при $\upsilon_1 = 1 - m; \quad q_1 = 1 + m, \quad p_1 = 2$

при $\upsilon_2 = -m; \quad q_2 = m, \quad p_2 = 0$

Как видно, при υ = – m второй параметр p = 0. Это означает, что при υ = – m, решение уравнения не существует. При υ = 1 – m, второй параметр p = 2 – это целое число. Тогда согласно теории вырожденных гипергеометрических функций следует, что если второй параметр вырожденной гипергеометрической функции, т.е. p – является целым числом, то гипергеометрическая функция Ф дает лишь одно решение вырожденного гипергеометрического уравнения, следовательно, второго решения не существует. Поэтому, ввиду целочисленности параметра *p* = 2, ограничимся только первым решением, которое запишется в виде:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \cdot z^{-\upsilon-m} A_1 \cdot \Phi(1-m;2;z^{-1}), \qquad (33)$$

где A_1 – произвольная постоянная.

Подставляя функцию (33) в соотношение (10), получим решение уравнения (8) окончательно в виде функции:

$$W_0(x,y,t) = Ae^{-(x+y+t)} \cdot (x+y+t)^{1+m} \cdot \Phi(1+m;2;(x+y+t)), \qquad (34)$$

где А - произвольная постоянная, определяемая согласно начально-краевым условиям (2), Ф - вырожденная гипергеометрическая функция.

Список литературы

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М., Наука, 1976 г.
2. Полубаринова – Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.- М., Наука, 1977 г.
3. Бийбосунов Б., Уметалиев М. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах.- Бишкек, Илим, 1998 г.

References

1. Kamke E. Manual on elementary differential equations. Moscow, Science, 1976.
2. Polubarinova–Kochina P. Theory of underground water movement. Moscow, Science, 1977.
3. Biibosunov B., Umetaliev M. Analytical and approximate analytical methods of filtration and liquid infiltration in various environment. Bishkek, Science, 1998.

УДК 532.546

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД С ПОМОЩЬЮ НАПОРНЫХ

Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э., д.ф.-м.н., Ысык-Кульский государственный университет им. К.Тыныстанова, г. Каракол, Кыргызская Республика, e-mail: elmira.madanbekova.70@mail.ru

Цель статьи – разработка и апробация алгоритма решения задач по оптимальному управлению уровнем грунтовых вод с помощью напорных. Рассмотрена возможность управления уровнем грунтовых вод путем изменения напоров в напорном водоносном слое. В задаче требуется построить управляющую функцию, которая доставляет минимум функционалу. Предложен алгоритм решения этой задачи, в котором применяются метод конечных элементов, обобщенный принцип Галеркина и формула Грина. Вычисления производятся с применением итераций. Изложенный алгоритм отлажен на ряде тестовых задач. Приведены точные и приближенные значения искомых функций в некоторых узлах сетки.

Ключевые слова: оптимальное управление, уровень грунтовых вод, алгоритм, напорный горизонт, фильтрация, водоносный слой, функционал, минимизация.

OPTIMAL CONTROL OVER THE LEVEL OF THE GROUNT WATERS BY MEANS OF PRESSURE

Murzakmatov M.U., Madanbekova E.E. Dr., Isyk-Kul State University after named K.Tynystanov, Karakol, Kyrgyz Republic, e-mail: elmira.madanbekova.70@mail.ru

Purpose of the article is to develop algorithm of the solution of optimal control over the level of the grount waters by means of pressure. Possibility of control over the level of the grount waters by changing pressure in pressure waters layer. Is considered in required to build the controlling function, which delivers the minimum to functional. Algorithm of the solution of this problem, in which are used method finite elements, generalised principle Galerkina and formula Grina, are offered the calculations are produced with using iteration. The Stated algorithm examined on row of the test problems. There are brought up exact and app roxinate variables of sought functions in some nodes of the net.

Keywords: Optimal control, level of the grount waters, algorithm, pressure horizon, filtering, aquifers layer, functional, minimization.

В работах [4-6] оптимальное управление уровнем грунтовых вод (УГВ) осуществляется устройством горизонтальных и вертикальных дрен в покровном слое. В случае отсутствия горизонтального течения грунтовых вод в покровном слое управление УГВ возможно лишь с помощью скважин, пробуренных в основной напорный горизонт.

Рассмотрим движение подземных вод в двухслойном пласте, при этом считаем, что движение грунтовых вод происходит только в вертикальном направлении. В такой постановке движение подземных вод в двухслойном пласте описывается следующей системой дифференциальных уравнений[1-3,7]:

$$\begin{cases} \mu_b \dfrac{\partial h}{\partial t} + k_b \dfrac{h-H}{m_b} = f, \\ \mu_{упр} \dfrac{\partial H}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial y}\right) - k_b \dfrac{h-H}{m_b} + \dfrac{k_n}{m_n}(H-Z) + F = W, \\ (x,y)\in D, \qquad t>0, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными

$$\begin{aligned} &h(x,y,0) = h_0(x,y), \\ &H(x,y,0) = H_0(x,y), \qquad (x,y)\in D, \end{aligned} \tag{2}$$

и граничными

$$T\frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha, \qquad (x,y)\in S = \partial D, \quad t>0, \tag{3}$$

условиями.

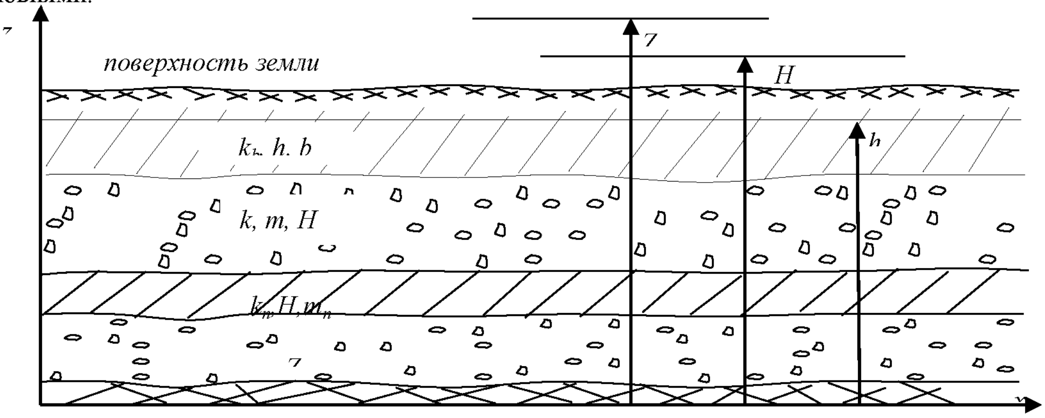

Рис.1. Схема строения многослойных пластов

В задаче (1)−(3) приняты следующие обозначения: $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$, $Z(x,y)$ −отметки УГВ в верхнем покровном слое и напоров в основном и нижележащем напорных пластах соответственно; $T(x,y) = k\cdot m$ −водопроводимость основного напорного горизонта; $k_b(x,y)$, $k(x,y)$, $k_n = const$, $m_b(x,y,t) = h(x,y,t) - b(x,y)$, $m(x,y)$, $m_n = const$ − коэффициенты фильтрации и мощности верхнего, основного водоносного слоев и слабопроницаемой прослойки; $\mu_b(x,y)$ и $\mu_{упр}(x,y)$ − коэффициенты водоотдачи и упругоемкости верхнего и основного напорного слоев; $f(x,y,t)$ −функция источников и стоков грунтовых вод; $W(x,y,t)$−функция, учитывающая перетоки между напорными горизонтами; $b(x,y)$− поверхность раздела между покровным слоем и основным напорным горизонтом; $h_0(x,y)$ и $H_0(x,y)$−начальные распределения УГВ и напоров; $\beta(x,y,t)$ и $\alpha(x,y,t)$−заданные функции; D −область фильтрации в плане, $S=\partial D$−ее граница; $n=(cos(n,x),cos(n,y))$−внешняя нормаль к границе области; $\frac{\partial}{\partial n}$ − производная по этой нормали.

Функция $F(x,y,t)$ выражает дебит эксплуатационных скважин, отбирающих воду из основного напорного горизонта, т.е. управление УГВ осуществляется с помощью этой функции.

Задача оптимального управления УГВ ставится следующим образом [1,4]. Требуется построить такую управляющую функцию $F(x,y,t)$, которая при $t \ge t_0$ доставляет минимум функционалу

$$J(F)=\iint_D \left[h(x,y,t_0;F(x,y,t_0))-\varphi(x,y)\right]^2 dxdy+\gamma\iint_D\int_0^{t_0}\left[F(x,y,t)\right]^2 dxdydt, \qquad (4)$$

где $h(x,y,t;F)$− УГВ; $\varphi(x,y)$− заданная функция, равная оптимальному УГВ; $\gamma>0$− параметр регуляризации; t_0− заданное значение времени.

Функция $F_{опт}(x,y,t)$ − доставляющая минимум функционалу (4), называется оптимальным управлением, а соответствующая ей функция $h_{опт}(x,y,t)$ − оптимальным УГВ. Функция $h(x,y,t;F)$ из формулы (4) определяется из задачи (1)−(3).

Теперь рассмотрим алгоритм решения этой задачи.

Образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s=t_s-t_{s-1}$, $s=1,2,\ldots$ и, применяя неявную абсолютно устойчивую разностную схему с весом $\sigma=1$, запишем разностные аналоги уравнений (1), (3):

$$\begin{cases} \mu_b\dfrac{h^s-h^{s-1}}{\Delta t_s}+k_b\dfrac{h^s-H^s}{m_b}=f^s, \\ \mu_{упр}\dfrac{H^s-H^{s-1}}{\Delta t_s}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H^s}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H^s}{\partial y}\right)-k_b\dfrac{h^s-H^s}{m_b}+\dfrac{k_n}{m_n}\left(H^s-Z\right)+F^s=W^s, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} h^s=\dfrac{\left(\dfrac{\mu_b}{\Delta t_s}h^{s-1}+\dfrac{k_b}{m_b}H^s+f^s\right)}{\left(\dfrac{\mu_b}{\Delta t_s}+\dfrac{k_b}{m_b}\right)}, \\ LH^s=V^s, \end{cases} \qquad (5)$$

$$lH^s=\alpha^s, \qquad (7)$$

где

$$L=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{T}\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial}{\partial y}\right)+Q_b,$$

$$l=T\frac{\partial}{\partial n}+\beta^s,$$

$$V^s=\frac{\mu_{упр}}{\Delta t_s}H^{s-1}+\frac{k_b}{m_b}h^s+\frac{k_n}{k_n}Z-F^s+W^s, \qquad (8)$$

$$Q_b=\frac{\mu_{упр}}{\Delta t_s}+\frac{k_b}{m_b}+\frac{k_n}{m_n}.$$

Систему уравнений (5), (6) решаем численно методом конечных элементов. Для этого область фильтрации D разбиваем на m треугольных элементов, для каждого элемента введем линейные базисные функции $N(x,y)$ и представим искомые функции в виде следующих сумм:

$$h_n(x,y,t_s)=\sum_{j=1}^{n}h_j(t_s)N_j(x,y), \tag{9}$$

$$H_n(x,y,t_s)=\sum_{j=1}^{n}H_j(t_s)N_j(x,y) \tag{10}$$

где , $h_j(t_s)=h(x_j,y_j,t_s)$ $H_j(t_s)=H(x_j,y_j,t_s)$ – значения искомых функций h и H в точке (x_j,y_j) в момент времени t_s; $N(x,y)=a+bx+cy$ – линейная базисная функция.

В уравнениях (6) и (7) вместо $H(x,y,t)$ подставим функцию $H_n(x,y,t)$ из формулы (10) и применим обобщенный принцип Галеркина:

$$\iint_D N_i(LH_n^s-V^s)d\sigma+\int_S N_i(lH_n^s-\alpha^s)ds=0, \tag{11}$$

$$i=1,2,...,n.$$

Преобразуем первый интеграл в левой части по формуле Грина и приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно искомых значений функции $H(x,y,t_s)$ в узлах сетки:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}H_j^s=b_i,\ \ i=1,2,...,n;\ \ s=1,2,... \tag{12}$$

где
$$a_{ij}=\iint_D T(x,y)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\sigma+\iint_D N_iQ_bd\sigma+\int_S N_i\beta ds,$$

$$b_i=\iint_D N_iVd\sigma+\int_S N_i\alpha ds.$$

Используя начальные значения функций h и H, решаем систему (12) и находим приближенные значения функции H, после чего по формуле (5) вычисляем значения функции h. Поскольку функции h и H взаимосвязаны по формулам (5) и (8), вычисления производятся с применением итераций.

Переходим теперь к поставленной задаче. Значения УГВ и напоров вычисляются в дискретном множестве точек, поэтому вместо функционала (4) мы минимизируем его дискретный аналог

$$J(F)=\sum_{i=1}^{n}\left[h(x_i,y_i,t_0;F_i)-\varphi(x_i,y_i)\right]^2+\gamma\sum_{i=1}^{n}F_i^2, \tag{13}$$

где n – число узлов расчетной сетки.

Мы должны отыскать такие значения функции $F(x,y,t)$, которые доставляют функции $J(F)$ минимум. Функция $h(x,y,t;F)$ в общем случае зависит от управления нелинейно. Линеаризуем ее относительно F, разлагая ее в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми двумя членами ряда:

$$h(F)=\tilde{h}+\sum_{j=1}^{n}(F_j-\tilde{F}_j)\frac{\partial h}{\partial F_j}+R_2(\Delta F). \tag{14}$$

Здесь $\tilde{h}=h(\tilde{F})$, $\tilde{F}$ – известное значение управляющей функции F, найденное в предыдущей итерации; R_2 – остаточный член ряда. Это выражение для $h(F)$ подставим в формулу (13):

$$J(F)=\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{h}+\sum_{j=1}^{n}\left(F_j-\tilde{F}_j\right)\frac{\partial h_i}{\partial F_j}-\varphi_i\right]^2+\gamma\sum_{i=1}^{n}F_i^2. \tag{15}$$

Находим минимум функции $J(F)$, зависящей от n переменных $F_1,F_2,\ldots,F_n$, для чего образуем систему уравнений $\frac{\partial J(F)}{\partial F_k}=0$, $k=1,2,...,n$.

Имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\tilde{h}_i+\sum_{j=1}^{n}\left(F_j-\tilde{F}_j\right)\frac{\partial h_i}{\partial F_j}-\varphi_i\right]\frac{\partial h_i}{\partial F_k}+\gamma F_k=0,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} F_j = b_k, \; k = 1,2,...,n \;, \quad (16) \text{ где}$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial F_k} \frac{\partial h_i}{\partial F_j} \quad \text{при} \, k \neq j \,,$$

$$a_{kk} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial F_k} \right)^2 + \gamma \,,$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i - \widetilde{h}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial F_j} \widetilde{F}_j \right) \frac{\partial h_i}{\partial F_k} \,.$$

Задача минимизации функции (13) также решается итерацией, которая продолжается до выполнения условий

$$\left| h^{(v)}(x,y,t_0) - h^{(v-1)}(x,y,t_0) \right| < \varepsilon_1 \,,$$

$$\left| F^{(v)}(x,y,t_0) - F^{(v-1)}(x,y,t_0) \right| < \varepsilon_2 \,,$$

где ε_1, ε_2 – заданные малые числа, v – номер итерации;

Изложенный алгоритм отлажен на ряде тестовых задач. Рассмотрим одну из них. Область фильтрации в плане представляет собой круг радиуса *r=3000м*, на границе которого заданы граничные условия (3).Проведя концентрические окружности радиуса *1000 м* и *2000 м*, область разбиваем на *55* элементов, число узлов при этом *n=39*. Шаг по времени равномерный, длина временного отрезка $t_0 = 360$*сут.* Задача решалась с различными шагами $\Delta t = 1$ *сут, 10 сут, 30 сут*.

В табл.1. приведены точные и приближенные значения искомых функций в некоторых узлах сетки. Узел №20 расположен в центре области.

Таблица 1

Результаты тестовой задачи

Растоя-ние от центра, *м*	Узлы Точные значения, *м* Приближенные значения, *м* Относительные погрешности, *%*				
3000	Узлы	2	6	29	35
	Точные знач.УГВ	650.00	650.00	650.00	650.00
	Приб.знач. УГВ	649.50	649.45	649.46	649.43
	Отн.пог . УГВ	0.08	0.084	0.083	0.088
2000	Узлы	7	12	28	33
	Точные знач. УГВ	661.25	661.25	661.25	661.25
	Приб.знач. УГВ	661.00	660.95	660.84	660.97
	Отн.пог. УГВ	0.037	0.045	0.062	0.042
1000	Узлы	13	19	21	27
	Точные знач. УГВ	667.83	667.83	667.83	667.83
	Приб.знач. УГВ	667.61	667.63	667.65	667.60
	Отн.пог. УГВ	0.033	0.029	0.026	0.034
0	Узлы	20			
	Точные знач. УГВ	670.00			
	Приб.знач. УГВ	669.85			
	Отн.пог. УГВ	0.022			

Выводы. Получены точные и приближенные значения искомых функций в узлах сетки. Предложенный алгоритм решения задачи и результаты для тестов свидетельствуют о применимости данной работы. В настоящее время оптимальное управление грунтовыми водами является актуальным, поэтому требуется произвести глобальное исследование по этой теме.

Список литературы

1. Абуталиев Ф.Б., Абуталиев Э.Б. Методы решения задач подземной гидромеханики на ЭВМ.- Ташкент: ФАН, 1968.−143 с.
2. Васильев П.В. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. −400 с.
3. ДжаныбековЧ.Дж. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. − Фрунзе: Илим, 1982.-288с.
4. Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э. Оптимальное управление уровнем грунтовых вод в многослойных пластах. //Известия КГТУ им. И.Раззакова, №17, Бишкек: 2009.−с188−191.

5. Маданбекова Э.Э. Пример оптимального управления уровнем грунтовых вод в многослойных пластах в установившемся режиме.//Альманах современной науки и образования, №7(50). –Тамбов: 2011.−с 64−68.

6. Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э. Задача оптимального управления уровнем грунтовых вод в слоистых пластах. //Известия КГТУ им. И.Раззакова, №24, Бишкек: 2011.−с154−159.

7. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969.− 414 с.

References

1. Abutaliev F.B., Abutaliev E.B. Metody resheniya zadach podzemnoy gidromekhanihi na EVM.[The methods of the decision of the underground hydromechanical problems on computer] −Tashkent: FAN, 1968.− page143

2. Vasiliev P.V. Metody reshenia extremalyykh zadach. [The Methods of the decision of the extreme problems] −Moscow: Nauka, 1981.−400 c.

3. Djanybekov Ch.Dj. Matematicheskie modelirovanie dvijeniya gruntovykh vod v mnogosloynykh sredakh.[Mathematical modeling of the motion grount waters in the multilayer ambience] −Frunze: Ilim, 1982.- page 288

4. Murzakvatov M.U., Madanbekova E.E. Optimalnoe upravlenie urovnem gruntovyx vod v mnogosloynekh plastakh [Optimal control over the lever of the ground waters in the multilauer aquifers] //Izvestya, KGTU im. I.Razzakov , №17, Bishkek : 2009.−page 188−191.

5. Madanbekova E.E. Primer optimalnogo uprafleniya urovnem gruntovykh vod v mnogosloynekh plastakh v ustanovivshemsa rejime [The example of optimal control over the lever of the ground waters in the multilauer aquifers in formed mode]//Almanahk sovremennoy nauki i obrazovania, №7(50). – Tambov: 2011.− page 64−68.

6. Murzakvatov M.U., Madanbekova E.E. Zadacha optimalnogo upravleniy urovnem gruntovykh vod v sloistykh plastakh. [The problem of the control over the level of the grount waters in the multilayer aquifers] //Izvestya, KGTU im. I.Razzakov , №24, Bishkek : 2011. .−page 154−159.

7. Polubarinova-Kochina P.Ya., Pryajinskaya V.G., Emikh V.N. Matematicheskie metody v voprisakh orosheniya [The Mathematical methods in questions of the irrigation]−Moscow : Nauka, 1969.−page 414 .

УДК 631.6 (575.2)

К РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЙ ОСНОВНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ МОДЕЛИ НЕТРАДИЦИОННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ РЕЖИМНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОТКРЫТЫХ ВОДОТОКОВ

Пресняков К.А., Керимкулова Г.К., Аскалиева Г.О., Институт автоматики и информационных технологий НАН КР,г. Бишкек, Кыргызстан, gulsaat@mail.ru

Уточнены условия пользования преобразованными соотношениями Ю.А. Ибад-Заде для средней скорости водного потока, распределением относительной мутности воды по глубине потока К. Загустина.

Расширен круг аналитических материалов, привлекаемых к реализации рассматриваемой модели за счет включения в него выведенных формул средней скорости и распределений относительной мутности воды для полуэмпирических теорий Кармана, Тэйлора-1, Тэйлора-2.

На основе анализа характерных скоростей воды в нижней части водотока выявлен преимущественный профиль скорости воды – показательный и сформирована кинематическая структура нижней части водного потока.

Ключевые слова: относительная мутность воды, модели нетрадиционной идентификации режимных параметров открытых водотоков

TO RESEARCH CONCEPTS IN THE MODEL ALTERNATIVE IDENTIFICATION REGIME PARAMETERS FLUME

Presnyakov K.A, Kerimkulova G.K, Askalieva G.O, Institute of Automation and Information Technology, National Academy of Sciences,. Bishkek, Kyrgyzstan, gulsaat@mail.ru

Specified conditions of use transformed relations Y.A. Ibad-Zade for the average velocity of water flow, the distribution of the relative turbidity of the water flow depth K. Zagustina.

The range of analytical materials involved in the implementation of the model due to the inclusion of the formulas derived average velocity distributions and the relative turbidity of the water for the semi-empirical theories Karman, Taylor-1, 2-Taylor.