$$q_6 = \frac{\frac{1}{1-q_5} - \sqrt{\left(\frac{1-2q_5}{1-q_5}\right)^2 - 4h}}{2} < \frac{1}{2(1-q_5)}. \qquad (36)$$

где $\frac{1}{2(1-q_5)} < 1$ при $q_5 < \frac{1}{2}$, следовательно $q_6 < 1$. Таким образом, оператор $T_\alpha^*(\cdot, u)$ является равномерно сжимающим оператором.

В силу принципа сжимающих отображений оператор $T_\alpha^*(z^\alpha, u)$ в шаре $S(z_\alpha(u_0), t_1\eta)$ имеет неподвижную точку, следовательно, уравнение (19) имеет единственное непрерывное решение z^α для каждого u, $\|u - u_0\| \le \tilde{r}_u$, удовлетворяющее неравенству

$$\left\|z^\alpha(u) - z_\alpha(u_0)\right\| \le t_1 \frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha, \text{ где } \tilde{r}_z(\alpha) = t_1 \frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \qquad (37)$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 3. Пусть 1) выполняются все условия *теоремы 1*; 2) между элементами $z_\alpha(u_0)$ и z^* имеет место оценка $\left\|z^* - z_\alpha(u_0)\right\| \le \gamma r_z(\alpha)$, где $0 < \gamma < 1/2$. Тогда единственное непрерывное решение $z^{\alpha,*}$ уравнения (19) сходится по норме пространства H к точному решению z^* уравнения (1) при $\alpha \to 0$.

Доказательство. Используя неравенство треугольника, неравенство (37) при $u = u^*$ и второе условие *теоремы 3*, оценивая норму разности $\left\|z^{\alpha,*} - z^*\right\|$, имеем

$$\left\|z^{\alpha,*} - z^*\right\| \le \left\|z^{\alpha,*} - z_\alpha(u_0)\right\| + \left\|z^* - z_\alpha(u_0)\right\| \le (1+\gamma)t_1 \frac{(1-q_5)h}{NM}\alpha. \qquad (38)$$

Из неравенства (38) следует, что $z^\alpha(u^*) \to z^*$ ïðè $\alpha \to 0$ по норме пространства H. Таким образом, решение $z^\alpha(u^*)$ уравнения (19) при $u = u^*$ является приближенным решением уравнения (1).

Теорема 3 доказана.

Таким образом, решение уравнение (19) является регуляризированным решениям уравнения (1).

Список литературы

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.-1969.
3. Саадабаев А.С. Сходимость метода Ньютона в нелинейных некорректных задачах // Известия вузов № 1-2, Бишкек-2003.
4. Л. В. Канторович и Г. П. Акилова Функциональный анализ в нормированных пространствах.
5. Усенов И.А. Регуляризация решения неявного операторного уравнения первого рода // «Функциональный анализ и его приложения», Астана-2012г.

References

1. M.M Lavrentiev Some ill-posed problems of mathematical physics. - Novosibirsk, USSR Academy, 1962.
2. M.A Krasnosel'skii and others. An approximate solution of operator equations. M-1969.
3. Saadabaev A.S Convergence of Newton's method for nonlinear ill-posed problems // Proceedings of Higher Education № 1-2, Bishkek-2003.
4. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional analysis in normed spaces.
5. Usenov I.A Regularization of the solution of implicit operator equations of the first kind // "Functional Analysis and Its Applications," Astana-2012.

УДК 517.968

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Тагаева С.Б., Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, доцент, г. Бишкек, Кыргызстан, e-mail: tagaeva_72@mail.ru

Цель статьи - найти достаточные условия для существования решений линейных интегральных уравнений типа Вольтерра третьего рода. Основным условием является условие сжатия в начальной точке: отношение значения ядра к значению производной от коэффициента при неизвестной функции меньше единицы. На примере показано, что это условие – существенное. Реализован алгоритм приближенного решения таких уравнений, задаваемых формулами, на основе метода трапеций. Значения искомой функции с некоторым шагом вычисляются последовательно. Эффективность алгоритма достигается путем задания производных известных функций в начальной точке.

Ключевые слова: интегральное уравнение типа Вольтерра, интегральное уравнение третьего рода, решение, приближенное решение

EFFECTIVE ALGORITHM OF APPROXIMATE SOLVING LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

Tagaeva S.B., Ph.D. Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, , Bishkek, Kyrgyzstan, e-mail: tagaeva_72@mail.ru

Sufficient conditions of existence of solutions of linear Volterra integral equations of the third kind are found, the main of them is the condition of contraction in the initial point: the ratio of value of the kernel to value of derivative of the coefficient by the unknown function is less than one. By an example it is demonstrated that this condition is essential. An algorithm of approximate solving of such equations defined by formulas on the base of trapezium method is implemented. The values of the unknown function with any step are calculated consequently. Effectiveness of the algorithm is attained by means of giving derivatives of the known functions in the initial point.

Keywords: Volterra integral equation, integral equation of the third kind, solution, approximate solving

Интегральные уравнения третьего рода возникают в практических задачах, см., например, [6]. Для уравнений типа Вольтерра достаточные условия существования множества решений были найдены в [5]. Сложные условия существования решений были сформулированы в [1]. Достаточные условия существования более общих, чем непрерывные, решений, были найдены нами в [7]. В [8] на основе методики [3] нами было обнаружено новое явление частичного поворота решения в теории сингулярных возмущений интегральных уравнений третьего рода.

В ряде работ, в том числе [2], [5], разрабатывались приближенные методы решения уравнений типа Вольтерра, но они не были доведены до компьютерной реализации.

В данной статье найдены непосредственно проверяемые достаточ-ные условия существования непрерывных решений линейных интегральных уравнений типа Вольтерра третьего рода без предположения о дифференцируемости известных функций во всей области определения, показана их существенность, построен и реализован алгоритм приближен-ного решения таких уравнений при условии, что исходные данные заданы в виде формул.

Условия существования решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

Рассматривается класс уравнений вида

$$a(t)u(t)+\int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t),\ t\in\Delta, \tag{1}$$

где $\Delta=[0,T]$ или $\Delta=[0,\infty)$, $K(t,s)$, $f(t)$, $a(t)$ – заданные функции.

Полагая $t=0$ в (1), видим, что необходимым условием существования решения в непрерывных функциях является

$$f(0)=0. \tag{2}$$

Введем оператор

$$J(u(\cdot))(t):=\begin{cases}\dfrac{f(t)}{a(t)}-\dfrac{\int_0^t K(t,s)u(s)ds}{a(t)}, t>0\\[2mm] \dfrac{f'(0)}{a'(0)}-\dfrac{K(0,0)}{a'(0)}u(0), t=0.\end{cases} \tag{3}$$

ЛЕММА 1. Если выполняется условие (2) и условия 1) $K(t,s)\in C(G)$, $f(t)\in C(\Delta)$, $a(t)\in C(\Delta)$, 2) $a(0)=0$, 3) существует $a'(0)$ и $a'(0)>0$, 4) $a(t)>0$ для всех $t\in\Delta\setminus\{0\}$,

5) существует $f'(0)$ (производные – правосторонние),

то оператор (3) определен.

Доказательство. По правилу Лопиталя: (предел знаменателя отличен от нуля)

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{a(t)}=\frac{f'(0)}{a'(0)}.$$

По теореме о среднем для интеграла от непрерывной функции, получаем

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{a(t)}\int_0^t K(t,s)u(s)ds=\frac{K(0,0)}{a'(0)}u(0).$$

Из этих двух соотношений следует, что $\lim_{t\to+0} J(u(\cdot))(t)=J(u(\cdot))(0)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если выполняются условия Леммы 1 и

$$\theta_0=\frac{|K(0,0)|}{a'(0)}<1, \tag{4}$$

то существует такое $T_1\le T$, что уравнение (1) имеет решение в $C([0, T_1])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что оператор (3) является сжи-мающим по норме $||\cdot||_1$ пространства $C([0, T_1])$ при достаточно малом T_1.

По теореме о среднем для интеграла от непрерывной функции, получаем

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{a(t)}\int_0^t|K(t,s)|ds=\frac{|K(0,0)|}{a'(0)}. \tag{5}$$

Существует такое T_1, что дробь в левой части (5) отличается от дроби в правой части (5) меньше, чем на $\frac{1-\theta_0}{2}(0<t\le T_1)$.

Оценим

$$|||J(u_1(\cdot))-J(u_2(\cdot))||_1=\max\{2\frac{1}{a'(0)}|K(0,0)u_1(0)-K(0,0)u_2(0)|,$$

$$\sup\{\frac{1}{a(t)}|\int_0^t K(t,s)u_1(s)ds-\int_0^t K(t,s)u_2(s)ds| \quad |0<t\le T_1\}\}\le$$

$$\le\max\{\theta_0\sup\{\frac{|K(0,0)|}{a'(0)}+\frac{1-\theta_0}{2}|0<t\le T_1\}\}||u_1-u_2||_1\le$$

$$\le\max\{\theta_0,\theta_0+\frac{1-\theta_0}{2}\}||u_1-u_2||_1=\frac{1+\theta_0}{2}||u_1-u_2||_1.$$

Поскольку $\frac{1+\theta_0}{2}<1$, оператор J является сжимающим в $C([0, T_1])$.

Следовательно, существует единственное решение $u_0(t)$ уравнения

$$u(t)=J(u(\cdot))(t) \tag{6}$$

в $C([0, T_1])$.

Из первого выражения (3) видно, что функция $u_0(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $t>0$, а из условия (2) следует, что функция $u_0(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $t=0$. Лемма доказана.

Пример 1. Уравнение (1) с

$$a(t)=2t,\ f(t)=3t+15t^2+t^3+4t^4,\ K(t,s)=1+2ts \tag{7}$$

имеет решение $u(t)=1+6t$.

Примечание. Из второго соотношения (3) получаем уравнение для $u(0)$, откуда

$$u(0)=\frac{f'(0)}{a'(0)+K(0,0)}. \tag{8}$$

Покажем, что условие (4) – неулучшаемое.

Пример 2.

$$a(t)=t,\ K(t,s)=1,\ f(t)=t,\ a'(t)=1,(\ \theta_0=\frac{1}{1}=1) \tag{9}$$

Если уравнение (1)-(9) имеет непрерывное решение, то при $t>0$ оно будет также дифференцируемым. Дифференцируя по t, получим $tu'(t)+u(t)-u(t)=1,\ tu'(t)=1$.

Отсюда находим: $u(t)=\ln t + C\ (t>0)$. При любом C будет $u(t)\to\infty$ при $t\to+0$, то есть $u(t)$ – не может быть непрерывным. Следовательно, уравнение (1)-(9) не имеет непрерывного решения.

Теорема 1. Если выполняются условия Леммы 2, то уравнение (1) имеет решение в $C(\Delta)$.

Доказательство. Согласно Лемме 2, существует такое T_1, что уравнение (1) имеет решение в $C([0, T_1])$. Для $t>T_1$ перепишем это урав-нение в виде

$$u(t)+\int_{T_1}^{t}\frac{K(t,s)}{a(t)}u(s)ds=\frac{1}{a(t)}(f(t)-\int_{0}^{T_1}K(t,s)u(s)ds). \qquad (10)$$

Здесь правая часть – известная функция.

В силу условия 4) леммы 1 это уравнение является линейным уравнением Вольтерра второго рода, следовательно, оно имеет решение на всем отрезке определения *t*. Теорема доказана.

1. Приближенный метод решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

Пусть выполняются условия леммы 1 и

$$K(0,0)\neq -a'(0). \qquad (11)$$

Выберем некоторое малое число $h>0$, обозначим $h_2=h/2$. Заменим t на $t+h$ в (1):

$$a(t+h)u(t+h)+\int_{0}^{t+h}K(t+h,s)u(s)ds=f(t+h). \qquad (12)$$

Вычитая (1) из (12) и группируя, получаем:

$$a(t+h)u(t+h)-a(t)u(t)+$$
$$+\int_{0}^{t}(K(t+h,s)-K(t,s))u(s)ds+\int_{t}^{t+h}K(t+h,s)u(s)ds=f(t+h)-f(t).$$

Применяя формулу трапеций ко второму интегралу и перегруппируя, получаем

$$(a(t+h)+h_2(K(t+h,t+h))u(t+h)\approx a(t)u(t)- \qquad (13)$$
$$-\int_{0}^{t}(K(t+h,s)-K(t,s))u(s)ds-h_2K(t+h,t)u(t)+f(t+h)-f(t).$$

С помощью равенства (13) можно последовательно вычислять значе-ния искомой функции для значений аргумента с малым шагом. Обозначим

$t[i]:=ih,\ a[i]:=a(t[i]);\ K[i,j]:=K(t[i],t[j]),\ Q[i,j]:=K[i+1,j]-K[i,j],$

$f[i]:=f(t[i]),\ U[i]\approx u(t[i]),\ i=0,1,2,\ldots$

К первому интегралу также применим формулу трапеций.

Особенностью программирования данной задачи является то, что для значений $i=0$ и $i=1$ формулы для $U[i]$ не получаются из общей, а выписываются отдельно.

Отсюда и из (8) получаем следующие расчетные формулы:

$$U[0]=f'(0)/(a'(0)+K[0,0]), \qquad (14_0)$$

$$U[1]=((a[0]-h_2K[1,0])U[0]+f[1]-f[0])/(a[1]+h_2K[1,1]), \qquad (14_1)$$

$$U[k+1]=((a[k]-h_2K[k+1,k])U[k]-h\sum_{j=0}^{k}\delta[k,j]Q[k,j]U[j]+f[k+1]-f[k])/$$
$$/(a[k+1]+h_2K[k+1,k+1]),\ k=1,2,\ldots \qquad (14_2)$$

где $\delta[k,j]=1/2$ при $j=0$ или $j=k$ и $\delta[k,j]=1$ в остальных случаях.

Для реализации этих формул были написана программа на языке pascal. В ней исходными данными являются значение *T,* формулы для *a(t), K(t,s), f(t),* значения *a'(0), f'(0),* шаг по *t.* В случае, когда решается контрольный пример с известным точным решением, предусмотрено также задание формулы для точного решения.

Этот алгоритм был применен к примеру 1 с $T=5$, с шагом $h=1/8$.

Отклонение приближенного решения от точного составило менее 0.01, что показывает эффективность алгоритма.

Выводы. В статье получены непосредственно проверяемые условия существования решений линейных интегральных уравнений типа Вольтерра третьего рода и построен эффективный алгоритм для их приближенного решения.

Аналогичные условия существования решений также могут быть сформулированы и соответствующий алгоритм построен для много-мерного случая (векторно-матричного уравнения).

Список литературы

1. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / А.Асанов, Г.Ободоева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1994. - Вып. 25. - С. 65-74.

2. Габбасов Н.С. Новый приближенный метод решения интегральных уравнений третьего рода / Н.С. Габбасов // Математические заметки. - 1991. – Т.49, № 1. - С.40-46.

3. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений / Г.М. Кененбаева. – Бишкек: Илим, 2012. - 204 с.

4. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н.А. Магницкий // Журнал вычисл. математики и матем. физики, т. 19, № 14, 1979, с. 970-989.

5. Омуров Т.Д. Приближенные методы в теории нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Автореферат диссертации доктора физ.-матем. наук /Т.Д. Омуров. - Бишкек, 2000.

6. Shulaia D. Linear integral equations of the third kind arising from neutron transport theory/ D. Shulaia // Math. mech. appl. sci. - 2007, No 30. - P. 1941-1964.

7. Tagaeva S.B. Regularization and unity of Volterra linear integral equations solutions of third kind in the space of summed up functions / S.B. Tagaeva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 401-406.

8. Kenenbaeva G. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics / G. Kenenbaeva, S. Tagaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Ed. by acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

References

1. Asanov A. Regulyarizacia i edinstvennost reshenii lineynih integralnih uravnenii Volterra tretiego roda [Regularization and uniqueness of solutions of Volterra integral equations of third kind] / A. Asanov, G. Obodoeva // Issledovaniya po integro- differencialnim uravneniyam. – Bishkek: Ilim, 1994. – Vip. 25. –page 65-74.

2. Gabbasov N.S. Novii pribligennii metod reshenya integralnih uravnenii tretiego roda [New approximate method to solve integral equations of third kind] / N.S.Gabbasov // Matematicheskie zametki. 1991. – T.49, No.1.- page 40-46.

3. Kenenbaeva G. M. Teoria i metodika poiska novih effektov i yavlenii v teorii vozmushennih differencialinih i raznostnih uravnenii [Theory and methodic to search new effects and phenomena in the theory of perturbed differential and difference equations] / Kenenbaeva G. M.- Bishkek: Ilim, 2012. – page 204 .

4. Magnickii N.A. Lineinie integralinie uravnenia Volterra I i III roda [Linear Volterra integral equations of I and III kind] /N.A. Magnickii// Gurnal vichislitelinoi matematiki i matematicheskoi fiziki, т. 19, № 14, 1979, page . 970-989.

5. Omurov T.D. Pribligennie metodi v teorii nelineinih integralnih uravnenii Volterra pervogo i tretiego roda [Approximate methods in the theory of nonlinear Volterra integral equations of first and third kind]. Avtoreferat dissertacii doktora fiziko- matematicheskih nauk / T.D. Omurov.- – Bishkek, 2000.

6. Shulaia D. Linear integral equations of the third kind arising from neutron transport theory/ D. Shulaia // Math. mech. appl. sci. - 2007, No 30. - page. 1941-1964.

7. Tagaeva S.B. Regularization and unity of Volterra linear integral equations solutions of third kind in the space of summed up functions / S.B. Tagaeva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – page. 401-406.

8. Kenenbaeva G. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics / G. Kenenbaeva, S. Tagaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Ed. by acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – page. 107-111.

УДК 532.546:536.421

ПРОЦЕСС ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ЗОНЕ ТАЛОГО ГРУНТА

Джаманбаев Мураталы Джузумалиевич, д.ф.-м.н., профессор, КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызская Республика, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: jamanbaev@mail.ru.

Чыныбаев Мирлан Койчубекович, к.ф.-.м.н., доцент, КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызская Республика, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: jamanbaev@mail.ru

На типичном примере имитируется процесс загрязнения под основанием водоема в зоне талого грунта. Приводится численная реализация математической модели, которая описывает процесс загрязнения под основанием водоема через фильтрационный поток жидкости с помощью пакета прикладных программ COMSOL Multiphysics с визуализацией полученных результатов. Загрязнителями могут быть промышленные отходы, отходы золоторудной фабрики и хвостохранилища. Качественное исследование, прогнозирование процессов загрязнения подземной гидросферы является основной задачей охраны окружающей среды.

Ключевые слова: загрязнение, фильтрация, плотина, грунт, моделирование, водоем, жидкость, прогнозирование