2. Magnitsky N.A. Linear Volterra Integral Equations of the first and third kind // Journ. Vychisl. Matem. i matem. fiziki. 1979, t.19, №4, p.970-989.

3. Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. M.: Nauka, 1980, 286 p.

4. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind // Doklady AN SSSR, 1989, t-309, №5, p.1052-1055.

5. Imanaliev M.I., Asanov A. Regularization and uniqueness of solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the third kind // Doklady RAN, 2007, t.415, №1, p.14-17.

6. Imanaliev M.I., Asanov A., Asanov R.A. A class of systems of linear Fredholm integral equations of the third kind // Doklady RAN, - 2011, t. 437, №5, p. 592-596.

УДК: 517.928

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Усенов Иззат Абдыраевич, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, к.ф.-м.н.,доцент, г .Бишкек, Кыргызстан, iausen@mail.ru

Многие прикладные задачи физики и геофизики сводятся к неявным операторным уравнениям первого рода. К таким уравнениям сводятся также обратные задачи математической физики в тех случаях, когда выражение для функции Грина неизвестно.

Обратная задача электрокаротажа скважин, определяющая месторождения и подсчет запасов полезных ископаемых, является примером таких задач.

Вышеперечисленные прикладные задачи являются актуальными задачами современной науки, решение их может открыть новые грани современного состояния развития человечества. В связи с этим подчеркивается важность исследования некорректно поставленных задач.

В данной работе предлагается комбинированный метод нового типа, объединяющий идеи метода М.М. Лаврентьева, метода Ньютона-Канторовича для регуляризации решения неявного операторного уравнения первого рода.

Ключевые слова: неявный оператор, регуляризация, пространство Гильберта, дифференциал Фреше, линейный оператор, ограниченность опратора, условия Липшица.

COMBINED REGULARIZATION METHOD FOR SOLUTION OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS OF FIRST KIND

I.A. Usenov, Ph.D., associate professor, Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, iausen@mail.ru

Many applied problems of physics and biophysics reduced to implicit operator equations of the first kind. These equations are reduced and inverse problems of mathematical physics in cases where the expression for the Green's function is unknown.

The inverse problem of determining the electric logging wells field and calculation of reserves of mineral resources is an example of such problems.

The above application tasks are urgent tasks of modern science, these tasks can discover new facets of the current state of human development. In this regard, the study underlines the importance of ill-posed problems

In this paper, we propose a combined method of a new type, combining ideas of the method of M. M Lavrentiev, Newton-Kantorovich method for regularizing the solution of implicit operator equations of the first kind.

Keywords: implicit operator, regularization, Hilbert space, the Frechet differential, linear operator bounded opratora, Lipschitz condition.

1. Постановка задач:

Рассмотрим неявное операторное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi(z,u)=0\,, \tag{1}$$

где $\Phi: H\times H \to H$, H - гильбертово пространство.

Предполагаем, что

1) при $u = u^*$ существует единственное решение z^* уравнения (1), т.е. имеет место тождество

$$\Phi(z^*, u^*) \equiv 0, \tag{2}$$

2) оператор $\Phi(z,u)$ непрерывен в шаре $S(z_0, r_z) \times S(u_0, r_u)$, но $\Phi(z_0, u_0) \neq 0$ и имеет производную Фреше $\Phi_z'(z,u)$, непрерывную в точке (z_0, u_0). Линейный оператор $\Phi_z'(z_0, u_0)$ обратим, но неограничен,

т.е. $\left\| \left[\Phi_z'(z_0, u_0) \right]^{-1} \right\| = \infty$.

Через $\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)$ обозначим оператор, сопряженный с оператором $\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0)$. Известно [4], что оператор $\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)$ также будет линейным и непрерывным.

Рассмотрим неявное нелинейное операторное уравнение первого рода относительно z вида

$$\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi(z^\alpha, u) = 0 \cdot \tag{3}$$

Уравнения (1) и (3) являются эквивалентными.

2. Регуляризация решения задачи:

Наряду с уравнениями (3) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z^\alpha + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi(z^\alpha, u) = 0, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ - параметр регуляризации.

Оператор $\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0)$ является самосопряженным положительным [4]. Справедливы следующие неравенства [1]

$$\left\| \left(\alpha E + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0) \right) z \right\| \geq \alpha \|z\| , \tag{5}$$

$$\left\| \left(\alpha E + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0) \right) z \right\| \geq \alpha \left\| \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0) z \right\| \cdot \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует, что для любого $\alpha > 0$ оператор $\left(\alpha E + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0) \right)^{-1}$ существует и имеет место неравенство

$$\left\| \left(\alpha E + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \tag{7}$$

Уравнение (4) регуляризируем в шаре $S(z_\alpha(u_0), r_z(\alpha))$.

Теорема 1. Пусть 1. оператор $\alpha z + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi(z,u)$ непрерывен в шаре $S(z_\alpha(u_0), r_z(\alpha)) \times S(u_0, r_u)$, где $\alpha \leq \alpha_0$ и $\alpha z_\alpha(u_0) + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi(z_\alpha(u_0), u_0) \equiv 0$; 2. оператор $\alpha z + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi(z,u)$ имеет производную Фреше $\alpha E + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z,u)$, непрерывную в точке $(z_\alpha(u_0), u_0)$; 3. линейный оператор $\alpha E + \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0), u_0)$ непрерывно обратим.

Тогда существуют такие числа $\tilde{r}_z(\alpha), \tilde{r}_u > 0$, что для каждого u из шара $S(u_0, \tilde{r}_u)$ уравнение (4) имеет в шаре $S(z_\alpha(u_0), \tilde{r}_z(\alpha))$ единственное, непрерывное решение $z^\alpha(u)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2), а также 3) линейный оператор $\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0)$ в шаре $S(z_\alpha(u_0), r_z(\alpha)) \times S(u_0, r_u)$ удовлетворяет неравенству

$$\left\| \Phi_z'^*(z_\alpha(u_0), u_0) \right\| \leq M ; \tag{8}$$

4) для оператора $\Phi_z'(z,u)$ имеет место условие Липшица

$$\left\| \Phi_z'(z,u) - \Phi_z'(z_\alpha(u_0), u) \right\| \leq N \|z - z_\alpha(u_0)\| \text{ в } S(z_\alpha(u_0), r_z(\alpha)) \times S(u_0, r_u); \tag{9}$$

5) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r_z(\alpha)\to 0}\frac{r_z(\alpha)}{\alpha(r_z(\alpha))}=0, \tag{10}$$

Тогда существует такое число $\tilde r>0$, что при $r_z(\alpha)<\tilde r$ оператор $\Phi_3[\tau]\equiv\alpha E+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)$, (где $0\le\tau\le 1$, z - фиксированный элемент) в шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ имеет обратный, ограниченный оператор.

Доказательство:

Производим преобразование оператора

$$\Phi_3(\tau)=\left(\alpha E+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(E+R_\alpha\left(\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)-\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)\right), \tag{11}$$

где $R_\alpha=\left(\alpha E+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)^{-1}$.

Введем обозначения

$$\Psi_1[\tau]=R_\alpha\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)-\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right), \tag{12}$$

$$\Phi_4[\tau]=\left(\alpha E+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi_z'(z_\alpha(u_0),u_0)\right)(E+\Psi_1[\tau]), \tag{13}$$

тогда

$$\Phi_3[\tau]=\Phi_4[\tau]. \tag{14}$$

Оператор $\Psi_1[\tau]$ при фиксированном z в шаре $S(z_\alpha(u_0),\tilde r_z(\alpha))$ является линейным оператором. Оценим его норму

$$\|\Psi_1[\tau]\|\le\frac{1}{\alpha}\tau MNr_z(\alpha)\le NM\frac{r_z(\alpha)}{\alpha}. \tag{15}$$

Из условия (10) следует, что существует число $\tilde r>0$, такое, что

$$NM\frac{r_z(\alpha)}{\alpha(r_z(\alpha))}<NM\frac{\tilde r}{\alpha(\tilde r)}=q_5\le\sigma \quad\text{при}\quad r_z(\alpha)<\tilde r\text{, где }0<\sigma<1/2. \tag{16}$$

Тогда в силу теоремы Банаха [2] оператор $E+\Psi_1[\tau]$ обратим в шаре $S(z_\alpha(u_0),r_z(\alpha))$ и справедлива оценка

$$\left\|(E+\Psi_1[\tau])^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-q_5}. \tag{17}$$

Таким образом, оператор $\Phi_4[\tau]$ имеет обратный оператор $(\Phi_4[\tau])^{-1}$ и справедлива

$$\left\|(\Phi_4[\tau])^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-q_5}\cdot\frac{1}{\alpha}. \tag{18}$$

Теорема 2 доказана. Далее докажем теорему 1.

Уравнение (4) эквивалентно запишем в виде

$$z^\alpha=z^\alpha-(\Phi_4[\tau])^{-1}\left(\alpha z^\alpha+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u)\right). \tag{19}$$

Введем оператор $T_\alpha^*(z^\alpha,u)=z^\alpha-(\Phi_4[\tau])^{-1}\left(\alpha z^\alpha+\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\Phi(z^\alpha,u)\right)$ и

преобразуя, имеем

$$T_\alpha^*(z^\alpha,u)=(\Phi_4[\tau])^{-1}\left(\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)z^\alpha-\Phi(z^\alpha,u)\right)\right). \tag{20}$$

Производная оператора $\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u)$ при $u=u_0$ имеет вид

$$T_\alpha^{*'}(z^\alpha,u_0)=(\Phi_4[\tau])^{-1}\left(\Phi_z'^*(z_\alpha(u_0),u_0)\left(\Phi_z'(z_\alpha(u_0)+\tau(z-z_\alpha(u_0)),u_0)-\Phi_z'(z^\alpha,u_0)\right)\right). \tag{21}$$

Оценим норму производного оператора $\mathrm{T}_\alpha^{*'}(z^\alpha,u)$

$$\left\|T_\alpha^{*\prime}(z^\alpha,u_0)\right\| \le \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| + \frac{q_5}{1-q_5} \; . \tag{22}$$

Следовательно, оператор (20) $\forall z_1, z_2 \in S(z_\alpha(u_0), r_z(\alpha))$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|\mathrm{T}_\alpha^*(z_1,u) - \mathrm{T}_\alpha^*(z_2,u)\right\| \le \left(\frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|\right)\left\|z_1 - z_2\right\|. \tag{23}$$

Покажем, что оператор $\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u)$ шар $S(z_\alpha(u_0), r_z(\alpha))$ отображает в себя. Используя неравенство треугольника, имеем

$$\left\|\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le \left\|\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u) - \mathrm{T}_\alpha^*(z_\alpha(u_0),u)\right\| + \left\|\mathrm{T}_\alpha^*(z_\alpha(u_0),u) - z_\alpha(u_0)\right\|. \tag{24}$$

Оценим второе слагаемое в (24)

$$\left\|T_\alpha^*(z_\alpha(u_0),u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le \frac{1}{1-q_5}\frac{1}{\alpha}\frac{NM}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \; . \tag{25}$$

В силу (23) первое слагаемое в (24) удовлетворяет неравенству

$$\left\|T_\alpha^*(z^\alpha,u) - T_\alpha^*(z_\alpha(u_0),u)\right\| \le \left(\frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|\right)\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| \cdot \tag{26}$$

Используя неравенства (25), (26) из (25), имеем

$$\left\|T_\alpha^*(z^\alpha,u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le \left(\frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|\right)\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| + \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}. \tag{27}$$

Оператор $\mathrm{T}_\alpha^*(z^\alpha,u)$ шар $S(z_\alpha(u_0), t\eta)$ отображает в себя, если

$$\left\|T_\alpha^*(z^\alpha,u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le t\eta \; . \tag{28}$$

Тогда из (27) имеем

$$\left(\frac{q_5}{1-q_5} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|\right)\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| + \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = \left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\| \cdot \tag{29}$$

Введем обозначение

$$\eta = \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \; . \tag{30}$$

Подставляя вместо $\left\|z^\alpha - z_\alpha(u_0)\right\|$ значение $t\dfrac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$ в (29), имеем

$$\frac{q_5}{1-q_5}t\frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \frac{1}{1-q_5}\frac{NM}{\alpha}\left(t\frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right)^2 + \frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = t\frac{NM}{2(1-q_5)\sigma^{1/\sigma}}\alpha^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}. \tag{31}$$

После преобразований из (31) имеем

$$ht^2 - \frac{1-2q_5}{1-q_5}t + 1 = 0, \text{ где } h = \frac{N^2M^2}{2(1-q_5)^2\sigma^{\frac{1}{\sigma}}}\alpha^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}, \quad \frac{1-2q_5}{1-q_5} > 0$$

при

$$q_5 < \frac{1}{2} \cdot \tag{32}$$

Квадратное уравнение (32) имеет действительное решение, если

$$h < \frac{(1-2q_5)^2}{4(1-q_5)^2}, \tag{33}$$

тогда минимальный корень имеет вид

$$t_1 = \frac{\frac{1-2q_5}{1-q_5} - \sqrt{\left(\frac{1-2q_5}{1-q_5}\right)^2 - 4h}}{2h} \; . \tag{34}$$

Если $t = t_1$, то оператор $T_\alpha^*(z^\alpha,u)$ при $\left\|u - u_0\right\| \le \tilde{r}_u$ шар $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ отображает в себя. Таким образом, для любого элемента z шара $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ имеет место неравенство

$$\left\|z - z_\alpha(u_0)\right\| \le t_1\frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha \; . \tag{35}$$

В шаре $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ оператор $T_\alpha^*(z^\alpha,u)$ является сжимающим оператором

$$q_6 = \frac{\frac{1}{1-q_5} - \sqrt{\left(\frac{1-2q_5}{1-q_5}\right)^2 - 4h}}{2} < \frac{1}{2(1-q_5)}. \quad (36)$$

где $\frac{1}{2(1-q_5)} < 1$ при $q_5 < \frac{1}{2}$, следовательно $q_6 < 1$. Таким образом, оператор $T_\alpha^*(\cdot, u)$ является равномерно сжимающим оператором.

В силу принципа сжимающих отображений оператор $T_\alpha^*(z^\alpha, u)$ в шаре $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ имеет неподвижную точку, следовательно, уравнение (19) имеет единственное непрерывное решение z^α для каждого u, $\|u - u_0\| \le \tilde{r}_u$, удовлетворяющее неравенству

$$\|z^\alpha(u) - z_\alpha(u_0)\| \le t_1 \frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha, \text{ где } \tilde{r}_z(\alpha) = t_1 \frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \quad (37)$$

*Теорема 1*доказана.

Теорема 3. Пусть 1) выполняются все условия *теоремы 1*; 2) между элементами $z_\alpha(u_0)$ и z^*имеет место оценка $\|z^* - z_\alpha(u_0)\| \le \gamma r_z(\alpha)$, где $0 < \gamma < 1/2$. Тогда единственное непрерывное решение $z^{\alpha,*}$ уравнения (19) сходится по норме пространства H к точному решению z^* уравнения (1) при $\alpha \to 0$.

Доказательство. Используя неравенство треугольника, неравенство (37) при $u = u^*$ и второе условие *теоремы 3*, оценивая норму разности $\|z^{\alpha,*} - z^*\|$, имеем

$$\|z^{\alpha,*} - z^*\| \le \|z^{\alpha,*} - z_\alpha(u_0)\| + \|z^* - z_\alpha(u_0)\| \le (1+\gamma)t_1 \frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \quad (38)$$

Из неравенства (38) следует, что $z^\alpha(u^*) \to z^*$ ïðè $\alpha \to 0$ по норме пространства H. Таким образом, решение $z^\alpha(u^*)$ уравнения (19) при $u = u^*$ является приближенным решением уравнения (1).

Теорема 3 доказана.

Таким образом, решение уравнение (19) является регуляризированным решениям уравнения (1).

Список литературы

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.-1969.
3. Саадабаев А.С. Сходимость метода Ньютона в нелинейных некорректных задачах // Известия вузов № 1-2, Бишкек-2003.
4. Л. В. Канторович и Г. П. Акилова Функциональный анализ в нормированных пространствах.
5. Усенов И.А. Регуляризация решения неявного операторного уравнения первого рода // «Функциональный анализ и его приложения», Астана-2012г.

References

1. M.M Lavrentiev Some ill-posed problems of mathematical physics. - Novosibirsk, USSR Academy, 1962.
2. M.A Krasnosel'skii and others. An approximate solution of operator equations. M-1969.
3. Saadabaev A.S Convergence of Newton's method for nonlinear ill-posed problems // Proceedings of Higher Education № 1-2, Bishkek-2003.
4. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional analysis in normed spaces.
5. Usenov I.A Regularization of the solution of implicit operator equations of the first kind // "Functional Analysis and Its Applications," Astana-2012.

УДК 517.968

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Тагаева С.Б., Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, доцент, г. Бишкек, Кыргызстан, e-mail: tagaeva_72@mail.ru