О РАВНОМЕРНО τ-u-ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

КАНЕТОВ Б.Э., БЕКЖАН УУЛУ Т.

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына
УДК 515.12

Аннотация: *Сунуш кылынган илимий макалада τ-u-паракомпактуу, кучтуу τ-u-паракомпактуу жана кучсуз τ-u-паракомпактуу бир калыптуу мейкиндиктер изилденет. Бир калыптуу мейкиндик τ-u-паракомпактуу деп аталат, эгерде ар бир калыптуу жабдууга кубаттуулугу $\leq\tau$ болгон локалдуу чектуу бир калыптуу жабдууну ичтен сызууга мумкун болсо. Бир калыптуу τ-u-паракомпактуу мейкиндиктин топологиясы созсуз паракомпактуу болбойт. Эгерде τ-финалдык-паракомпактуу мейкиндик берилсе, анда бир калыптуу мейкиндик универсалдуу бир калыптуулугу менен бир калыптуу τ-u-паракомпактуу болот. Предкомпактуу бир калыптуу мейкиндиктердин классында бир калыптуу мейкиндиктердин бул уч касиети дал келет. Бул бир калыптуу касиеттер каалагандай камтылган мейкиндикке жана каалагандай чектуу дизъюнктуу суммага карата изилденген. Топологиялык мейкиндик τ-финалдык-паракомпактуу деп аталат, эгерде анын ар бир ачык жабдуусуна кубаттуулугу $\leq\tau$ болгон локалдуу чектуу ачык жабдууну ичтен сызууга мумкун болсо [5]. Бир калыптуу τ-финалдык-паракомпактуу мейкиндикти А.А. Борубаев киргизген [5]. Бир калыптуу мейкиндик бир калыпту τ-u-паракомпактуу мейкиндик болот, качан гана ал бир калыптуу u-паракомпактуу [7] жана τ-чектелген болсо [3]. В. Пономаревдун [8] ω-чагылдырууга карата болгон паракомпактуу, кучтуу паракомпактуу жана кучсуз паракомпактуу мейкиндиктер жонундогу тыянактарынын бир калыптуу аналогдору табылган, б.а. бир калыптуу τ-финалдык-паракомпактуу жана кучтуу (кучсуз) τ-финалдык-паракомпактуу мейкиндиктердин ω-чагылдыруулардагы муноздомолору тургузулган. Ошондой эле бир калыптуу τ-финалдык-паракомпактуу жана кучтуу (кучсуз) τ-финалдык-паракомпактуу касиеттер жеткилен чагылдырууларда прообраз тарабына сакталаары тургузулган.*

Аннотация: *В предлагаемой статье исследуются равномерно τ-u-паракомпактные, сильно равномерно τ-u-паракомпактные и слабо равномерно τ-u-паракомпактные равномерные пространства. Равномерное пространство называется равномерно τ-u-паракомпактным, если в каждое равномерное покрытие можно вписать локально конечное равномерное покрытие мощности $\leq\tau$. Топология равномерно τ-u-паракомпактного пространства не обязана быть паракомпактной. Если задано τ-финально-паракомпактное пространство, то равномерное пространство с универсальной равномерностью является равномерно τ-u-паракомпактным. В классе предкомпактных равномерных пространств все эти три свойства равномерных пространств совпадают. Эти равномерные свойства исследованы относительно любого подпространства и любой конечной дизъюнктной суммы. Топологическое пространство называется τ-финально-паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие мощности $\leq\tau$ [5]. Равномерно τ-финально-паракомпактное пространство было введено А.А. Борубаевым [5]. Доказано, что равномерное пространство является равномерно τ-u-паракомпактным тогда и только тогда, когда оно является равномерно u-паракомпактным [7] и равномерно τ-ограниченным [3]. Найдены равномерные аналоги утверждения В. Пономарева [8] о паракомпактных, слабо паракомпактных и сильно паракомпактных пространств относительно ω-отображений, т.е. установлены характеристики равномерно τ-финально-паракомпактных пространств и сильно (слабо) равномерно τ-финально-паракомпактных пространств при ω-отображениях. Также установлено, что при* *равномерно совершенных отображениях равномерно τ - u -паракомпактные и сильно (слабо) равномерно τ - u -паракомпактные свойства сохраняются в сторону прообраза.*

Abstract: *At present paper uniform τ - u -paracompact, strongly (none strongly) uniform τ - u -paracompact of uniform space where are studied. The uniform space is a uniform τ - u -paracompactness, if every uniform coverings can be refined locally fine uniform coverings of power less then τ . The topology of uniform τ - u -paracompact space cannot be the paracompactness. If we have uniform τ -finally-paracompact space, then uniform space with the universally uniformity there are uniform τ - u -paracompactness. In the classes of precompact uniform space all this three properties of the uniform space where are equivalences. This uniformly properties for any subspace and any disjunction sums studied. The topological space is a τ -finally-paracompactness, if every open coverings can be refined locally fine open coverings of power less then τ [5]. The term uniform τ -finally-paracompactness obtained by Borubaev [5]. A uniform space is uniform τ - u -paracompact if and only if it is uniform u -paracompact [7] and uniform τ -bounded [3] is proved. The uniform analogue of Ponomarev [8] proportions about paracompactness, none strongly paracompactness and strongly paracompactness for ω -mappings obtained, hence, the uniform τ -finally-paracompactness and strongly (none strongly) uniform τ -finally-paracompactness for ω -mappings characterizations are established. Another for perfect mappings inverse image of uniform τ - u -paracompact space is uniform τ - u -paracompact are established.*

Урунттуу сөздөр: *бир калыптуу мейкиндиктер, бир калыптуу жабдуу, ачык жабдуу, кубаттуулук, бир калыптуу чагылдыруулар.*

Ключевые слова: *равномерные пространства, равномерное покрытие, открытое покрытие, мощность, равномерно непрерывные отображения.*

Keywords: *uniform spaces, uniform covering, open covering, power, uniformly continuous mappings.*

В работе все равномерные пространства предполагаются отделимыми, топологические пространства тихоновскими, а отображения равномерных пространств равномерно непрерывными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно τ - u -паракомпактным, если в каждое равномерное покрытие $\alpha \in U$ можно вписать локально конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \tau$.

Легко видеть, что топология равномерно τ - u -паракомпактного пространства не обязана быть паракомпактной.

Всякое предкомпактное равномерное пространство является равномерно τ - u - паракомпактным. В самом деле, пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ которое, вписано в α . Очевидно, β является локально конечным равномерным покрытием. Следовательно, равномерное пространство (X,U) равномерно τ - u -паракомпактно. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Если (X,τ) - τ -финально-паракомпактное пространство, то равномерное пространство (X,U_X) с универсальной равномерностью U_X является равномерно τ - u - паракомпактным. При этом топологическое пространство (X,τ) называется τ -финально-паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие мощности $\leq \tau$. В отличие от других равномерно паракомпактных пространств справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Любое подпространство равномерно τ - u -паракомпактного равномерного пространства равномерно τ - u -паракомпактно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пространство (X,U) равномерно τ - u - паракомпактно, (M,U_M) **-** произвольное подпространство равномерного пространства

(X,U) и $\gamma \in U_M$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существует равномерное покрытие α пространства (X,U), след которого на M равен γ, т.е. $\gamma = \alpha \wedge \{M\}$. Рассмотрим равномерное покрытие α' пространства (X,U), состоящее из множества M и всех элементов равномерного покрытия α. Очевидно, оно является равномерным покрытием пространства (X,U). В силу равномерной τ-u-паракомпактности (X,U) существует локально конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \tau$ вписанное в α'. Положим $\beta_M = \beta \wedge \{M\}$. Тогда легко видеть, что β_M - локально конечное равномерное покрытие пространства (M, U_M) мощности $\leq \tau$ вписанное в γ. Итак, подпространство (M, U_M) является равномерно τ-u-паракомпактным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно сильно τ-u-паракомпактным, если в каждое равномерное покрытие $\alpha \in U$ можно вписать звездно конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Равномерное пространство (X,U) называется равномерно слабо τ-u-паракомпактным, если в каждое равномерное покрытие $\alpha \in U$ можно вписать точечно конечное равномерное покрытие $\beta \in U$ мощности $\leq \tau$.

Так как всякое локально конечное равномерное покрытие является звездно конечным равномерным покрытием, то всякое равномерно сильно τ-u-паракомпактное равномерное пространство является равномерно τ-u-паракомпактным. Далее, поскольку, всякое локально конечное равномерное покрытие точечно конечно, то всякое равномерно τ-u-паракомпактное равномерное пространство является равномерно слабо τ-u-паракомпактным. Обратное, вообще говоря, не верно.

Всякое предкомпактное равномерное пространство является равномерно сильно τ-u-паракомпактным, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Например, дискретное равномерное пространство мощности $\leq \tau$ является τ-u-паракомпактным, но не предкомпактным пространством.

Так как всякое дизъюнктное равномерное покрытие является звездно конечным равномерным покрытием, то справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Всякое нульмерное равномерное пространство состоящие из покрытий мощности $\leq \tau$ является равномерно сильно τ-u-паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если равномерное пространство (X,U) представлено в виде дизъюнктного объединения конечного числа либо равномерно слабо τ-u-паракомпактных, либо равномерно τ-u-паракомпактных, либо равномерно сильно τ-u-паракомпактных подпространств, то таким же является исходное равномерное пространство (X,U).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для одного случая т.е. равномерно u-паракомпактного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть равномерное пространство (X,U) представлено в виде дизъюнктного объединения $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ конечного числа равномерно τ-u-паракомпактных подпространств (X_i, U_i), $i = 1,...,n$. Пусть α - произвольное равномерное покрытие пространства (X,U). Тогда для каждого номера i покрытие α_{X_i} является равномерным покрытием подпространства (X_i, U_i). Так как каждое подпространство (X_i, U_i) равномерно τ-u-паракомпактно, то для α_{X_i} существует локально конечное равномерное покрытие $\beta_{X_i} \in U_i$ мощности $\leq \tau$ вписанное в него. Для покрытия $\beta_{X_i} \in U_i$ найдется такое равномерное покрытие $\beta_i \in U$, что $\beta_{X_i} = \beta_i \wedge \{X_i\}$. Значит, равномерное покрытие $\beta = \bigwedge_{i=1}^{n} \beta_i \in U$ является локально конечным покрытием мощности $\leq\tau$, вписанное в α. Итак, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-u-паракомпактным.

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) является предкомпактным. Если равномерное пространство (Y,V) будет:

1) равномерно слабо τ-u-паракомпактным;
2) равномерно τ-u-паракомпактным;
3) равномерно сильно τ-u-паракомпактным,

то таким же соответственно будет и равномерное пространство (X,U).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ предкомпактно и (Y,V) равномерно τ-u-паракомпактно (соответственно равномерно слабо τ-u-паракомпактно, равномерно сильно τ-u-паракомпактно). Пусть $\alpha\in U$ - произвольное равномерное покрытие. Тогда существуют конечное равномерное покрытие $\gamma\in U$ и локально конечное (соответственно точечно конечное, звездно конечное) равномерное покрытие $\beta\in V$ мощности $\leq\tau$-такие, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma\succ\alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\beta\wedge\gamma$ - локально конечное (соответственно точечно конечное, звездно конечное) равномерное покрытие мощности $\leq\tau$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) - равномерно τ-u-паракомпактно (соответственно, равномерно слабо τ-u-паракомпактно, равномерно сильно τ-u-паракомпактно).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) равномерно совершенно. Тогда если равномерное пространство (Y,V) будет:

1) равномерно слабо τ-u-паракомпактным;
2) равномерно τ-u-паракомпактным;
3) равномерно сильно τ-u-паракомпактным,

то таким же соответственно будет и равномерное пространство (X,U).

Пусть γ - произвольное равномерное покрытие равномерного пространства (X,U). Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) называется γ-отображением, если существует такое равномерное покрытие $\beta\in V$, что $f^{-1}\beta\succ\gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если для любого равномерного покрытия γ пространства (X,U) существует равномерно непрерывное γ-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ на некоторое равномерно τ-u-паракомпактное пространство (Y,V), то пространство (X,U) является равномерно τ-u-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma\in U$ - произвольное равномерное покрытие. По условию существует равномерно непрерывное γ - отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ на некоторое равномерно τ-u-паракомпактное пространство (Y,V). Пусть $\beta\in V$ - такое равномерное покрытие, что $f^{-1}\beta\succ\gamma$. В силу равномерной τ-u-паракомпактности пространства (Y,V), в покрытие β впишем локально конечное равномерное покрытие $\eta\in V$ мощности $\leq\tau$. Тогда $f^{-1}\eta$ является равномерным покрытием пространства (X,U) мощности $\leq\tau$ вписанным в равномерное покрытие γ. Теперь пусть $x\in X$ - произвольная точка и $y=fx$. Пусть O_y - такая окрестность точки $y\in Y$, что пересекается лишь с конечным числом элементов равномерного покрытия η. Тогда $f^{-1}O_y$ также пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия $f^{-1}\eta$ пространства (X,U).

Следовательно, $f^{-1}\eta$ является локально конечным равномерным покрытием. Итак, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-u-паракомпактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если для всякого равномерного покрытия γ пространства (X,U) существует равномерно непрерывное γ-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ на некоторое сильно (слабо) равномерно τ-u-паракомпактное пространство (Y,V), то само равномерное пространство (X,U) является сильно (слабо) равномерно τ-u-паракомпактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательству предложения 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Произведение равномерно τ-u-паракомпактного (равномерно сильно τ-u-паракомпактного, равномерно слабо τ-u-паракомпактного) равномерного пространства на предкомпактное равномерное пространство является равномерно τ-u-паракомпактным (равномерно сильно τ-u-паракомпактным, равномерно слабо τ-u-паракомпактным) равномерным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из того факта, что если (X,U) - произвольное равномерное пространство и (Y,V) - предкомпактное равномерное пространство, то проекция $\pi_X:(X,U)\times(Y,V)\to(X,U)$ является предкомпактным, и из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Равномерное пространство является равномерно τ-u-паракомпактным тогда и только тогда, когда оно является равномерно u-паракомпактным и τ-ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство является равномерно u-паракомпактным и τ-ограниченным. Пусть α - произвольное равномерное покрытие равномерного пространства (X,U). Тогда существует локально конечное равномерное покрытие β вписанное в равномерное покрытие α. В покрытие β впишем равномерное покрытие γ мощности $\leq\tau$. Выделим из покрытия β подпокрытие β_0 мощности $\leq\tau$. Ясно, что β_0 является локально конечным равномерным покрытием мощности $\leq\tau$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ -u -паракомпактным. Обратное, очевидно.

Следует отметить, что равномерно u-паракомпактные отображения, а также их обобщения исследованы в работах [6], [7], [9].

ТЕОРЕМА 3. Равномерное пространство является сильно равномерно τ -u -паракомпактным тогда и только тогда, когда оно является сильно равномерно u -паракомпактным и τ -ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательству теоремы 2.

ТЕОРЕМА 4. Равномерное пространство является слабо равномерно τ -u -паракомпактным тогда и только тогда, когда оно является слабо равномерно u -паракомпактным и τ -ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательству теоремы 2.

Напомним, что равномерное пространство (X,U) называется равномерно τ-финально-паракомпактным [5], если в каждое его открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие мощности $\leq\tau$. При больших кардиналах получится равномерно паракомпактные пространства в смысле М.Д. Райса [10].

Далее равномерно τ-финально-паракомпактные пространства исследуем при ω-отображениях [1], [2].

ТЕОРЕМА 5. Равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-финально-паракомпактным тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на равномерно τ-финально-паракомпактное метризуемое пространство (Y,V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-финально-паракомпактным и ω - произвольное открытое покрытие. Тогда тождественное отображение пространства (X,U) является искомым ω-отображением.

Достаточность. Пусть для любого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на равномерно τ-финально-паракомпактное метризуемое пространство (Y,V). Для каждой точки $y\in Y$ существует такая открытая окрестность $O_y \ni y$, что прообраз $f^{-1}O_y$ которой содержится в некотором элементе покрытия ω. Ясно, что семейство β образованное такими окрестностями O_y является открытым покрытием пространства (Y,V). Впишем в него равномерно локально конечное открытое покрытие γ мощности $\le\tau$. Положим $\alpha=f^{-1}\gamma$. Ясно, что α является открытым покрытием мощности $\le\tau$, вписанное в открытое покрытие ω. Легко показать, что покрытие α является равномерно локально конечным покрытием. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно τ-финально-паракомпактным.

СЛЕДСТВИЕ 2. Равномерное пространство (X,U) является равномерно паракомпактным тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на равномерно паракомпактное метризуемое пространство (Y,V).

СЛЕДСТВИЕ 3. Равномерное пространство (X,U) является равномерно финально компактным тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на равномерно финально компактное сепарабельно метризуемое пространство (Y,V).

ТЕОРЕМА 6. Равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно τ-финально-паракомпактным тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на сильно равномерно τ-финально-паракомпактное метризуемое пространство (Y,V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательству теоремы 5.

СЛЕДСТВИЕ 4. Равномерное пространство (X,U) является сильно равномерно паракомпактным тогда и только тогда, когда для любого открытого покрытия ω пространства (X,U) существует равномерно непрерывное ω-отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ пространства (X,U) на сильно равномерно паракомпактное метризуемое пространство (Y,V).

Литература:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. - М.: Наука, 1977.

2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974
3. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990.
4. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013.
5. Борубаев А.А. О равномерно-топологических свойствах// Исслед. по топологии и геометрии: Сб. научн. тр. – Фрунзе, 1985. – С. 18-27.
6. Канетов Б.Э. О сильно равномерно паракомпактных пространствах// Известия НАН КР. – 2012. – №2. – С. 24-28.
7. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.
8. Пономарев В. О паракомпактных и финально-компактных пространствах// ДАН СССР. – 1961. – Т. 141. - №3. – С. 561-563.
9. Kanetov B.E. On uniformly paracompact mappings// I International Eurasian conference on math. Sciences and appl., Pristine/Kosovo. – 2012. – P. 234-235.
10. Rice M.D. A note on uniform paracompactness// Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 62. - №2. – P. 359-362.