$ и веса $\le \tau$ для равномерных пространств с $u - \dim \le n$ и топологического веса $\le \tau$. Доказан равномерный аналог теоремы Тайманова и с помощью него установлено необходимое и достаточное условие, когда бикомпактификация Самюэля $s_u X$ гомеоморфна $\beta_u X$. Определены u - совершенные* *отображения и в терминах Декартовых квадратов даны их категорные и внутренние характеристики.*

Abstract: *At present paper Wallman type bicompactification* $\beta_u X = \omega(\mathsf{Z}(uX))$ *have been constructed by normal base* $\mathsf{Z}(uX)$ *of all uniformly closed sets and by using of* $u-$*functions, determined by Charalambous, and various properties of* $\beta_u X$ *are establishedsimilar toStone-Čechbicompactification* βX. *As one of the applications of bicompactification* $\beta_u X$ *it is proved, that for uniform space* uX *there exists such precompact uniformity* u_p^* *with base* $\mathcal{B}_p^*$, *consisting of all finite uniformly open coverings, that* $u_p \subset u_p^*$, *and* $\mathsf{Z}(uX) = \mathsf{Z}(u_p^* X)$, *where* $u_p \subset u$ *is Isbell precompact reflection. Then* $u\text{-}\dim X = \dim\left(X, u_p^*\right)$, *where* $u-\dim X$ *is Charalambous dimension,* $\dim\left(X, u_p^*\right)$ *isIsbell-Smirnov dimension of uniform space* $u_p^* X$. *So,* $u-\dim X \quad \dim\left(\tilde{X}, \tilde{u}_p^*\right) = \dim s_{u_p^*} X \quad \dim \beta_u X$. *Another application of* $\beta_u X$ *is for uniform spaces with* $u-\dim \leq n$ *and topological weight* $\leq \tau$ *the universal bicompacta with dimension* $\dim \leq n$ *and weight* $\leq \tau$ *are constructed by the Pasynkov method.*

The uniform analogue of Taimanov theorem is proved and by means of it the necessary and sufficient condition for homeomorphity of Samuel bicompactification $s_u X$ *to* $\beta_u X$ *are established. The* $u-$*perfect mappings are determined and in pull-back terms the category and inner characterizations of its are obtained.*

Урунттуу сөздөр: *бир калыптуу мейкиндиктер (чагылдыруулар), бир калыптуу ачык (туюк) көптүктөрү, бикомпактификация, өлчөм.*

Ключевые слова: *равномерные пространства (отображения), равномерно открытые (замкнутые) пространства, бикомпактификация, размерность.*

Keywords: *uniform spaces (mappings), uniformly open (closed) sets, bicompactifications, dimensions.*

1. Введение и предварительные сведения

H.Wallman ([36]) для каждого T_1 - пространства X по всем замкнутым множествам построил T_1- бикомпактифткацию $\omega(X)$. Обобщая конструкцию Волмэна, N.A.Shanin ([29],[30],[31]) по некоторой замкнутой T_1- базе $\mathcal{B}$ построил бикомпактификацию $\omega(X, \mathcal{B})$. O. Frink ([15]) конструировала T_2 - бикомпактициации методом Волмэна при помощи нормальных баз замкнутых множеств и сформулиравала проблему о возможности построения любой T_2- бикомпактификации методом Волмэна. J.M. Aarts ([4]) A.K. Steiner-E.F. Steiner ([27]), C. Bandt ([6]) решили эту проблему частично, а V.M. Ul`janov ([34]) построил контрпример. Развивая идею V.M. Ul`janov, в отрицании CH, J.van-Mill и H. Vermeer ([23]) также построили контрпример. L. Gillman- M.Jerison ([18]) построили Стоун-Чеховскую бикомпактификацию методом Волмэна по нормальной базе $\mathsf{Z}(X)$- всех функционально замкнутых множеств, т.е. $\beta X = \omega(X, \mathsf{Z}(X))$. Построением T_2-бикомпактификаций при помощи нормальных баз, состоящих из некоторого подсемейства $\mathsf{Z}(X)$ посвящены много работ (см. на пример, ([1],[2],[3],[27])). Построениям бикомпактификаций Волмэновского типа по равномерно замкнутым подкольцам кольца всех ограниченных непрерывных функций посвящены работы S. Mrŏwka ([24]) и A.K. Steiner, E.F.Steiner ([28]). Бикомпактификациям Волмэновского типа по базам из регулярно замкнутых множеств посвящены работы R.A. Alŏ - H.L. Shapiro ([2], см. также [3]).

Для равномерных пространств мы будем придерживаться обозначений и использовать известные результаты равномерной топологии из книги J.R. Isbell ([20]), также будем ссылаться на некоторые результаты A.A. Borubaev ([5]).

Пусть uX - равномерное пространство, u - равномерность терминах равномерных покрытий. Через $w(u)$ обозначается*вес* равномерности u, через $w(X)$ обозначается *вес* топологии равномерного пространства uX.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1([8]). Подмножество U равномерного пространства uX называется *равномерно открытым,* если существуют такое открытое множество O метрического пространства (M,ρ) и равномерно непрерывное отображение, $f : uX \to u_\rho M$, где u_ρ - метрическая равномерность, что $f^{-1}(0) = U$.

Дополнение равномерно открытого множества называется *равномерно замкнутым.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2([8]). *Подмножество* U *равномерного пространства* uX *равномерно открыто, если и только если* $U = f^{-1}((0,1])$ *для некоторой равномерно непрерывной функции* $f : uX \to u_I I$*, где* $I = [0,1]$ *- единичный интервал и* u_I *- единственная равномерность на* I.

Подмножество Z *равномерного пространства* uX *равномерно замкнуто, если только, если* $Z = f^{-1}(0)$ *для некоторой равномерно функции* $f : uX \to u_I I$.([9]).

Через $C^*(uX)$ - обозначим множество всех *ограниченных равномерно непрерывных функции на равномерном пространстве* uX .

Тогда $\mathcal{Z}(uX) = \{f^{-1}(0) : f \in C^*(uX)\}$ - *множество всех равномерно замкнутых,* $\mathcal{L}(uX) = \{X \setminus f^{-1}(0) : f \in C^*(uX)\}$ - *множество всех равномерно открытых подмножеств* равномерного пространства uX ([8]-[10]).

Для тонкой (fine) равномерности u_f тихоновского пространства X ([13],[20]) всякая непрерывная функция является равномерно непрерывной, следовательно, $C^*(u_f X) = C^*(X) -$ множество всех ограниченных непрерывных функции на X и $\mathcal{Z}(u_f X) = \mathcal{Z}(X) -$ множество всех *нуль-множеств*, $\mathcal{L}(u_f X) = \mathcal{L}(X) -$ множество всех *конуль-множеств* на X.

Отметим, что если X является линделефовым, то $\mathcal{L}(uX) = \mathcal{L}(X)$ для любой равномерности u на X, также $\mathcal{L}(u_\rho X) = \mathcal{L}(X)$, если u_ρ - метрическая равномерность метрического пространства (X,ρ) ([8],[9],[10]).

Покрытие состоящее из равномерно открытых множеств называется *равномерно открытым*, а покрытие состоящее из конуль-множеств называется *функционально открытым.*

В работах [8],[9],[10] Хараламбусом доказано, что $\mathcal{Z}(uX)$ образует базу замкнутых множеств равномерного пространств uX и *замкнуто относительно конечных объединений и счетных пересечений, а* $\mathcal{L}(uX)$ *образует базу открытых множеств равномерного пространства* uX *и замкнуто относительно конечных пересечений и счетных объединений.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3([8]). Отображение $f : uX \to vY$ называется $u-$*непрерывным* отображением, если $f^{-1}(Z) \in \mathcal{Z}(uX)$ $(f^{-1}(U) \in \mathcal{L}(uX))$ для любого $Z \in \mathcal{Z}(vY)$ $(U \in \mathcal{L}(vY))$.

Если $vY = u_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ $-$множество вещественных чисел, $u_{\mathbb{R}}$ $-$ естественная равномерность $\mathbb{R}$, то $u-$непрерывное отображение $f : uX \to u_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ называется $u-$*непрерывной функцией.* Если $vY = u_I I$, то $u-$непрерывное отображение $f : uX \to u_I I$ называется $u-$*функцией* ([9]).

Всякое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to vY$ является $u-$непрерывным и $u-$непрерывное отображение является непрерывным. Хараламбусом ([8]) показано, что из непрерывности не следует $u-$ непрерывность и из $u-$ непрерывности не следует равномерная непрерывность

ТЕОРЕМА 1.4([8]-[10]). *Пусть* $g_i : uX \to u_I I, i = 1,2 -$*равномерно непрерывные функции,* $Z_i = g_i^{-1}(0), i = 1,2$ *и* $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. *Тогда функция* $f : uX \to u_I I$ *определенная как* $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$ *для любого* $x \in X$ *является* $u-$*функций.*

РЕМАРКА 1.5. Функция $f : uX \to u_I I$ в теореме 2.4, вообще говоря, не является равномерно непрерывной.

Для равномерного пространства uX через $\dim(X,u)$ *обозначается размерность Исбелла-Смирнова* ([20],[32]), через $u-\dim X$ *обозначает размерность Хараламбуса* ([8]-[10]), а через

$\dim X$ *обозначается размерность Катетова-Смирнова* ([21],[32]), через $\mathrm{d}(X,Y)$ *относительная размерность А. Чигогидзе* ([11])

Для удобства изложения напомним необходимые сведения из работ [3],[7],[13],[25],[35].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть Zсистема замкнутых подмножеств T_1 – пространства X. Тогда:

(NB1) Z называется *базой-кольцом*, если любое замкнутое множество из X представляется ввиде пересечения некоторого семейства элементов Z и объединение и пересечение любых двух элементов из Z есть элемент Z.

(NB2) Z называется *отделимым*, если замкнуто F и $x \notin F$, то существует такое $N \in \mathsf{Z}$, что $x \in N$ и $N \cap F = \varnothing$.

(NB3) Z называется *нормальным*, если $F, N \in \mathsf{Z}$ и $F \cap N = \varnothing$, то найдутся такие $F', N' \in \mathsf{Z}$, что $F \subset X \setminus F', N \subset X \setminus N'$ и $X \setminus F' \cap X \setminus N' = \varnothing$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ1.7. Система Z замкнутых подмножеств T_1 – пространства X называется *нормальнойбазой*, если Z удовлетворяет условиям (NB1), (NB2) и (NB3).

Через $\mathrm{d}(X,\mathsf{Z})$ *обознается размерность С. Илиадиса* ([16],[19]) пространства X по *нормальной базе* Z.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ1.8. Фильтр $\mathcal{F}$, состоящий из элементов некоторой системы замкнутых множеств Z называется Z-*фильтром* и Z- фильтр $\mathcal{F}$, не содержащийся ни в одном отличном от себя Z-фильтре, называется Z-*ультрафильтром*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9.*Каждый Z-фильтр содержится в некотором Z-ультрафильтре, если семейство Z является кольцом, т.е. объединение и пересечение любых двух элементов Z есть элемент Z.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Семейство является Z-ультрафильтром, если Z отделимое кольцо замкнутых множеств.*

ТЕОРЕМА1.11. *Пусть Z-нормальная база T_1 – пространства X и $\omega(\mathsf{Z}) = \{p : p - \mathsf{Z} - \text{ультрафильтр}\}$. Тогда множество $\omega(\mathsf{Z})$ является бикомпактом относительно топологии порожденной базой замкнутых множеств $\{\overline{Z} : \overline{Z} \in \mathsf{Z}\}$, где $\overline{Z} = \{p \in \omega(\mathsf{Z}) : Z \in p\}$ и отображение $\varphi : X \to \omega(\mathsf{Z})$, где $x \mapsto \varphi(x)$ для любого $x \in X$, является всюду плотным гомеоморфным вложением X в $\omega(\mathsf{Z})$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. *Если Z элемент Z, то $\overline{Z}$ замыкание Z в $\omega(\mathsf{Z})$, т.е. $[Z]_{\omega(\mathsf{Z})} = \overline{Z}$ и для любых Z_1, Z_2 из Z выполнены равенства: $\overline{Z_1 \cap Z_2} = \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2$ и $\overline{Z_1 \cup Z_2} = \overline{Z}_1 \cup \overline{Z}_2$, т.е. база $\{\overline{Z} : \overline{Z} \in \mathsf{Z}\}$ является базой кольцом.*

ТЕОРЕМА 1.13(А.Д. Тайманов [33]). *Пусть X – всюду плотное подпространство топологического пространства T и $f : X \to B$ непрерывное отображение пространства X в бикомпакт B. Отображение f Можно непрерывно продолжить на пространство T в том и только том случае, если для каждой пары B_1, B_2 непересекающихся замкнутых в бикомпакте B множеств замыкания их проббразов $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2)$ в пространстве T не пересекаются, т.е. $[f^{-1}(B_1)]_T \cap [f^{-1}(B_1)]_T = \varnothing$.*

В категории C квадрат

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & T \end{array}$$

называется Декартовым (pullback) в C, если для любой пары морфизмов $l:Z\to X$ и $k:Z\to X$ такой, что $f\circ l=g\circ k$, существует единственный морфизм $h:Z\to P$ такой, что $p_1\circ h=l$ и $p_2\circ h=k$.

В секции 2, с использованием u- функций Хараламбуса, по нормальной базе $Z(uX)$ равномерного пространства uX строится бикомпактицикация Волмэновского типа $\beta_u X=\omega(X,Z(uX))$, которая обладает многими свойствами , аналогичными Стоун-Чеховской бикомпактификации βX (теоремы 2.1, 2.3, 2.4 , 2.6, 2.10, и их следствия). Доказано, что равномерность бикомапкта $\beta_u X$ индуцирует на uX равномерность u_p^* с базой из всех конечных равномерно открытых покрытий (теорема 2.5), следовательно, размерность Хараламбуса u-$\dim X$ совпадает с размерностью Исбелла-Смирнова $\dim(X,u_p^*)$ и размерностью $\dim\beta_u X$ (следствия 2.5.1, 2.5.2). Отметим, что равенство $u-\dim X=\dim(X,u_p^*)=\dim\beta_u X$ следует также из более общих результатов С. Илиадиса ([19]) и А.Чигогидзе ([11]), а так же с учетом следствия 2.5.6, вписывается в цепь включений для различных размерностей работы Д. Георгиу, С. Илиадиса, К. Козлова ([17]). Для установления необходимого достаточного условия гомеоморфности Самюэлевской бикомпактификации $s_u X$ бикомпактификации $\beta_u X$ (теорема 2.8) доказан равномерный аналог теоремы А.Д. Тайманова ([33]) (теорема 2.7), и показано, что в классе тихоновских пространств условие теоремы Тайманова можно ослабить (следствие 2.7.1). Используя идею Б. А. Пасынкова определенно равномерное пространство uX, для которого $s_u X<\beta_u X<\beta X$ (теорема 2.9). В качестве приложения бикомпактификации $\beta_u X$, с использованием оригинального метода Б. А. Пасынкого ([26]) построен универсальный бикомпакт P_τ^n с $\dim P_\tau^n\le n$ и $w(P_\tau^n)\le\tau$, что любое равномерное пространство uX с размерностью Хараламбуса $u-\dim X\le n$ и веса $w(X)\le\tau$ гомеоморфно вкладывается в P_τ^n (теорема 2.13) и, для любого такого равномерного пространства существует бикомпактификация размерности $\dim\le n$ и веса $\le\tau$ (следствие 2.13.1) . Отметим что теорема 2.13 следует из более общего результата С. Илиадиса ([19]).

В категории $ZUnif$ определяются u - совершенные отображения и в терминах Декартовых квадратов (pullback), в качестве приложения бикомпактификации $\beta_u X$, даются различные характеристики u - совершенных отображений (теорема 2.16).

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 2.1 *Система* $Z(uX)$ *является нормальной базой для равномерного пространства* uX *и определена бикомпактификация Волмэновского типа* $\beta_u X=\omega(Z(uX))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система $Z(uX)$ является базой-кольцом. Это следует из результатов Хараламбуса ([8],[9],[10]). Покажем выполнение аксиом (NB1) и (NB2) определения 1.6.

Система $Z(uX)$ является отделимой. Это следует на тихоновости равномерного пространства uX. Действительно, если $F\subset X$ замкнуто и $x\notin F$, то существует такая равномерно непрерывная функция $f:uX\to I$, что $f(x)=0$ и $f(F)=1$. Тогда $x\in N = f^{-1}([0;1/2])\in Z(uX)$ и $N\cap F=\varnothing$.

Система $Z(uX)$ является нормальной. Действительно, пусть $F,N\in Z(uX)$ и $F\cap N=\varnothing$. Тогда $F=g_1(0)$ и $N=g_2(0)$ для некоторых равномерно непрерывных $g_i:uX\to u_I I, i=1,2$. Функция $f(x)=g_1(x)/\left(g_1(x)+g_2(x)\right)$ для всех $x\in X$ является $u-$функцией (см. 2.4) и $f(F)=0$ и $f(N)=1$. Положим $N'=f^{-1}([0;1/2])$ и $F'=f^{-1}([1/2;1])$. Тогда N' и F'-равномерно замкнуты, т.е. $N',F'\in Z(uX)$ (см. 2.2), $F\subset X\setminus F'$, $N\subset X\setminus N'$ и $X\setminus(N'\cup F')=X\setminus N'\cap X\setminus F'=X\setminus X=\varnothing$. □

РЕМАРКА 2.1.1. Отметим что нормальная база $Z(uX)$ обладает свойством мультипликативности, т.е. является *мультипликативной нормальной базой* ([11]).

СЛЕДСТВИЕ 2.1.2. *Семейство* $[\mathbf{Z}(uX)]_{\beta_u X} = \{[Z]_{\beta_u X} : Z \in \mathbf{Z}(uX)\}$ – *образует нормальную базу бикомпакта* $\beta_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 5.3.3 из книги С. Илиадаса ([19]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Каждый $\mathbf{Z}(uX)-$ ультрафильтр p на равномерном пространстве uX будет называтся z_u – *ультрафильтром.*

ТЕОРЕМА 2.3. Б*икомпактификация Волмэновского типа* $\beta_u X$ *равномерного пространство* uX *обладает следующим свойством:*

Любое $u-$ *непрерывное отображение* $f : uX \to vK$ *равномерного пространства* uX *в бикомпактное равномерное пространство* vK *продолжается до непрерывного отображения* $\beta_u f : \beta_u X \to vK$ $(*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что доказательство можно непосредствено получить из леммы 6.4.1 книги ([19]). Мы предоставляем другое более удобное для нас доказательство. Пусть $f : uX \to vK$ произвольное $u-$ непрерывное отображение равномерного пространства uX в бикомпактное равномерное пространство vK. Тогда $f-$ непрерывное отображение. Для доказательства существования непрерывного продолжения $\beta_u f : \beta_u X \to vK$ воспользуемся теоремой А.Д. Тайманова ([33]) о продолжении. Для этого достаточно показать, что для любых таких замкнутых $B_1 \subset K$, $B_2 \subset K$, что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ выполняется $[f^{-1}(B_1)]_{\beta_u X} \cap [f^{-1}(B_2)]_{\beta_u X} \quad \varnothing$. Так как $B_1 \subset K$ и $B_2 \subset K$ замкнуты в бикомпакте K и $\mathbf{Z}(vK)-$ база замкнутых множеств в K то $B_1 = \cap\{Z_{1s} : s \in S\}$ и $B_2 = \cap\{Z_{2t} : t \in T\}$, где $Z_{1s} \in \mathbf{Z}(vK)$ для всех $s \in S$ и $Z_{2t} \in \mathbf{Z}(vK)$ для всех $t \in T$. В силу $u-$ непрерывности отображения $f : uX \to vK$ *имеем* $f^{-1}(Z_{1s}) \in \mathbf{Z}(uX)$ для всех $s \in S$ и $f^{-1}(Z_{2t}) \in \mathbf{Z}(uX)$ для всех $t \in T$. Выполнено $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(\cap\{Z_{1s} : s \in S\}) \quad \cap f^{-1}\{(Z_{1s} : s \in S)\}$, т.е. $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(Z_{1s})$ для любого $s \in S$ и $f^{-1}(B_2) = f^{-1}(\cap\{Z_{2t} : t \in T\}) \quad \cap f^{-1}\{(Z_{2t} : t \in T)\}$ т.е. $f^{-1}(B_2) \subseteq f^{-1}(Z_{2t})$ для любого $t \in T$. Тогда, выполнены включения $[f^{-1}(B_1)]_{\beta_u X} \subseteq \overline{f^{-1}(Z_{1s})}$ для любого $s \in S$ и $[f^{-1}(B_2)]_{\beta_u X} \subseteq \overline{f^{-1} \setminus (Z_{2t})}$ для любого $t \in T$. Следовательно, имеем включения $[f^{-1}(B_1)]_{\beta_u X} \subseteq \cap\{\overline{f^{-1}(Z_{1s})} : s \in S\}$ и $[f^{-1}(B_2)]_{\beta_u X} \subseteq \cap\{\overline{f^{-1}(Z_{2t})} : t \in T\}$. Теперь достаточно показать, что $(\cap\{\overline{f^{-1}(Z_{1s})} : s \in S\}) \cap (\cap\{\overline{f^{-1}(Z_{2t})} : t \in T\}) \quad \varnothing$. Предположим противное. Пусть существует такой z_u – ультрафильтр $p \in \beta_u X$, что $p \in \overline{f^{-1}(Z_{1s})}$ для всех $s \in S$ и $p \in \overline{f^{-1}(Z_{2t})}$ для всех $t \in T$. Тогда $f^{-1}(Z_{1s}) \in p$ для всех $s \in S$ и $f^{-1}(Z_{2t}) \in p$ для всех $t \in T$, т.е. $\{Z_{1s} : s \in S\} \subset f(p)$ и $\{Z_{2t} : t \in T\} \subset f(p)$. Семейство $f(p) = \{f(P) : P \in p\}$ центрировано в бикомпакте K, следовательно $\cap\{f(P) : P \in p\} \quad K' \neq \varnothing$ и выполнено $B_1 \cap B_2 \quad (\cap\{Z_{1s} : s \in S\}) \cap (\cap\{Z_{2t} : t \in T\}) \supset K' \neq \varnothing$, т.е. $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Противоречие. Итак, $[f^{-1}(B_1)]_{\beta_u X} \cap [f^{-1}(B_2)]_{\beta_u X} \quad \varnothing$ и условия теоремы А.Д. Тайманова выполнены. Таким образом, существует непрерывное продолжение $\beta_u f : \beta_u X \to vK$ u-непрерывного отображения $f : uX \to vK$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3.1.*Всякое* $u-$ *непрерывное отображение* $f : uX \to vY$ *равномерного пространства* uX *в равномерное пространство* vY *продолжается до непрерывного отображения* $\beta_u f : \beta_u X \to s_v Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : uX \to vY - u-$ непрерывное отображение. Для любого $A \in \mathbf{Z}(s_v Y)$ имеем $A \cap Y \in \mathbf{Z}(vY)$. Следовательно $f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cap X) \in \mathbf{Z}(uX)$ и $f : uX \to s_v Y$

является u – непрерывным отображением. Тогда, непосредственно из теоремы следует, что оно продолжается до непрерывного отображения $\beta_u f : \beta_u X \to s_v Y$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.3.2.*Всякое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to vY$ равномерного пространства uX в равномерное пространство vY продолжается до непрерывного отображения $\beta_u f : \beta_u X \to s_u Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того что всякое равномерно непрерывное отображение u – непрерывно.□

СЛЕДСТВИЕ 2.3.3.*Тождественное отображение $1_X : uX \to uX$ продолжается до непрерывного отображения $\beta_u 1_X : \beta_u X \to s_u X$.*

ТЕОРЕМА 2.4 *Для бикомпактификации $\beta_u X$ равномерного пространства uX следующие условия равносильны:*

1. *Любая u – функция $f : uX \to I$ имеет продолжение до непрерывной функции $\beta_u f : \beta_u X \to I$.*
2. *Если $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(uX)$ и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, то $[Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X} = \varnothing$.*
3. *Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(uX)$ выполнено равенство $[Z_1 \cap Z_2]_{\beta_u X} = [Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X}$.*
4. *Каждая точка $\beta_u X$ есть предел единственного z_u-ультрафильтра на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение условия 1. для бикомпактификации $\beta_u X$ непосредственно следует из теоремы 2.3. т.к. $I -$метризуемый бикомпакт с единственной равномерностью u_I ([13],[20],[25]) .

$(1 \Rightarrow 2)$. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(uX)$ и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, тогда существует такие равномерно непрерывные функции $g_1 : uX \to I$, $g_2 : uX \to I$, что $Z_1 = g_1^{-1}(0)$ и $Z_1 = g_2^{-1}(0)$. Тогда, согласно (1.4), функция $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$, $x \in X$ является u - функцией и $Z_1 = f^{-1}(0)$ и $Z_2 = f^{-1}(1)$. Согласно пункта 1, функция $f : uX \to I$ продолжается до равномерно непрерывной функции $\beta_u f : \beta_u X \to I$. Тогда $\tilde{Z}_1 = \beta_u f^{-1}(0)$, $\tilde{Z}_2 = \beta_u f^{-1}(1)$ и $\tilde{Z}_1 \cap \tilde{Z}_2 = \varnothing$. Ясно, что $[Z_1]_{\beta_u X} \subset \tilde{Z}_1$ и $[Z_2]_{\beta_u X} \subset \tilde{Z}_2$. Тогда $[Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X} = \varnothing$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Включение $[Z_1 \cap Z_2]_{\beta_u X} \subseteq [Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X}$ выполнено всегда. Докажем обратное включение, тем самым пункт 3 будет доказан. Пусть $p \in [Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X} \neq \varnothing$. Тогда, согласно пункта 2, $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$ и $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}(uX)$. Имеем $[Z_1]_{\beta_u X} = \overline{Z}_1$ и $[Z_2]_{\beta_u X} = \overline{Z}_2$, следовательно, $p \in \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2$, т.е. $p \in \overline{Z}_1$ и $p \in \overline{Z}_2$. Тогда $Z_1 \in p$ и $Z_2 \in p$, так как $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}(uX)$ и $Z_1 \cap Z_2 \neq \varnothing$, то $Z_1 \cap Z_2 \in p$, и следовательно, $p \in \overline{Z_1 \cap Z_2}$, т.е. $\overline{Z_1} \cap \overline{Z_2} = [Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X} \subseteq \overline{Z_1 \cap Z_2} = [Z_1 \cap Z_2]_{\beta_u X}$. Итак, $[Z_1]_{\beta_u X} \cap [Z_2]_{\beta_u X} \subseteq [Z_1 \cap Z_2]_{\beta_u X}$ и пункт 3 выполнен.

$(3 \Rightarrow 4)$. Для любой точки $p \in \beta_u X$ выполнено равенство $\{p\} = \cap\{\overline{Z} : Z \in p\}$. Система $\{\overline{Z} : Z \in p\}$ является фильтром, сходящимся к точке $p \in \beta_u X$. Действительно, пусть $p \in V$ произвольная открытая окрестность точки p. Тогда $p \notin \beta_u X \setminus V = F -$замкнутое множество, следовательно $F = \cap\{\overline{Z}_i : i \in I\}$ и $Z_i \in \mathcal{Z}(uX)$ для любого $i \in I$. Существует индекс $k \in I$ такой, что $F \subset \overline{Z}_k$ и $p \notin \overline{Z}_k$, т.е. $Z_k \notin p$. Тогда существует $Z_k^{'} \in p$ такой, что $Z_k \cap Z_k^{'} = \varnothing$ и по пункту 2 имеем $\overline{Z_k} \cap \overline{Z_k^{'}} = \varnothing$. Тогда $p \in \overline{Z_k^{'}} \subseteq \beta_u X \setminus \overline{Z_k} \subset V$. Это означает, что фильтр $\{\overline{Z} : Z \in p\}$ сходится к p.

Предположим, что p,q z_u – ультрафильтры и $q\neq p$. Тогда существует $Q\in q$ и $P\in p$, такие, что $Q\cap P=\varnothing$. Тогда согласно пункту 2 имеем $[Q]_{\beta_uX}\cap[P]_{\beta_uX}=\varnothing$. Это означает, что различные z_u-ультрафильтры p и q имеют различные пределы.

$(4\Rightarrow 1)$. Пусть $f:uX\to u_II$ – u – непрерывное отображение равномерного пространства uX в бикомпакт I с единственной на нем равномерностью u_I. Построим продолжение $\beta_uf:\beta_uX\to u_II$ отображения f. Пусть $p\in\beta_uX\setminus X$ – произвольная точка, т.е. p – произвольный z_u-ультрафильтр на равномерном пространстве uX и $\cap\{[P]_X:P\in p\}=\varnothing$. Но по пункту (4) $\cap\{[P]_{\beta_uX}=\overline{P}:P\in p\}=\{p\}$. По условию теоремы $f^{-1}(Z)\in\mathcal{Z}(uX)$ для любого $Z\in\mathcal{Z}(u_II)$. Положим $\mathcal{F}=\{Z\in\mathcal{Z}(u_II):f^{-1}(Z)\in p\}$. Ясно, что 1^0. $\varnothing\notin\mathcal{F}$, 2^0. для любого Z_1,Z_2 из $\mathcal{F}$ выполнено $Z_1\cap Z_2\in\mathcal{F}$, т.к. если $f^{-1}(Z_1)\in p$ и $f^{-1}(Z_2)\in p$, то $f^{-1}(Z_1\cap Z_2)=f^{-1}(Z_1)\cap f^{-1}(Z_2)\in p$ и 3^0. если $Z'\in\mathcal{Z}(uX)$ и $Z\subset Z'$ для некоторого $Z\in\mathcal{F}$, то $Z'\in\mathcal{F}$, т.к. $f^{-1}(Z)\in p$, $f^{-1}(Z')\in\mathcal{Z}(uX)$ и $f^{-1}(Z')\supset f^{-1}(Z)$, то $f^{-1}(Z')\in p$. Итак, $\mathcal{F}$ - z_{u_I} – фильтр на бикомпакте u_II, т.е. $\mathbf{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ – *идеал в кольце* $C^*(I)$ ([18]). Пусть $Z_1\in\mathcal{Z}(u_II)$, $Z_2\in\mathcal{Z}(u_II)$ такие, что выполненно $Z_1\cup Z_2\in\mathcal{F}$. Тогда имеем $f^{-1}(Z_1\cup Z_2)=f^{-1}(Z_1)\cup f^{-1}(Z_2)\in p$. Следовательно, т.к. p – z_u – ультрафильтр, либо $f^{-1}(Z_1)\in p$, либо $f^{-1}(Z_2)\in p$. Тогда либо $Z_1\in\mathcal{F}$, либо $Z_2\in\mathcal{F}$. Это означает, что z_{u_I} – фильтр $\mathcal{F}$ или идеал $\mathbf{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ являются простыми (prime) (4.12.[18], 1.44.[35]). Тогда существует единственный максимальный идеал M, содержащий $\mathbf{Z}^{-1}(\mathcal{F})$ (2.13.[15]). Пусть q – z_{u_I} – ультрафильтр в I, соотвествующий максимальному идеалу M, т.е. $q=\{f^{-1}(0):f\in M\}$. В силу бикомпактности u_II, $\cap\{Q:Q\in q\}=\{y\}$ для некоторой точки $y\in I$. Положим $\beta_uf(p)=y$. Тем самым определено отображение $\beta_uf:\beta_uX\to u_II$ – продолжение f и по определению β_uf выполнено $\beta_uf\big|_X=f$. Покажем, что построенное отображение $\beta_uf:\beta_uX\to u_II$ является непрерывным и, следовательно, равномерно непрерывным, в силу единственности равномерностей на бикомпактах β_uX и u_II. Итак, пусть $\beta_uf(p)=y$, U_y – произвольная окрестность точки y и q такой z_{u_I} – ультрафильтр, что $\cap\{Q:Q\in q\}=\{y\}$. Пусть U_y – произвольная окрестность точки y. Тогда согласно, ([7]-[9]) существуют такие $V,W\in\mathcal{Z}(u_II)$, что $y\in K\setminus W\subset V$, $W\cup V=I$ и $y\in V\subset U_y$. Так как, $X=f^{-1}(K)=f^{-1}(W)\cup f^{-1}(V)\in p$, то либо $f^{-1}(W)\in p$, либо $f^{-1}(V)\in p$. По построению $y\notin W$. Тогда $W\notin q$, следовательно, $f^{-1}(W)\notin p$ или, $p\notin[f^{-1}(W)]_{\beta_uX}$. Тогда $p\in U_p=\beta_uX\setminus[f^{-1}(W)]_{\beta_uX}$ и U_p – открытая в β_uX окрестность точки p. Имеем $\beta_uf(U_p)=\beta_uf(\beta_uX\setminus[f^{-1}(W)]_{\beta_uX})\subseteq K\setminus\beta_uf([f^{-1}(W)]_{\beta_uX})$. Выполнено включение $W\subseteq\beta_uf([f^{-1}(W)]_{\beta_uX})$. Действительно, пусть $t\in W$ – произвольно и $p_t\in\beta_uX$ таково, что $\beta_uf(p_t)=t$. Тогда по построению $f^{-1}(W)\in p_t$, следовательно $p_t\in[f^{-1}(W)]_{\beta_uX}$. Тогда $t=\beta_uf(p_t)\in\beta_uf([f^{-1}(W)]_{\beta_uX})$. С учетом доказанного включения, имеем $K\setminus\beta_uf([f^{-1}(W)]_{\beta_uX})\subseteq K\setminus W\subset V$, следовательно $\beta_uf(U_p)\subseteq V\subseteq U_y$, т.е. отображение $\beta_uf:\beta_uX\to u_II$ непрерывно в произвольной точке $p\in\beta_uX$ следовательно, оно непрерывно.□

ТЕОРЕМА 2.5. *Равномерность бикомпакта* β_uX *индуцирует на равномерное пространство* uX *предкомпактную равномерность* u_p^* *с базой* $\mathcal{B}_p^*$, *состоящей из всех конечных равномерно открытых покрытий и выполнено* $u_p\subset u_p^*$, $\mathcal{Z}(uX)=\mathcal{Z}(u_p^*X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как семейство $\{[Z]_{\beta_u X} = \bar{Z} : Z \in \mathbf{Z}(uX)\}$ образует базу замкнутых множеств бикомпакта $\beta_u X$, то семейство $\{\beta_u X \setminus \bar{Z} : Z \in \mathbf{Z}(uX)\}$ – образует базу открытых множеств бикомпакта $\beta_u X$. Пусть $A = X \setminus Z$ где, $Z \in \mathbf{Z}(uX)$. Тогда $A \in \mathcal{L}\,(uX)$

и $\beta_u X \setminus \bar{Z} = \beta_u X \setminus [X \setminus A]_{\beta_u X}$ - такое наибольшее открытое множеств $\beta_u X$, что $\beta_u X \setminus [X \setminus A]_{\beta_u X} \cap X = A$. Положим $Ex_u A = \beta_u X \setminus [X \setminus A]_{\beta_u X}$ для любого $A \in \mathcal{L}\,(uX)$. Таким образом система открытых множеств $\{Ex_u A : A \in \mathcal{L}\,(uX)\}$ образует базу топологии открытых множеств бикомпакта $\beta_u X$.Множество всех конечных открытых покрытий составленных из базовых открытых множеств вида $Ex_u A, A \in \mathcal{L}\,(uX)$ образует базу единственной равномерности бикомпакта $\beta_u X$ ([25]). Пусть $\{Ex_u A_1, Ex_u A_2, ..., Ex_u A_n\}$ – произвольное открытое базовое покрытие $\beta_u X$, где $A_i \in \mathcal{L}\,(uX)$ $i = 1, 2, ..., n$. Тогда $\cup_{i=1}^{n} Ex_u A_i \cap X \quad \cup_{i=1}^{n} (Ex_u A_i \cap X) \quad \cup_{i=1}^{n} A_i \quad X$, т.е. семейство $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ является конечным равномерно открытым покрытием uX .

Обратно пусть $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ произвольное конечное равномерно открытое покрытие. Тогда $\cup_{i=1}^{n} B_j = X$ и $B_j \in \mathcal{L}\,(uX)$ для любого $j = 1, 2, ..., k.$ Следовательно, $Z_j = X \setminus B_j \in \mathbf{Z}(uX)$ для всех $j = 1, 2, ..., k.$ и $\cup_{i=1}^{k} Z_i \quad \varnothing$. Тогда из свойства 2 теоремы 3.4 в $\beta_u X$ имеем $\cup_{j=1}^{k} [Z_j]_{\beta_u X} \quad \varnothing$. Это означает, что семейство $\{Ex_u B_j, j = 1, 2, ..., k\}$ является базовым конечным открытым покрытием бикомпакта $\beta_u X$, т.к. $\cup_{i=1}^{k} Ex_u B_j = \cup_{i=1}^{k} \beta_u X \setminus [X \setminus B_j] \quad \beta_u X \setminus \cup_{i=1}^{k} [Z_j]_{\beta_u X} = \beta_u X$.

Итак, равномерность u_p^* порождена базой $\mathcal{B}_p^*$ состоящей из всех конечных равномерно открытых покрытий равномерного пространства uX .

Предкомпактная равномерность $u_p \subset u$ порождена всеми равномерно непрерывными функциями $f : uX \to u_I I$ (2.5.7[13]), следовательно, u_p имеет базой $\mathcal{B}_p$ некоторое семейство равномерно открытых покрытий. Ясно, что $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_p^*$. Тогда $u_p \subset u_p^*$ и $\mathbf{Z}(uX) \subset \mathbf{Z}(u_p^* X)$. С другой стороны, если $F \in \mathbf{Z}(u_p^* X)$, то существует такая равномерная непрерывная функция $f : u_p^* X \to u_I I$, что $F = f^{-1}(0)$. Заметим что функция $f : u_p^* X \to I$ является u – непрерывной, следовательно $F \in \mathbf{Z}(uX)$. Это означает, что $\mathbf{Z}(u_\rho^* X) \subset \mathbf{Z}(uX)$. Равенство $\mathbf{Z}(uX) = \mathbf{Z}(u_p^* X)$ доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.1. *Для равномерного пространства* uX *имеет место равенство* u - $\dim X = \dim(X, u_p^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВОнепосредственно вытекает изопределения размерностей Хараламбуса, Исбелла-Смирнова и из теоремы 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.2. *Для равномерного пространства* uX *имеет место равенство* u - $\dim X = \dim \beta_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\tilde{u}_p^* \tilde{X} = s_{u_\rho^*} X$ – Самуэлевская бикомпактификация тихоновского пространства X по равномерности u_p^* . Тогда из теоремы 3.5. вытекает равенства $s_{u_p^*} X = \beta_u X$, а из равенство $\dim(X, u_p^*) = \dim(\tilde{X}, \tilde{u}_p^*)$ ([20],[32]) вытекает равенство u - $\dim X = \dim \beta_u X$.

РЕМАРКА 2.5.3.Отметим, что равенство u - $\dim X = \dim \beta_u X$ вытекает из более общего равенства $d(X, \mathbf{Z}) = d(X, [\mathbf{Z}]_{\omega(\mathbf{Z})})$ работы С. Илиадиса ([19]), где $d(X, \mathbf{Z})$ -

размерность по нормальной базе Z и более общего равенства $u-\dim X = d(X,\beta_u X)$ работы А. Чигогидзе ([11]), где $d(X,\beta_u X)$ - относительная размерность.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.4. *Всякое u - непрерывное отображение $f: uX \to vY$ равномерного пространства uX в равномерное пространство vY продолжается до непрерывного отображения $\beta_u f: \beta_u X \to \beta_v Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства $\mathsf{Z}(vY) = \mathsf{Z}(v_p^* Y)$. Тогда отображение $f: uX \to \beta_v Y - u -$ непрерывно. Тогда из теоремы 2.3 вытекает, что отображение $f: uX \to vY$ продолжается до непрерывного отображения $\beta_u f: \beta_u X \to \beta_v Y$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.5.5. *Если непрерывная функция $f: X \to I$ продолжается до непрерывной функции $F: \beta_u X \to I$, что f - является u - функцией $f: uX \to I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если непрерывная функция $f: X \to I$ продолжается до непрерывной функции $F: \beta_u X \to I$, то $f: u_p^* X \to u_I I$ - равномерно непрерывная функция. Следовательно, функция $f: uX \to I$ является u - функцией. □

СЛЕДСТВИЕ 2.5.6. *Бикомпакт $\beta_u X$ является β - подобной, в смысле Мрувки* ([24])*, бикомпактификацией равномерного пространства uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество всех ограниченных u - непрерывных функций совпадает с кольцом $C(u_p^* X) = C^*(u_p^* X)$- всех ограниченных равномерно непрерывных функций равномерного пространства $u_p^* X$. В силу следствия 2.5.5, кольцо $C^*(u_p^* X)$- является *максимальным* подкольцом кольца $C^*(X)$- всех ограниченных непрерывных функций тихоновского пространства X , порождающих бикомпактификацию $\beta_u X$. □

РЕМАРКА 2.5.7. Отметим, что бикомпактификация $\beta_u X$, в случае тонкой (fine) равномерности u_f, совпадает со Стоун-Чеховской бикомпактификацией βX, а в случае, когда для равномерности u выполняется равенство $u_p = u_p^*$, то $\beta_u X = s_u X -$ Самюэлевская бикомпактификация. Тогда следствия 2.5.1, 2.5.2 и 2.5.6 вписываются в цепочку $\dim X \in d - Sp_\beta(X) \subset d - Sp_W(X) \subset d - Sp_U(X)$ теоремы 3.1 работы Д. Георгиу, С. Иллиадиса и К. Козлова ([17]).

ТЕОРЕМА 2.6. *Существует взаимно однозначное соответствие между множемтвом всех непрерывных функций $f: \beta_u X \to I$ и множеством всех u - функций $f: uX \to I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства 1 теоремы 3.4. каждая u- функция $g: uX \to I$ продолжается до непрерывной функции $\beta_u g: \beta_u X \to I$ и ясно, что для функций $g_1: uX \to I$, $g_2: uX \to I$, если $g_1 \neq g_2$, то $\beta_u g_1 \neq \beta_u g_2$.

Если $f: \beta_u X \to I$- произвольная непрерывная функция, то $g = f|_X : u_p^* X \to u_I I$ - равномерно непрерывная функция. Следовательно, в силу теоремы 3.5., $g = f|_X : uX \to I - u$ - непрерывная функция. Ясно, что $\beta_u g = f: \beta_u X \to I$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.6.1 *Равномерность u_p^* на равномерном пространстве uX порождена семейством всех u - функций $f: uX \to I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерность бикомпакта $\beta_u X$ единственна и она порождается всеми непрерывными и, следовательно, всеми равномерно непрерывными функциями $f: \beta_u X \to u_I I$. Тогда из теоремы 3.5. и теоремы 3.6. непосредственно следует, что равномерность u_p^* порождается всеми равномерно непрерывными функциями $g = f|_X : u_p^* X \to u_I I$, которые являются u - функциями $g: uX \to I$. □

Назовем бикомпактные расширения $b_u^1 X$ и $b_u^2 X$ равномерного пространства uX *канонически гомеоморфными*, если существует такой гомеоморфизм $h: b_u^1 X \to b_u^2 X$, что $h\big|_X = 1_X : X \to X$ -тождественное отображение.

СЛЕДСТВИЕ 2.6.2. *Бикомпакт* $\beta_u X$ *является единственной, с точностью до канонического гомеоморфизма, бикомпактификацией равномерного пространства* uX, *удовлетворяющей свойству* $(*)$ *теоремы 2.3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует бикомпактное расширение $b_u X$ равномерного пространства uX удовлетворяющее свойству $(*)$ теоремы 2.3. Тогда тождественное отображение $1_X : uX \to \beta_u X - u$- непрерывно и продолжается до непрерывного отображение $b_u 1_X : b_u X \to \beta_u X$. С другой стороны, всякая u- функция $f : uX \to I$ продолжается до непрерывной функции $b_u f : b_u X \to I$, следовательно, в силу следствия 2.6.1., тождественное отображение $1_X : uX \to b_u X$ - u-непрерывно и оно продолжается до непрерывного отображение $\beta_u 1_X : \beta_u X \to b_u X$. Тогда для отображений $b_u 1_X : b_u X \to \beta_u X$ и $\beta_u 1_X : \beta_u X \to b_u X$ имеем $b_u 1_X \circ \beta_u X : b_u X \to b_u X$ и $\beta_u 1_X \circ \beta_u 1_X : \beta_u X \to \beta_u X$ причем $(b_u 1_X \circ \beta_u 1_X)\big|_X = 1_X$ и $(\beta_u 1_X \circ b_u 1_X)\big|_X = 1_X$, следовательно $\beta_u 1_X$ и $b_u 1_X$ - взаимно обратные гомеоморфизмы.□

Следующаятеоремаустанавливает, что в случае тихоновских пространств условие теоремы А.Д. Тайманова можно ослабить.

ТЕОРЕМА 2.7.*Пусть* $A -$ *всюду плотное подпространство тихоновского пространства* X *и* $f : A \to Y$ *непрерывное отображение* A *в бикомпакт* Y. *Отображение* f *можно непрерывно продолжить на* X *в том и только том случае, если для любых* $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Z}(Y)$ *таких, что* $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ *их замыкания в* X *не пересекаются, т.е.* $[f^{-1}(Z_1)]_X \cap [f^{-1}(Z_2)]_X = \varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F : X \to Y$ непрерывное продолжение отображения $f : uA \to Y$, где $Z_1, Z_2 \in \mathrm{Z}(Y)$ таковы, что $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Тогда $F^{-1}(Z_i) = [F^{-1}(Z_i)]_X, i = 1,2$ и $[F^{-1}(Z_1)]_X \cap [F^{-1}(Z_2)]_X = \varnothing$. Так как имеем включения $[f^{-1}(Z_i)]_X \subset F^{-1}(Z_i), i = 1,2$, то $[f^{-1}(Z_1)]_X \cap [f^{-1}(Z_2)]_X = \varnothing$ и условие теоремы выполнено.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы. Для произвольной точки $x \in X$ $x \in X$через $\mathcal{B}(x)$ обозначим семейство всех окрестностей точки $x \in X$. Так как для любых окрестностей $U_i \in \mathcal{B}(x)$, $i = 1,2,...,n$, имеем $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{B}(x)$ и выполняется $[f(A \cap \cap_{i=1}^n U_i)]_Y \subset \cap_{i=1}^n [f(A \cap U_i)]_Y$, то система $\mathcal{F}(x) = \{[f(U \cap A]_Y : U \in \mathcal{B}(x)\}$ - центрированное семейство замкнутых в бикомпакте Y множеств. Тогда $F(x) = \cap \mathcal{F}(x)$ не пусто и бикомпактно в Y. Покажем что $F(x) = y$ для некоторой точки $y \in Y$. Предположим, что существуют $y_1, y_2 \in F(x)$ и $y_1 \neq y_2$. Тогда существует такие $Z_i \in \mathrm{Z}(Y)$ и $V_i \in \mathcal{L}(Y)$ $i = 1,2$, что $y_1 \in V_1 \subset \overline{V}_1 \subset Z_1$, $y_2 \in V_2 \subset \overline{V}_2 \subset Z_2$ и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Тогда $f^{-1}(Z_i) \in \mathrm{Z}(A)$, $f^{-1}(V_i) \in \mathcal{L}(A)$ $i = 1.2$, и по условию теоремы $[f^{-1}(Z_1)]_X \cap [f^{-1}(Z_2)]_X = \varnothing$. Тем более $[f^{-1}(V_1)]_X \cap [f^{-1}(V_2)]_X = \varnothing$. Положим $W_i = X \setminus [f^{-1}(V_i)]_X, i = 1.2,$. Тогда $X = W_1 \cup W_2$ и либо $x \in W_1$, либо $x \in W_2$. Предположим, для определенности $x \in W_1 = X \setminus [f^{-1}(V_1)]_X$. Имеем $V_1 \cap Y \setminus [V_1]_X = \varnothing$ и тем более $V_1 \cap f(A \setminus [f^{-1}(V_1)]_X) = \varnothing$, т.к. $f(A \setminus [f^{-1}(V_1)]_X) \subset Y_1 \setminus [V_1]_X$. Тогда, $V_1 \in \mathcal{L}(uA), V_1 \cap [f(A \setminus [f^{-1}(V_1)]_X)]_Y = \varnothing$ и следовательно $V_1 \cap [f(A \setminus W_1)]_Y = \varnothing$ т.к. $[f(A \setminus [f^{-1}(V_1)]_X)]_Y = [f(A \cap W_1)]_Y$. Следовательно $y_1 \notin [f(A \cap W_1)]_Y \in \mathrm{F}(x) -$ противоречие. Аналогично разбирается случай, когда $x \in W_2$

Итак, определено отображение $F: X \to Y$. Докажем его непрерывность. Пусть V - произвольная окрестность точки $y = F(x)$, т.е. $y \in V$. Тогда имеем $\{y\} = \{F(x)\} = \cap\{[f(A\cap U)]_Y U \in \mathcal{B}(x)\} \subset V$ и в силу бикомпактности одноточечного множества $\{y\}$, существуют $U_j \in \mathcal{B}(x), j = 1,2,...,k$ такие, что $\cap_{j=1}^{k}[f(A\cap U_j)]_Y \subset V$. Положим $U = \cap_{j=1}^{k} U_i$. Тогда $[f(A\cap U)]_Y \subset \cap_{j=1}^{k}[f(A\cap U_j)]_Y \subset V$, т.е. $[f(A\cap U)]_Y \subset V$. Пусть $x' \in U$ – произвольная точка. Тогда имеем включение $F(x') \in F(U) \subset F([A\cap U]_X) = F([U]_X) \subset [f(A\cap U)]_Y$ и выполнено $[f(A\cap U)]_Y \subset V$ т.е. $F(U) \subset V$. Таким образом отображение $F: X \to Y$ непрерывно. □

Следующеесследствие является равномерным аналогом теоремы Тайманова ([33]) о продолжении.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.1 . *Пусть A - всюду плотное подпространство тихоновского пространства X, u - некоторая равномерность на A и $f: uA \to vY - u$ - непрерывное отображение равномерного пространства uA в бикомпактное равномерное пространство vY. Отображение f можно непрерывно продолжить на X в том и только том случае, если для любых $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}(vY)$ таких, что $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ их замыкания в X не пересекаются, т.е. $[f^{-1}(Z_1)]_X \cap [f^{-1}(Z_2)]_X = \varnothing$.* ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2.7 и того факта, что всякое u – непрерывное отображение $f: uX \to vY$ является непрерывным отображением, где u -некотораяравномерность на A, а v - единственная равномерность бикомпакта Y. □

ТЕОРЕМА 2.8. *Самюэлевская бикомпактификация $s_u X$ канонически гомеоморфна бикомпактификации $\beta_u X$, если и только, если $[Z_1]_{s_uX} \cap [Z_1]_{s_uX} = \varnothing$ для любых непересекающихся $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}(uX)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_u X$ канонически гомеоморфно $s_u X$. Тогда существует такой гомеоморфизм $F: \beta_u X \to s_u X$ что $F\big|_X = 1_X$ -тождественное отображение. По свойству 2 теоремы 3.4 имеем $[Z_1]_{\beta_uX} \cap [Z_1]_{\beta_uX} = \varnothing$ для любых непересекающихся $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}(uX)$.Тогда $F([Z_i]_{\beta_uX}) = [Z_i]_{s_uX}, i = 1.2.$ Следовательно, $[Z_1]_{s_uX} \cap [Z_1]_{s_uX} = \varnothing$ и условие теоремы выполнено.

Обратно, тождественное отображение $1_X: uX \to \beta_u X - u -$ непрерывно. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}(\beta_u X)$ и $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Так как семейство $\{\bar{Z} : Z \in \mathbf{Z}(uX)\}$ - база бикомпакта $\beta_u X$, то найдутся $Z_1', Z_2' \in \mathbf{Z}(uX)$ такие, что $Z_1 \subset [Z_1']_{\beta_uX}$ и $Z_2 \subset [Z_2']_{\beta_uX}$ и $[Z_1']_{\beta_uX} \cap [Z']_{\beta_uX2} = \varnothing$. Имеем $1_X^{-1}(Z_i') = Z_i'$, $[1_X^{-1}(Z_i')]_{s_uX} = [Z_i']_{s_uX}, i = 1,2$ и $[1_X^{-1}(Z_1')]_{s_uX} \cap [1_X^{-1}(Z_2')]_{s_uX} = \varnothing$, т.к. по условию $[Z_1']_{s_uX} \cap [Z_2']_{s_uX} = \varnothing$_. Ясно, что $1_X^{-1}(Z_i) = 1_X^{-1}(Z_i \cap X) \subset 1_X^{-1}(Z_i'), i = 1.2..$ Тогда $[1_X^{-1}(Z_1)]_{s_uX} \cap [1_X^{-1}(Z_2)]_{s_uX} = \varnothing$.Следовательно, по теореме 2.7, отображение $1_X: uX \to \beta_u X$ продолжается до непрерывного отображения $s_u 1_X : s_u X \to \beta_u X$. Согласно следствию 2.3.3., тождественное отображение $1_X: uX \to uX$ продолжается до непрерывного отображения $\beta_u 1_X : \beta_u X \to s_u X$. Нетрудно проверить, что отображения $s_u 1_X$ и $\beta_u 1_X$ являются тождественными взаимно обратными биективными и непрерывными отображениями, т.е. $s_u X$ каноническими гомеоморфно $\beta_u X$. □

Пусть $b_u^1 X$ и $b_u^2 X$ - бикомпактные расширения равномерного пространства uX. Будем писать $b_u^1 X \geq b_u^2 X$, если существует и такое непрерывное отображение $f: b_u^1 X \to b_u^2 X$, что $f\big|_X = 1_X$ - тождественное отображение. Если $b_u^1 X \geq b_u^2 X$ и не существует канонического гомеоморфизма между $b_u^1 X$ и $b_u^2 X$, т.е. $b_u^1 X \neq b_u^2 X$ то будем писать $b_u^1 X > b_u^2 X$.

Следующая теорема доказывается при помощи метода Б.А. Пасынкова.

ТЕОРЕМА 2.9. *Существует такое равномерное пространство* uX, *что* $s_u X < \beta_u X < \beta X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (Y,ρ) вполне ограниченное метрическое пространство и ν_ρ - метрическая равномерность. Тогда $s_{\nu_\rho} Y = (\tilde{Y},\tilde{\rho})$ - метрический бикомпакт. Для равномерного пространства $\nu_\rho Y$ выполняется $Z(\nu_\rho Y) = Z(Y)$ ([9]), следовательно, $\beta_{\nu_\rho} Y = \beta Y$ - Стоун-Чеховское бикомпактное расширение, которое не является метризуемым и имеет место $s_{\nu_\rho} Y \neq \beta Y$.

Пусть Z - дискретное пространство мощности $\tau > \aleph_0$ и αZ - одноточечная бикомпактификация Александрова пространства Z. Через W - обозначим предкомпактную равномерность на Z, которая индуцируется равномерностью бикомпакта αZ. Конечные подмножества Z и только они, являются бикомпактами подмножествами Z. Тогда любая функция $f: Z \to I$ для которой существует такое бикомпактное подмножество $B \subset Z$, что $f(Z \setminus B) = \{0\}$ называется функцией с *ко- бикомпактным носителем*. Известно, что равномерность W порождена всеми функциями $f: Z \to I$ с ко-бикомпактным носителем (1F[35]) . Тогда $|Z(WZ)| = |\mathcal{L}(WZ)| = |Z| \quad \tau.$. Следовательно, $w(W_p^*) \le \tau$. Согласно теореме 3.5, $\beta_W Z = s_{W_p^*} Z = \tilde{W}_p^* \tilde{Z}$ т.е. $w(\beta_W Z) \le \tau$. Для Стоун-Чеховского расширения βZ дискретного пространства Z мощности τ имеем $w(\beta Z) = 2^\tau$. Следовательно $\beta_W Z \neq \beta Z$.

Положим $uX = \nu_\rho Y \oplus WZ$, т.е. uX - сумма равномерных пространств $\nu_\rho Y$ и WZ. Тогда $s_u X = s_\rho Y \oplus s_W Y = s_\rho Y \oplus \alpha Z$, $\beta_u X = \beta_{\nu_\rho} Y \oplus \beta_W Z = \beta Y \oplus \beta_W Z$ и $\beta X = \beta Y \oplus \beta Z$. Ясно, что $s_u X \neq \beta_\nu Y \neq \beta X$. □

ТЕОРЕМА 2.10. *Ни в какой точке* $x \in \beta_u X \setminus X$ *не выполняется первая аксиома счетности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует точка $x^* \in \beta_u X \setminus X$ в которой выполняется первая аксиома счетности или, что равносильно для бикомпактов, x^* является G_δ – точкой в $\beta_u X$. В силу нормальности бикомпакта $\beta_u X$ существует равномерно непрерывная функция $f: \beta_u X \to u_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ такая, что $\{x^*\} = f^{-1}(0)$. Пусть $R^* = f(\beta_u X)$ и $R = f(X)$. Тогда R^* бикомпакт в $\mathbb{R}$., $[X]_{\beta_u X} = \beta_u X$ и $0 \in R^* \setminus R$, в силу непрерывности отображения f. В R существуют замкнутые множества $F_1 \subset R$ и $F_2 \subset R$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ такие, что $0 \in [F_1]_{R^*}$ и $0 \in [F_2]_{R^*}$. Пусть u_R равномерность R, индуцирована из $\mathbb{R}$ равномерностью $u_{\mathbb{R}}$. Тогда $F_1, F_2 \in Z(u_R R)$ и т.к. $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то существует u - функция $h: u_R R \to I$ такая, что $F_1 = h^{-1}(0)$, $F_2 = h^{-1}(1)$. В силу равномерной непрерывности функции $f: \beta_u X \to R^*$ равномерно непрерывной является функция $g = f|_X : u_p^* X \to u_R R$. Тогда функция $s = h \circ g : u_p^* X \to I$ является u-функцией и $s^{-1}(0)$, $s^{-1}(1)$ равномерно замкнутые множества в $u_p^* X$, т.е. $s^{-1}(0) \in Z(u_p^* X)$, $s^{-1}(0) \in Z(u_p^* X)$ и $s^{-1}(0) \cap s^{-1}(1) = \varnothing$. Так как $s^{-1}(0) = g^{-1}(h^{-1}(0)) = g^{-1}(F_1)$,, $s^{-1}(1) = g^{-1}(h^{-1}(1)) = g^{-1}(F_2)$, то $g^{-1}(F_1) \cap g^{-1}(F_2) = \varnothing$. В силу равномерной непрерывности g имеем $g^{-1}(F_1) \in Z(u_p^* X) = Z(uX)$ и $g^{-1}(F_2) \in Z(u_p^* X) = Z(uX)$. Тогда в силу свойства 2 теоремы 3.2. $[g^{-1}(F_1)]_{\beta_u X} \cap [g^{-1}(F_2)]_{\beta_u X} = \varnothing$. С другой стороны $x^* \in [g^{-1}(F_1)]_{\beta_u X}$ и $x^* \in [g^{-1}(F_2)]_{\beta_u X}$. Так как функция $f: \beta_u X \to R^*$ замкнутое отображение, то выполнены следующие равенства: $f([g^{-1}(F_i)]_{\beta_u X}) = [f(g^{-1}(F_i))]_{\mathbb{R}^*} = [F_i]_{R^*}$, $i = 1,2$. Следовательно, если $x^* \notin [g^{-1}(F_1)]_{\beta_u X}$ и $x^* \notin [g^{-1}(F_2)]_{\beta_u X}$, то $0 \notin f([g^{-1}(F_1)]_{\beta_u X})$ и $0 \notin f([g^{-1}(F_2)]_{\beta_u X})$, чего быть не может. Следовательно, одновременно $\{x^*\} \subset [g^{-1}(F_1)]_{\beta_u X} \cap [g^{-1}(F_2)]_{\beta_u X}$ и $[g^{-1}(F_1)]_{\beta_u X} \cap [g^{-1}(F_2)]_{\beta_u X} = \varnothing$, противоречие. □

В следующей теореме, с использованием оригинального метода Б.А.Пасынкова ([26]) строится такой бикомпакт P^n_τ размерности $\dim P^n_\tau \le n$ и веса $w(P^n_\tau) \le \tau$, что любое равномерное пространство uX с Хараламбусовской размерностью $u-\dim X \le n$ и веса $w(X) \le \tau$ гомеоморфно вкладывается в бикомпакт P^n_τ.

Для этого введем понятие $u-$гомеоморфизма равномерных пространств и докажем вспомогательную лемму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Отображение $f : uX \to vY$ называется *$u-$гомеоморфизмом*, если f *– биективно,* u *– непрерывно* и *обратное отображение* $f^{-1} : uX \to vY$ - u *- непрерывно.*

РЕМАРКА 2.11.1. Всякий $u-$гомеоморфизм является топологическим гомеоморфизмом. Обратно не верно. Примером может служить несчетное дискретное пространство Z с равномерностью $\mathbf{W}^*_p$ (теорема 3.9) и равномерностью Стоуна-Чеха u_β. Тогда равномерные пространство $\mathbf{W}^*_p Z$ и $u_\beta Z$ не u - гомеоморфны. Не трудно доказать, что для u - гомеоморфных равномерных пространств uX и vY имеет место равенство $u-\dim X = v-\dim Y$. □

Для равномерного пространство uX пусть $\mathcal{F} = \{f_i : i \in J\}$ - некоторое семейство $u-$функций. Если для любой точки $x_0 \in X$, и любой окрестности O_{x_0} этой точки можно найти такую $u-$функцию $f \in \mathcal{F}$, $f : uX \to I$, что $f(x_o) = 0$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in X \setminus O_{x_o}$, то семейство $\mathcal{F}$ - называется *расчленяющим семейством* u *- функций.*

ЛЕММА 2.12. *Пусть* uX *равномерное пространство и* $w(X) \le \tau$. *Тогда:*

1) Существует семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(uX)$, *которое является базой топологии равномерного пространства* uX *и* $|\mathcal{B}| \le \tau$ *;*

2) Существует расчленяющее семейство $u-$*функции мощности* $\le \tau$ *;*

3) $uX - u$*- непрерывно и гомеоморфно вкладывается в тихоновский куб* I^τ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{L}(uX)$ - база топологии равномерного пространства uX и $w(X) \le \tau$, то пункт 1 следует из теоремы 1.1.15 ([13]).

$1) \Rightarrow 2)$. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(uX)$ такое подсемейство, что $\mathcal{B}-$ база топологии равномерного пространства uX и $|\mathcal{B}| \le \tau$. Пара равномерно открытых множеств $U, V \in \mathcal{B}$, для которых $[V]_X \subset U$ и существует такая $u-$функция $f_{UV} : uX \to I$ что $f([V]_X) = 0$ и $f(X \setminus U) = 1$, назовем *канонической*. Множество канонических пар (U, V) базы $\mathcal{B}$ имеет мощность $\le \tau$. Следовательно, множество u- функций $\{f_{UV} : (U,V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}\}$ также имеет мощность $\le \tau$ и является расчленяющим семейством u- функций. Действительно, пусть $x \in X$ - произвольная точка и O_x- произвольная окрестность точки x. Тогда существуют такие $U, V \in \mathcal{B}$, что $x \in V \subset [V]_X \subset U \subset O_x$. Тогда $x \in V \subset [V]_X$, $F = X \setminus U \in \mathbf{Z}(uX)$ и $[V]_X \cap F = \varnothing$. Так как $\mathbf{Z}(uX)$- база замкнутых множеств равномерного пространства uX, то существует такое $N \in \mathbf{Z}(uX)$, что $[V]_X \subset N$ и $N \cap F = \varnothing$. Следовательно, (см. 2.4.([9])) существует такая u-функция $f : uX \to I$, что $f(N) = 0$ и $f(F) = 1$. Тогда, тем более $f([V]_X) = 0$ и $f(X \setminus U) = 1$.

$2) \Rightarrow 3)$ Пусть $\{f_i : i \in J\}$- расчленяющее семейство u- функций $f_i : uX \to I$ мощности $|J| \le \tau$. Каждая $u-$функция $f_i : uX \to I$, $i \in I$ является непрерывной, следовательно, из теоремы 2.3.23([13]) следует, что равномерное пространство uX гомеоморфно вкладывается в тихоновский куб I^τ. Так как $f_i^{-1}(u_i) \subset u^*_p$ для любого $i \in J$, то это топологическое вложение является $u-$непрерывным. □

ТЕОРЕМА 2.13. *Существует такой бикомпакт* P_τ^n, *размерности* $\dim P_\tau^n \le n$ *и веса* $w(P_\tau^n) \le \tau$, *что любое равномерное пространство* uX *размерности* $u - \dim X \le n$ *и веса* $w(X) \le \tau$ *гомеоморфно выкладывается в бикомпакт* P_τ^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все равномерные пространства uX веса $w(X) \le \tau$ и размерности $u - \dim X \le n$ разбиваются на классы $\xi \in \Xi$ попарно u- *гомеоморфных* между собой равномерных пространств. Тогда для каждого класса ξ для равномерного пространства $u_\xi X \in \xi$ выполнено равенств $u_\xi - \dim X_\xi$ ~~dim~~ $\dim \beta_{u_\xi} X_\xi \le n$ (следствие 3.5.2).

Пусть Y пространство являющееся дискретной суммой бикомпактных расширений $\beta_{u_\xi} X_\xi$, т.е. $Y = \oplus\{\beta_{u_\xi} X_\xi : \xi \in \Xi\}$. Полученное тихоновское пространство Y наделяется равномерностью v – дискретной суммой равномерностей β_{u_ξ} бикомпактов $\beta_{u_\xi} X$, т.е. $v = \oplus\{\beta_{u_\xi} : \xi \in \Xi\}$. Тогда равномерное пространство vY – равномерно локально бикомпактно, а следовательно, паракомпактно ([5], [20]). Так как $\dim \beta_{u_\xi} X_\xi \le n$ для любого $\xi \in \Xi$ и Y – нормально, то в силу теоремы 7.2.3([13])имеем, $\dim Y \le n$. Тогда в силу теоремы Волмэна – Катетова (7.1.17[13]) $\dim Y = \dim \beta Y \le n$.

Вес $w(X)$ каждого равномерного пространства uX $w(X) \le \tau$, следовательно, в силу леммы 3.12, существует u - непрерывный гомеоморфизм $f_\xi : u_\xi X \to I^\tau$ равномерного пространства $u_\xi X$ в тихоновский куб I^τ веса $\le \tau$.

Для каждого $\xi \in \Xi$ существует продолжение $\beta_{u_\xi} f_\xi : \beta_{u_\xi} X_\xi \to I^\tau$. Отображение $f : Y \to I^\tau$ пространства Y в тихоновский куб I^τ, совпадающее на каждом бикомпакте $\beta_{u_\xi} X_\xi$ с отображением $\beta_{u_\xi} f_\xi$ является непрерывным отображением. Отображение $f : Y \to I^\tau$ продолжается до непрерывного отображения $\beta f : \beta Y \to I^\tau$ Стоун – Чеховского бикомпактного расширения βY в тихоновский куб I^τ.

Отметим, что из построения отображения $f : Y \to I^\tau$ следует, что оно будет гомеоморфизмом на каждом равномерном пространстве $u_\xi X$, т.к. $X_\xi \subseteq \beta_{u_\xi} X_\xi \subseteq Y \subseteq \beta Y$. По теореме Мардешича ([22]) для отображения $\beta f : \beta Y \to I^\tau$ существует такой бикомпакт P_τ^n веса $w(P_\tau^n) = w(I^\tau) \le \tau$ и размерности $\dim P_\tau^n = \dim \beta Y \le n$ и такие отображения $h : \beta Y \to P_\tau^n$ и $g : P_\tau^n \to I^\tau$ что $\beta f = g \circ h$. По – построению, бикомпакт P_τ^n – искомый, т.е. содержит гомеоморфные образы всех равномерных пространств $u_\xi X$ веса $w(X_\xi) \le \tau$ и размерности Хараламбуса $u_\xi - \dim X_\xi \le n$ для всех $\xi \in \Xi$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.13.1. *Для всякого равномерного пространства* uX *веса* $w(X) \le \tau$ $u - \dim X \le n$ *существует бикомпактное расширение* bX *веса* $w(bX) \le \tau$ *и размерности* $\dim bX \le n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерное пространство uX гомеоморфно вкладывается в P_τ^n. Можно считать, что $X \subset P_\tau^n$. Тогда $[X]_{P_\tau^n} = bX$ - бикомпактно расширение и $w(bX) = w(P_\tau^n) \le \tau$, $\dim bX \le \dim P_\tau^n \le n$. □

РЕМАРКА 2.13.2. Отметим, что теорема 2.13 является частным случаем результата С.Илиадиса ([19]).

Через $ZUnif$ обозначим категорию, объектами которой являются равномерные пространства, а морфизмами служат u-непрерывные отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Отображение $f : uX \to vY$ равномерного пространства uX в равномерное пространство vY называется *u-совершенным* если:

1) $f - u -$ *непрерывно*; 2) $f -$ *замкнуто;* 3) $f -$ *бикомпактно,* т.е. $f^{-1}(y) -$ *бикомпактно в* X *для любой точки* $y \in Y$.

В категории $ZUnif$ в терминах Декартовых квадратов, при помощи бикомпактного расширения $\beta_u X$ равномерного пространства uX имеет место характеристика u - совершенных отображении равномерных пространств. Категорная характеристика совершенных отображений в категории $Tych$ - тихоновских пространств и их непрерывных отображений, при помощи Стоун-Чеховской бикомпактификации установлены Херрлихом и Франклином ([12][14]). Категорная характеристика равномерно совершенных отображений в категории $Unif$ равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображении, при помощи Самюэлевской бикомпактификации установлена А.Борубаевым ([5]).

ТЕОРЕМА 2.15. *Равномерное пространство* uX *бикомпактно, если и только, если в* uX *сходится каждый* $z_u -$ *ультрафильтр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если равномерное пространства uX бикомпактно, то в нем сходятся все ультрафильтры ([13]), в частности, сходятся все z_u ультрафильтры.

Обратно, пусть $\mathcal{F}$ произвольная центрированная система замкнутых множеств в равномерном пространстве uX. Т.к. $\mathsf{Z}(uX)-$ база замкнутых множеств равномерного пространства uX, то для любого $F \in \mathcal{F}$ существует такое семейство $\xi_F \subset \mathsf{Z}(uX)$, что $F = \cap \xi_F$. Тогда семейство $\xi = \{\xi_F : F \in \mathcal{F}\} \subset \mathsf{Z}(uX)$ является центрированным. Пусть p_ξ такой $z_u -$ ультрафильтр, что $\xi \subset p_\xi$. Тогда $\cap p_\xi = \{x\}$ для некоторой точки $x \in X$ и $\{x\} = \cap p_\xi \subset \cap \xi \subset \cap F$ т.е. $\cap F \neq \varnothing$. Следовательно, равномерное пространство uX является бикомпактным. □

ТЕОРЕМА 2.16. *Пусть* uX *и* vY *равномерные пространства. Тогда для* u *- непрерывного отображения* $f : uX \to vY$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $f - u -$ *совершенно.*

(2) Если $p - z_u -$ *ультрафильтр на* uX *и предфильтр* $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ *сходится к точке* $y \in Y$, *то* p *сходится к точке* $x \in f^{-1}(y)$.

(3) Для отображения продолжения $\beta_u f : \beta_u X \to \beta_v Y$ $\beta_u f$ *нарост* $\beta_u X \setminus X$ *переводит в нарост* $\beta_v Y \setminus Y$ *т.е.* $\beta_u f(\beta_u X \setminus X) \subset \beta_v Y \setminus Y$.

(4) Квадрат

$$\begin{array}{ccc} uX & \xrightarrow{i_X} & \beta_u X \\ f \downarrow & & \downarrow \beta f \\ vY & \xrightarrow[i_Y]{} & \beta_v Y \end{array} \qquad (**)$$

Декартов (pullback) в категории $ZUnif$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $f - u -$ совершенное отображение и p такой $z_u -$ ультрафильтр на uX, что предфильтр $f(p)$ сходится к точке $y \in Y$. Множество всех равномерно замкнутых множеств $Q \in \mathsf{Z}(vY)$, являющихся окрестностями точки y, образует $z_v -$ ультрафильтр q на равномерном пространстве vY. Отображение $f : uX \to vY - u -$ непрерывно, следовательно $f^{-1}(Q) \in p$ для любых $Q \in q$ и имеем $f^{-1}(y) = \cap\{f^{-1}(Q) : Q \in q\}$ $\neq f^{-1}(\cap q)$. Если $z_u -$ ультрафильтр p сходится, то он сходится к некоторой точке прообраза $f^{-1}(y)$. Предположим, что $z_u -$ ультрафильтр не сходится. Тогда для любой точки $x \in f^{-1}(y)$ существует такие $V_x \in \mathcal{L}(uX)$ и $Z_x \in \mathsf{Z}(uX)$, что

$x \in V_x \subset [V_i]_X \subset Z_x$ и $Z_x \notin p$ ([8]). Семейство $\{V_x : x \in f^{-1}(y)\}$ является открытым покрытием бикомпакта $f^{-1}(y)$. Пусть $\{V_{x_i} : i = 1, 2, ..., n\}$ - конечное подпокрытие . Тогда $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i \notin p$, $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \in \mathcal{L}(uX)$, следовательно $X \setminus V \in \mathbf{Z}(uX)$. Так как, $X \setminus V \cup \cup_{i=1}^{n} Z_i = X$, то $X \setminus V \in p$. Тогда $f(X \setminus V)$-замкнуто и $f(X \setminus V) \in f(p)$. Множество $Y \setminus f(X \setminus V) -$ открытая окрестность точки y. Следовательно, существует такое $Q' \in q$, что $y \in Q' \subset Y \setminus f(X \setminus V)$. Тогда $Q' \cap f(X \setminus V) = \varnothing$, следовательно $f^{-1}(Q') \cap X \setminus V = \varnothing -$ противоречие , т.к. $f^{-1}(Q') \in p$ и $X \setminus V \in p$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Пусть p' - произвольный $z_{u'}$ - ультрафильтр в равномерном подпространстве $u'f^{-1}(y)$, где $u' = u \wedge f^{-1}(y)$ и $y \in Y$ произвольная точка. Из свойств равномерно замкнутых множеств ([8]-[10]) следует, что для любого $Z' \in p'$ существует такое $Z \in \mathbf{Z}(uX)$, что $Z' = Z \cap f^{-1}(y)$. Пусть $\xi_{p'} = \{Z \in \mathbf{Z}(uX) : Z' = Z \cap f^{-1}(y)\ и\ Z' \in p'\}$. Тогда существует такой $z_u -$ ультрафильтр p на uX, что $\xi_{p'} \subset p$. Пусть q - z_v - ультрафильтр в vY, состоящий из всех равномерно замкнутых окрестностей точки y. Тогда $\cap q = \cap\{Q : Q \in q\} = \{y\}$, $Q \in \mathbf{Z}(vY)$ и $f^{-1}(Q) \in p$ для любого $Q \in q$. Тогда предфильтр $f(p)$ сходится к точке $y \in Y$. Следовательно, $z_u -$ ультрафильтр p сходится к некоторой точке $x \in f^{-1}(y)$. Тогда $z_{u'} -$ ультрафильтр p' также сходится к точке $x \in f^{-1}(y)$, следовательно, по теореме 2.15. равномерное пространство $u'f^{-1}(y)$ бикомпактно для любой точки $y \in Y$.

Покажем замкнутость отображения f. Пусть $F \subset X$ замкнуто и $y \in [f(F)]_Y -$ произвольная точка. Пусть $q - z_v -$ ультрафильтр, состоящий из всех равномерно замкнутых окрестностей точки $y \in Y$. Тогда $Q \cap f(F) \neq \varnothing$ для любого $Q \in q$. Следовательно, $f(f^{-1}(Q) \cap F) = Q \cap f(F) \neq \varnothing$. Для каждого $Q \in q$, $f^{-1}(Q) \in \mathbf{Z}(uX)$ и семейство $\{f^{-1}(Q) \cap F : Q \in q\} -$ центрировано и $f^{-1}(Q) \cap F \in \mathbf{Z}(u'F)$, где $u' = u \wedge F$. ([8]-[10]) . Пусть $p' - z_{u'}$- ультрафильтр в равномерном пространстве $u'F$, где $u' = u \wedge F$, содержащий центрированное семейство $\{f^{-1}(Q) \cap F : Q \in q\}$, и p такой $z_u -$ ультрафильтр в равномерном пространстве uX, что $\xi_{p'} \subset p$, где $\xi_{p'} = \{Z \in \mathbf{Z}(uX) : Z' = Z \cap f^{-1}(y)\ и\ Z' \in p'\}$. Предфильтр $f(p')$ сходится к y и т.к. $f^{-1}(Q) \in p$ для любого $Q \in q$, то $f(p)$ также сходится к y. Тогда, по условию теоремы, $z_u -$ ультрафильтр p сходится к некоторой точке $x \in f^{-1}(y)$. Тогда $z_{u'} -$ ультрафильтр p' также сходится к точке $x \in f^{-1}(y)$. Так как F замкнуто в X, то $x \in F$. Следовательно, имеем $y = f(x) \in f(F)$, т.е. $[f(F)]_Y \subset f(F)$. Обратное включение $f([F]_X) = f(F) \subset [f(F)]_Y$ очевидно. Итак, $f(F) = [f(F)]_Y$ и $f -$ замкнутое отображение.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $x \in \beta_u X \setminus X$ произвольная точка. Тогда существует единственный $z_u -$ ультрафильтр p на uX такой, что $\{x\} = \cap\{[Z]_{\beta_u X} : Z \in p\}$. Для отображения продолжения $\beta_u f : \beta_u X \to \beta_v Y$ выполнено $\beta_u f([Z]_{\beta_u X}) = [f(Z)]_{\beta_v Y}$ для любого $Z \in p$. Тогда $\beta_u f(x) = \cap\{[f(Z)]_{\beta_u X} : Z \in p\} = \{y\}$ для некоторой точки $y \in \beta_v Y$. Предположим, что $y \in Y$. Тогда предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$ сходится к y и по условию теоремы $z_u -$ ультрафильтр

p сходится к некоторой точке $x' \in f^{-1}(y)$. Ясно, что $\{x'\} = \cap\{[Z]_{\beta_u X} : Z \in p\}$, т.е. $x = x'$ – противоречие. Следовательно, $y = f(x) \in \beta_v Y \setminus Y$.

$(3) \Rightarrow (2)$. Пусть p - произвольный z_u - ультрафильтр в uX и предфильтр $f(p) = \{f(Z) : Z \in p\}$, сходится к точке $y \in Y$. По свойству (4) теоремы 3.4. имеем $\{x\} = \cap\{[Z]_{\beta_u X} : Z \in p\} \in \beta_u X$ и точка x - единственна. Тогда $\beta_u f([Z]_{\beta_u X}) = [f(Z)]_{\beta_v Y}$ для любого $Z \in p$ и $\beta_u f(x) = \beta_u f(\cap\{[Z]_{\beta_u X} : Z \in p\}) = \cap\{[f(Z)]_{\beta_v Y} : Z \in p\} = y$, т.е. $x \in (\beta_u f)^{-1}(y)$. Так как $\beta_u f(\beta_u X \setminus X) \subset \beta_v Y \setminus Y$, то $x \in X$.

$(3). \Rightarrow (4)$. Предположим, что для некоторого объекта ₩ категории $ZUnif$, $h :$ ₩ $\to \beta_u X$ и $g :$ ₩ $\to vY$ такие u - непрерывные отображения, что $\beta_u f \circ h = i_Y \circ g$. Поскольку $(i_Y \circ g)(Z)$ содержится в $\beta_v Y$ и $\beta_u f(\beta_u X \setminus X) \subset \beta_v Y \setminus Y$ то $h(Z) \subset X$. Определим отображение $h' :$ ₩ $\to uX$ как $h'(z) = h(z)$ для любого $z \in Z$. Тем самым квадрат $(**)$ - Декартов (pullback) .

$(4). \Rightarrow (3)$. Пусть $x \in \beta_u X$ и предложим, что $\beta_u X(x) = y \in Y$. Положим $Z = \{x\}$ и определим отображения $h :$ ₩ $\to \beta_u X$, как $h(x) = x$, и $g :$ ₩ $\to vY$ как $g(x) = y$ $\beta_u f(x) \in Y$, где ₩- тривиальная равномерность на $Z = \{x\}$. Тогда $\beta_u f \circ h = i_Y \circ g$. Следовательно существует u - непрерывное отображение $h' :$ ₩ $\to uX$ такое, что $h = i_X \circ h'$. Тогда $x \in X$, т.е. $\beta_u f(\beta_u X \setminus X) \subset \beta_v Y \setminus Y$.□

References:

1. R.A. Alŏ, H.L. Shapiro, A note on compactifications and semi-normal spaces, J. Austral. Math. Soc. 8 (1968)102-108.
2. R.A. Alŏ, H.L. Shapiro, Normal bases and compactifications, Math. Ann. 175. (1968) 337-340.
3. R.A. Alŏ, H.L. Shapiro, Normal Topological Spaces, Cambridge Tracts in Mathematics No.65, Cambridge and New York: Cambridge University Press 1974.
4. J.M. Aarts, Every metric compactifications is a Wallman-type compactifications, International Symposium on Topology and its Applications (Herceg-Novi) 1968, 29-34.
5. A.A. Borubaev, Uniform spaces and uniformly continuous mapping, Frunze, 1990 (In Russian).
6. C. Bandt, On Wallman-Shanin compactification, Math. Nachr. 77(1977) 283-351.
7. H. Cartan, Filters etultrafiltres, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B. 205(1937)777-779.
8. M.G. Charalambous, “Uniform Dimension Function”, Ph.D. dissertation, University of London, 1971.
9. M.G. Charalambous, A new covering dimension function for uniform spaces, J. Lond. Math. Soc.(2) 11 (1975) 137-143.
10. M.G. Charalambous, Further theory and application of covering dimension of uniform spaces, Czechoslovak Math.J. 41 (116)(1991) 378-394.
11. A.Ch. Chigogidze, Relative dimension, in: General Topology. Spaces of Function and Dimension, Moscow. Gos. Univ., Moscow, 1985, pp.67-117(in Russian).
12. H. Herrlich, Categorical topology, General Topology and Appls. 1, (1971)1-15.
13. R. Engelking, General Topology, Heldermann , Berlin, 1989.
14. S.P. Franklin, Topics in categorical topology, Class Notes, Carnegia-Mellon University. 1970.
15. O. Frink, Compactifications and semi-normal spaces, Amer. J. Math. 86 (1964) 602-607.
16. D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, K.L. Kozlov, Covering dimension d by normal base, Topology Appl. 158 (11)(2011) 1990-1996.
17. D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, K.L. Kozlov, The covering dimension invariants, Topology and its Application 159(2012) 2392-2403.
18. L. Gillman, M. Jerison, Ring of Continuous Function, Princeton: Van Nostrand 1960.
19. D. Iliadis, Universal Spaces and Mapping, North-Holland Math. Stud., vol. 198, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005.
20. J.R. Isbell, Uniform Spaces, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
21. M. Katětov, A theorem on the Lebesgue dimension, Časopis Pěst. Mat.Fys. 75(1950)79-87.
22. S. Mardešić, On covering dimension and universe limits of compact spaces, III. J. of Math.4 (1960) 278-291.
23. J. van- Mill, H. Vermeer, Wallman compactifications and the continum hypothesis, Vrije Univ. Rapport No. 88(1978).
24. S. Mrŏwka, β –like compactifications, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 24(3-4)(1973) 279-287.

25. J. Nagata, Modern General Topology, Amsterdam: Nort-Holland Publishing Company 1968.
26. B.A. Pasynkov, On universal bicompacta with given weight and given dimension, Dokl. Akad.Nauk.SSSR 154(1964), 1042-1043(in Russian).
27. A.K.Steiner, E.F. Steiner, Product of compact metric spaces are regular Wallman ,Indag. Math. 30(1968) 428-430.
28. A.K. Steiner, E.F.Steiner, Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces, Trans.Amer.Math.Soc. 148 (1970) 221-223.
29. N.A. Shanin, On special extensions of topological spaces, Dokl. Akad.Nauk.SSSR 38(1943) 6-9.
30. N.A. Shanin, On separation in topological spaces, Dokl. Akad.Nauk. SSSR 38(1943) 110-113.
31. N.A. Shanin, On the theory of bicompact extension of topological spaces, Dokl.Akad.Nauk.SSSR 38 (1943) 154-156.
32. Yu.M.Smirnov, On the dimension of proximity spaces, Math .Sb. N.S. 38(80)(1956) 283-302(in Russian) English translation: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 21(1962)1-20.
33. A.D. Taimanov, On the extensions of continuous mapping of topological spaces, Math.Sb.. 31(1952), 459-463.
34. V.M. Ul`janov, Solution of a basic problem on compactifications of Wallman type, Dokl. Akad.Nauk. SSSR. 18 (1977) 567-571.
35. R. Walker, The Stone-ČechCompactification, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1974.
36. H. Wallman, Lattices and topological spaces, Ann. Math. 39(1938) 112-126.