ИНТЕРЕСНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

МАЙЛЫБАШЕВА Ч.С., КОЙЧУМАНОВА Ж.М.

Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына
УДК 51(7)

Аннотация: *В статье показаны различные способы решения задач. Применение различных методов способствует развитию мышления.*

Аннотация: *Макалада маселелердин ар кандай жолдор менен чыгарылыштары көрсөтүлгөн. Ар кандай методдорду колдонуу ой жүгүртүүнү өнүктүрөт.*

Abstract: *Various ways of the solution of tasks are shown in article. Application of various methods promote development of thinking.*

Ключевые слова: *решение задач, способ решения задач, подход к решению, методика решения задач.*

Уруншуу сөздөр: *маселени чыгаруу, маселени чыгаруунун ыкмасы, маселе чыгаруунун методикасы.*

Key words: *solution of tasks, approach to the decision, methods of the solution of tasks.*

На сегодняшний день есть более 300 способов доказательства теоремы Пифагора. Так же многие задачи решаются все новыми и новыми методами. В сборнике задач под редакцией М. И. Сканави, предлагается доказать, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Сам М. И. Сканави в свое время доказывал их, рассматривая правильный десятиугольник.

Авторы этой статьи, находили значение $\sin 18^\circ$, пользуясь тем, что $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$. Если взять $\sin 18^\circ$ за t и применяя формулу $\sin 3\alpha$, можно решить уравнение $3t - 4t^3 = 1 - 2t^2$. Решаем легко, так как корень $t_1 = 1$ бросается в глаза значение $t_1 = 1$ не берем, $\sin 18^\circ \neq 1$. Далее, при рассмотрении квадратного уравнения, получаем корень $t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Применяя формулу косинуса двойного угла найдем значение и для $\cos 36^\circ$.

Предлагаем второй способ. Пусть $\beta = 36^\circ$, тогда $3\beta = 180^\circ - 2\beta$. Возьмем синусы углов: $\sin 3\beta = \sin\left(180^\circ - 2\beta\right)$ или $\sin 3\beta = \sin 2\beta$. Используя формулы синуса двойного и тройного углов получим: $3\sin\beta - 4\sin^3\beta = 2\sin\beta\cos\beta$ сократив на $\sin\beta \neq 0$, получим $3 - 4\sin^2\beta = 2\cos\beta$. Заменим $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$. Решаем уравнение $4\cos^2\beta - 2\cos\beta - 1 = 0$, корень этого уравнения: $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

По ходу решения этого уравнения, получим и изящное равенство:

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

или, заменив $\cos 36^\circ$ на $\sin 54^\circ$

$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \sin 30^\circ$$

Значения $\sin 18^\circ$ и $\cos 36^\circ$ можно найти и вписав правильный пятиугольник в окружность. Проведя диагонали, получим треугольники, из подобия треугольников находим значения для $\sin 18^\circ$ и $\cos 36^\circ$.

Мы пришли к тому, что одну и ту же задачу можно решить четырьмя разными способами.

Применяя найденные значения мы можем построить и другие углы.

Задача 1.

Постройте циркулем и линейкой углы:

а) 180°, 90°, 45°, 120°, 60°, 30°, 15°;

б) 9°, 12°, 18°, 36°.

Решение. а) Все углы здесь – «школьные». Покажем для разнообразия не такой рисунок, какой обычно приводят для углов 30°, 60° и 120° (рис. 1). Здесь центры окружностей одного и того же радиуса – точки O, A, B. Легко видеть, что $\angle OAB = 60^\circ$, $\angle OAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 120^\circ$. Угол 15° получается делением пополам угла 30°.

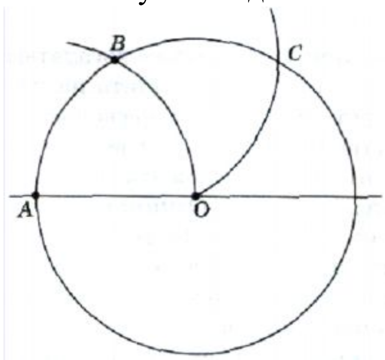

Рис. 1.

Укажем также любопытную конструкцию, в которой «сами собой» появляются углы в 15° и 75° (рис. 2.). Здесь $\angle ECD = 15^\circ$, $\angle ECB = 75^\circ$. Попытайтесь доказать это.

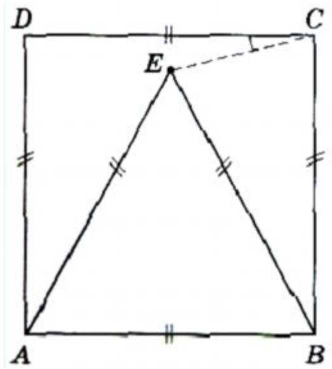

Рис. 2.

б) Поскольку мы знаем, что

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

то можно выполнить построение по этой формуле (рис. 3):

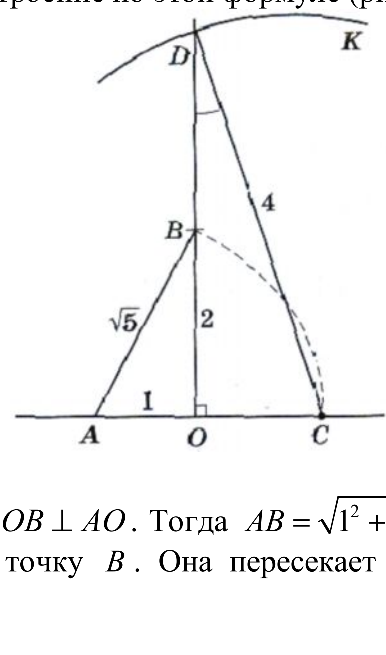

Рис. 3

Пусть $AO = 1$, $OB = 1$ и $OB \perp AO$. Тогда $AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Проведем окружность с центром в точке A через точку B. Она пересекает луч AO в точке C. Так как

$AC=\sqrt{5}$, $AO=1$, то $CO=\sqrt{5}-1$. Теперь проведем дугу DK радиуса 4 с центром в точке C. Получается

$$\sin\angle ODC=\frac{OC}{DC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

откуда заключаем, что $\angle ODC=18^\circ$.

После этого углы 36° и 9° легко строятся, а угол 12° строится вычитанием угла 18° из угла 30°.

Задача 2.

Известно, что не существует способа деления произвольного угла с помощью циркуля и линейки на 3, 5, 7 равных частей. Но некоторые специальные углы разделить можно – например, нетрудно угол 90° разделить на 3 равные части. Поэтому, если сказано, чему равен угол, то иногда его можно разделить на заданное число равных частей.

Разделить при помощи циркуля и линейки:

а) угол 7° на 7 равных частей;

б) угол 5° на 5 равных частей;

в) угол $\frac{3\pi}{7}$ на 3 равных части.

Решение.

а) В этой задаче нужно догадаться, что угол 7° следует не делить на части, а наоборот, откладывать несколько раз, то есть строить углы, кратные 7°.

Если угол 7° отложить 13 раз, то получится угол 91°. Отнимая от него угол 90°, получим угол 1°. Не нужно только пытаться и в самом деле строить угол 1°. Это сложно из – за грубости наших чертежных инструментов.

В задачах такого рода подразумевается, что нужно *указать* последовательность построений, не производя их фактически.

Отметим другое забавное решение: если отложить данный угол 103 раза, то получится $103\cdot 7^\circ = 721^\circ = 2\cdot 360^\circ+1^\circ$, то есть два полных оборота и нужный угол

Найдите еще какой – нибудь вариант.

б) Отложим 7 раз угол 5°:

$7\cdot 5^\circ = 35^\circ = 36^\circ - 1^\circ$.

Угол 36° мы уже умеем строить, так что, вычитая из него угол 35°, получим угол 1°.

в) Отложим угол $\frac{3\pi}{7}$ 5 раз:

$$5\cdot\frac{3\pi}{7}=\frac{15\pi}{7}=2\pi+\frac{\pi}{7}$$

Тем самым будет построен искомый угол $\frac{\pi}{7}$.

Задача 2.

Постройте с помощью циркуля и линейки угол $\frac{1}{3}\arcsin\frac{11}{16}$.

Решение. В этой задаче нужно догадаться, что $\arcsin\frac{11}{16}$ – это утроенный угол с каким – то «хорошим» значением синуса. Иначе говоря, надо найти острый угол α такой, что $\sin 3\alpha=\frac{11}{16}$. Найдем $\sin\alpha$:

$$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\frac{11}{16},$$

$64\sin^3\alpha-48\sin\alpha+11=0$. Обозначив $4\sin\alpha=x$, получим уравнение $x^3-12x+11=0$. Теперь очевиден корень $x=1$ или $\sin\alpha=\frac{1}{4}$. Возьмем $\alpha=\arcsin\frac{1}{4}$. Так как $0<\alpha=\arcsin\frac{1}{4}<\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$, то $0<3\alpha<90^\circ$, то есть 3α – острый угол, синус которого равен $\frac{11}{16}$ и $\alpha=\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{6}$.

Мы проверили, что

$$\frac{1}{3}\arcsin\frac{11}{16}=\arcsin\frac{1}{4}.$$

Построение же угла $\arcsin\frac{1}{4}$ не представляет труда.

Литература:

1. Математика в школе. 2013, 2014.