ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДАЛАМБЕРА, РЕДУЦИРУЮЩИЕСЯ В УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА

ОМУРОВ М.Т.

Кыргызкий национальный университет им Ж. Баласагына
УДК.517.9

Аннотация. *В работе исследуется многомерная задача типа Бюргерса [1,2,5], вырождающиеся из волновых уравнений с оператором Даламбера третьего порядка в неограниченной области, где решение исследуемой задачи $u(t,x_1,x_2)$ принадлежит пространству с Чебышевской нормой. Для краткости такие задачи называются обобщенными задачами типа Бюргерса. На основе метода вспомогательной функции (МВФ) [3,4] и метода Соболева исследуем указанные задачи, при этом, построенные решения обладают свойством гладкости по совокупности переменных. Эти факты доказываются на основе гладких входных данных, которые задаются как необходимые условия разрешимости исследуемой задачи.*

Abstract. *In work the many-dimensional problem of type Burgers [1,2,5] degenerated from wave equations with a D'Alembertian of the third order in unlimited area where the solution of an investigated problem $u(t,x_1,x_2)$ belongs to space with Chebyshev norm is investigated. For brevity such problems are called as the generalised problems of type of Burgers. On the basis of a method of auxiliary function (IMF) [3,4] and a method of Soboleva is investigated the specified problems, thus, the constructed solutions possess a tangential property on a population of variables. These facts are proved on the basis of smooth input datas which are set as necessary conditions of resolvability of an investigated problem.*

Ключевые слова: *задача Коши, уравнения типа Бюргерса, параметр вязкости, метода вспомогательной функции (МВФ).*

Рассмотрим неизвестную функцию u, зависящая от переменных, $(t,x_1,x_2)\in D_0 \quad (0,T_0)\times R^2$, которая является решением задачи

$$u_{t^2}-\mu\Delta u = f(t,x_1,x_2)+\mu[u^2+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_t-\sqrt{\mu}(u_{x_1}+u_{x_2}))], \bar{D}_0 \quad [0,T_0]\times R^2, \qquad (1)$$

$$u^{(j)}_{t^j}\Big|_{t=0}=\varphi_j(x_1,x_2), j \quad (0,1);\quad \varphi_j\in C^3(R^2)). \qquad (2)$$

Здесь $\Delta, \square_\mu -$ оператор Лапласа и Даламбера, соответственно так как (1):

$$\begin{cases} \Delta=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2};\ \square_\mu \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta, \\ \square_\mu u=f(t,x_1,x_2)+\mu[u^2+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u_t-\sqrt{\mu}(u_{x_1}+u_{x_2}))], \end{cases} \qquad (3)$$

$f\in\tilde{C}^{0,3}(D_1), D_1 \quad \bar{D}_0\times R, \varphi_j, \mu\in(0,1) -$ известные данные. При этом надо доказать, что существует гладкая функция u регулярная относительно малого параметра вязкости $\mu\in(0,1)$.

$$\|u\|_{\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)}=\sum_{0\le|k|\le 2}\left\|D^k u\right\|_{C(\bar{D}_0)}+\sum_{j=1}^{2}\left\|u^{(j)}_{t^j}\right\|_{C(\bar{D}_0)},\ (C^{2,2,2}(\bar{D}_0)\equiv\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)).$$

I. Для решения этой задачи воспользуемся модифицированным вариантом метода вспомогательной функции вида

$$
\begin{cases}
u_t - \sqrt{\mu}(u_{x_1} + u_{x_2}) = Z + \psi(x_1, x_2), \forall (t, x_1, x_2) \in \bar{D}_0, \\
Z\big|_{t=0} = 0, \forall (x_1, x_2) \in R^2, \\
\psi(x_1, x_2) \equiv \varphi_1 - \sqrt{\mu}(\varphi_{0x_1} + \varphi_{0x_2}),
\end{cases}
\tag{4}
$$

где $Z -$ новая искомая функция, кроме того имеем

$$
\begin{cases}
u_{t^2} - \mu\Delta u = Z_t + \sqrt{\mu}(Z_{x_1} + Z_{x_2}) + 2\mu u_{x_1} u_{x_2} + \sqrt{\mu}(\psi_{x_1} + \psi_{x_2}), \\
u = \varphi_0(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu}) + \int\limits_0^t [Z(s, x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s)) + \\
+\psi(x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))]ds \equiv Y_0(t, x_1, x_2) + (A_0 Z)(t, x_1, x_2), \\
(A_0 Z) \equiv \int\limits_0^t Z(s, x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))ds, \\
Y_0 \equiv \varphi_0(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu}) + \int\limits_0^t \psi(x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))ds, \\
u_{x_i} = \varphi_{0x_i}(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu}) + \int\limits_0^t [Z_{\rho_i}(s, x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s)) + \\
+\psi_{\rho_i}(x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))]ds \equiv Y_i(t, x_1, x_2) + (A_i Z_{x_i})(t, x_1, x_2), \\
(A_i Z_{x_i}) \equiv \int\limits_0^t Z_{\rho_i}(s, x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))ds, (i = 1, 2), \\
Y_i \equiv \varphi_{0x_i}(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu}) + \int\limits_0^t \psi_{\rho_i}(x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))ds, \\
u_t = \sqrt{\mu}\sum_{i=1}^{2} \varphi_{0l_i}(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu}) + Z + \psi + \int\limits_0^t \sqrt{\mu}\sum_{i=1}^{2}[Z_{\rho_i}(s, x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu} \times \\
\times(t-s)) + \sqrt{\mu}\sum_{i=1}^{2}\psi_{\rho_i}(x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))]ds \equiv (A_3[Z, Z_{x_1}, Z_{x_2}])(t, x_1, x_2), \\
l_i = x_1 + t\sqrt{\mu};\ \rho_i = x_i + \sqrt{\mu}(t-s);\ \rho_{ix_i} = 1,\ (i = 1, 2),\ \psi_0 \equiv \psi_{x_1} + \psi_{x_2}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Тогда подставляя (4), (5) в (1) имеем

$$
\begin{cases}
Z_t + \sqrt{\mu}(Z_{x_1} + Z_{x_2}) = f(t, x_1, x_2) + \mu(Y_0 + A_0 Z)^2 + \mu\Delta Z - 2\mu[Y_1(t, x_1, x_2) + \\
+(A_1 Z_{x_1})] \times [Y_2(t, x_1, x_2) + (A_2 Z_{x_2})] - \sqrt{\mu}\psi_0(x_1, x_2) + \mu\Delta\psi, \forall (t, x_1, x_2) \in \bar{D}_0, \\
Z\big|_{t=0} = 0, \forall (x_1, x_2) \in R^2,
\end{cases}
\tag{6}
$$

где (6) является уравнением типа Бюргерса с малым параметром $\mu \in (0,1)$. Поэтому, (6) эквивалентно преобразуется к виду [6]

$$
\begin{cases}
Z = M_1 + \int_0^t \int_{R^2} \exp\left(-\frac{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}{4\mu(t-s)}\right)\frac{1}{4\pi\mu(t-s)}\{\mu[2Y_0(s,s_1,s_2)(A_0Z)(s,s_1,s_2)+ \\
+((A_0Z)(s,s_1,s_2))^2]-\sqrt{\mu}[Z_{s_1}(s,s_1,s_2)+Z_{s_2}(s,s_1,s_2)]-2\mu[Y_1(s,s_1,s_2)(A_2Z_{s_2})(s,s_1,s_2)+ \\
+Y_1(s,s_1,s_2)(A_1Z_{s_1})(s,s_1,s_2)+(A_1Z_{s_1})(s,s_1,s_2)(A_2Z_{s_2})(s,s_1,s_2)]\}ds_1ds_2ds, \\
M_1(t,x_1,x_2) \equiv \int_0^t \int_{R^2} \exp\left(-\frac{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}{4\mu(t-s)}\right)\frac{1}{4\pi\mu(t-s)}\{f(s,s_1,s_2)-2\mu Y_1(s,s_1,s_2)\times \\
\times Y_2(s,s_1,s_2)+\mu(Y_0(s,s_1,s_2))^2+\mu\Delta\varphi(s_1,s_2)-\sqrt{\mu}\psi_0(s_1,s_2)\}ds_1ds_2ds = \\
=\frac{1}{\pi}\int_0^t \int_{R^2} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2))\{f(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})-2\mu Y_1(s,x_1+2\tau_1\times \\
\times\sqrt{\mu(t-s)},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})Y_2(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})+\mu(Y_0(s,x_1+ \\
+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}))^2+\mu\Delta\varphi(x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})- \\
-\sqrt{\mu}\psi_0(x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})\}d\tau_1d\tau_2ds,(s_i=x_i+2\tau_i\sqrt{\mu(t-s)};i=1,2).
\end{cases}
\tag{7}
$$

Следовательно, дифференцируя (7) по $x_i,(i=1,2)$ и полученное уравнение объединяя с (7), имеем систему

$$
\begin{cases}
Z_{x_i} = W_i, \forall (t,x_1,x_2), (i=1,2), \\
Z = M_1(t,x_1,x_2) + \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} \exp\left(-\frac{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}{4\mu(t-s)}\right) \frac{1}{4\pi\mu(t-s)} \{\mu[2Y_0(s,s_1,s_2) \times \\
\times (A_0 Z)(s,s_1,s_2) + ((A_0 Z)(s,s_1,s_2))^2] - \sqrt{\mu}[W_1(s,s_1,s_2) + W_2(s,s_1,s_2)] - \\
-2\mu[Y_1(s,s_1,s_2)(A_2 W_2)(s,s_1,s_2) + Y_1(s,s_1,s_2)(A_1 W_1)(s,s_1,s_2) + (A_1 W_1)(s,s_1,s_2) \times \\
\times (A_2 W_2)(s,s_1,s_2)]\} ds_1 ds_2 ds = M_1(t,x_1,x_2) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2))\{\mu[2Y_0(s,x_1 + \\
+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2 + 2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_0 Z)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + \\
+((A_0 Z)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}))^2] - \sqrt{\mu}[W_1(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2 + \\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + W_2(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})] - 2\mu[Y_1(s,x_1+2\tau_1 \times \\
\times \sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_2 W_2)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + \\
+Y_1(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_1 W_1)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2 \times \\
\times \sqrt{\mu(t-s)}) + (A_1 W_1)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_2 W_2)(s,x_1+2\tau_1 \times \\
\times \sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})]\} d\tau_1 d\tau_2 ds \equiv (H_0[Z,W_1,W_2])(t,x_1,x_2), \\
W_i = M_{1x_i}(t,x_1,x_2) + \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} \exp\left(-\frac{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}{4\mu(t-s)}\right) \frac{1}{4\pi\mu(t-s)} \frac{s_i - x_i}{2\mu(t-s)} \sqrt{\mu} \times \\
\times \{\sqrt{\mu}[2Y_0(s,s_1,s_2)(A_0 Z)(s,s_1,s_2) + ((A_0 Z)(s,s_1,s_2))^2] - [W_1(s,s_1,s_2) + W_2(s,s_1,s_2)] - \\
-2\sqrt{\mu}[Y_1(s,s_1,s_2)(A_2 W_2)(s,s_1,s_2) + Y_1(s,s_1,s_2)(A_1 W_1)(s,s_1,s_2) + (A_1 W_1)(s,s_1,s_2) \times \\
\times (A_2 W_2)(s,s_1,s_2)]\} ds_1 ds_2 ds = M_{1x_i}(t,x_1,x_2) + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2)) \frac{\tau_i}{\sqrt{(t-s)}} \times \\
\times \{\sqrt{\mu}[2Y_0(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_0 Z)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2 + \\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + ((A_0 Z)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}))^2] - [W_1(s,x_1 + \\
+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + W_2(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})] - \\
-2\mu[Y_1(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_2 W_2)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2 + \\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + Y_1(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})(A_1 W_1)(s,x_1+2\tau_1 \times \\
\times \sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) + (A_1 W_1)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}) \times \\
\times (A_2 W_2)(s,x_1+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, x_2+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)})]\} d\tau_1 d\tau_2 ds \equiv \\
\equiv (H_i[Z,W_1,W_2])(t,x_1,x_2), (i=1,2).
\end{cases}
\tag{8}
$$

Здесь (8) является системой интегральных уравнений Вольтерра, Вольтерра-Абеля второго рода и содержит неизвестных функций $Z, W_i, (i=1,2)$. Поэтому, не нарушая общности, предполагаем, что функции $Z, W_j, (j=1,2)$ существуют, причем определяются единственным образом, как решение системы (8), т.е. (8) разрешимо в $C[0,T_0]$, так как

$$
\begin{cases}
H_i : L_{H_i} \le \dfrac{d}{3}, (d<1), (i = \overline{0,2}; \sum\limits_{i=0}^{2} L_{H_i} \le d < 1),\\
H_i : S_r(0) \to S_r(0),\\
S_r(0) = \{Z, W_j : |Z|, |W_j| \le r, \forall (t, x_1, x_2) \in \bar{D}_0\}, (j = 1,2),
\end{cases}
\tag{9}
$$

$L_{H_i}, (i = \overline{0,2})$ - коэффициенты Липшица операторов $H_i, (i = \overline{0,2})$. При этом решение этой системы находим методом Пикара

$$
\begin{cases}
Z_{n+1} = H_0[Z_n, W_{1,n}, W_{2,n}],\\
W_{i,n+1} = H_i[Z_n, W_{1,n}, W_{2,n}], \forall (t, x_1, x_2) \in \bar{D}_0, (i = 1,2; n = 0,1,...),\\
Z_0 = 0, W_{i,0} = 0, (i = 1,2),
\end{cases}
\tag{10}
$$

причем на основе (9) следует

$$
\begin{cases}
Z_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} Z,\\
W_{i,n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} W_i, \forall (t, x_1, x_2) \in \bar{D}_0, (i = 1,2).
\end{cases}
\tag{11}
$$

Значит, в указанных условиях найденное решение Z задачи (6) обладает свойством гладкости в $\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$:

$$
\|Z\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{0\le|k|\le 2} \|D^k Z\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{i=1}^{2} \|Z_t\|_{C(\bar{D}_0)}.
\tag{12}
$$

Поэтому, имеем

$$
\|Z\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} \le M_0.
\tag{13}
$$

Лемма 1. В условиях (9), (11) и (13) функция Z определяется единственным образом, как решение задачи (6) в $\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$.

II. Из полученных результатов леммы 1 видно, что функция Z удовлетворяет задачу (6) и на основе (11) является известной функцией, т.е. $Z = \tilde{Z}$. Тогда найденное значение функции Z подставим в (5):

$$
u = \varphi_0(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu}) + \int_0^t [\tilde{Z}(s, x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s)) + \psi(x_1 +
\tag{14}
$$
$$
+\sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))]ds \equiv H(t, x_1, x_2),
$$

находим решение исследуемой задачи (1), (2) и при этом функции φ_0, ψ_0 имеют ограничения

$$
\begin{cases}
\sup\limits_{\bar{D}_0} \left|\varphi^{(j)}_{0x_i^j}(x_1 + t\sqrt{\mu}, x_2 + t\sqrt{\mu})\right| \le N_1,\\
\sup\limits_{\bar{D}_0} \int_0^t \left|\psi^{(j)}_{0x_i^j}(x_1 + \sqrt{\mu}(t-s), x_2 + \sqrt{\mu}(t-s))\right| ds \le N_2, (j = \overline{0,3}; i = 1,2).
\end{cases}
\tag{15}
$$

Теорема 1. В условиях леммы 1 и (4), (15) существует единственная, гладкая и регулярная относительно малого параметра $\mu \in (0,1)$ функция u, определенная по правилу (14).

Доказательство. Действительно, при условиях леммы 1 система (8) разрешима, причем функция Z определяется единственным образом в $\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$ и допускает оценку вида (13). Поэтому, учитывая (4) и (14) можем сказать, что действительно функция

$u \in \tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$ удовлетворяет все требования теоремы 1. При этом, так как выполняется (13), (15), то учитывая норму $\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$, следует

$$\|u\|_{\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{0 \le |k| \le 2} \|D^k u\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^{2} \|u_{t^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} \le N_0 \quad \text{const}, (Z \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)).$$

Что и требовалось доказать.

Литература:

1. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. – Москва: Атомиздат, 1968. – 271 с.
2. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газовой динамики. – Новосибирск: Наука, 1985. – 224 с.
3. Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т. Обратные задачи в приложениях математической физики / КНУ им. Ж. Баласагына. – Б.: 2014. –192 с.
4. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т., Омуров М.Т. Обратные задачи для нагруженных дифференциальных уравнений типа Бюргерса // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына -2013г.- Вып. 1. - С.47-51.
5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – Москва: Наука, 1978. – 688 с.
6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. - 443 с.