

3. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений / Г.М. Кененбаева. – Бишкек: Илим, 2012. - 204 с.
4. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода / Н.А. Магницкий // Журнал вычисл. математики и матем. физики, т. 19, № 14, 1979, с. 970-989.
5. Омуров Т.Д. Приближенные методы в теории нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Автореферат диссертации доктора физ.-матем. наук /Т.Д. Омуров. - Бишкек, 2000.
6. Shulaia D. Linear integral equations of the third kind arising from neutron transport theory/ D. Shulaia // Math. mech. appl. sci. - 2007, No 30. - P. 1941-1964.
7. Tagaeva S.B. Regularization and unity of Volterra linear integral equations solutions of third kind in the space of summed up functions / S.B. Tagaeva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 401-406.
8. Kenenbaeva G. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics / G. Kenenbaeva, S. Tagaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Ed. by acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – Pp. 107-111.

#### References

1. Asanov A. Regularizatsia i edinstvennost reshenii lineynih integralnih uravnenii Volterra tretiego roda [Regularization and uniqueness of solutions of Volterra integral equations of third kind] / A. Asanov, G. Obodoeva // Issledovaniya po integro- differentsialnim uravneniyam. – Bishkek: Ilim, 1994. – Vip. 25. –page 65-74.
2. Gabbasov N.S. Novii priblizhennii metod resheniya integralnih uravnenii tretiego roda [New approximate method to solve integral equations of third kind] / N.S.Gabbasov // Matematicheskie zametki. 1991. – T.49, No.1.- page 40-46.
3. Kenenbaeva G. M. Teoria i metodika poiska novih effektov i yavlenii v teorii vozmushennih differentsialnih i raznostnih uravnenii [Theory and methodic to search new effects and phenomena in the theory of perturbed differential and difference equations] / Kenenbaeva G. M.- Bishkek: Ilim, 2012. – page 204 .
4. Magnickii N.A. Lineinie integralnie uravnenia Volterra I i III roda [Linear Volterra integral equations of I and III kind] /N.A. Magnickii// Gurnal vichislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki, т. 19, № 14, 1979, page . 970-989.
5. Omurov T.D. Priblizhennii metodi v teorii nelineinih integralnih uravnenii Volterra pervogo i tretiego roda [Approximate methods in the theory of nonlinear Volterra integral equations of first and third kind]. Avtoreferat dissertatsii doktora fiziko- matematicheskikh nauk / T.D. Omurov.- – Bishkek, 2000.
6. Shulaia D. Linear integral equations of the third kind arising from neutron transport theory/ D. Shulaia // Math. mech. appl. sci. - 2007, No 30. - page. 1941-1964.
7. Tagaeva S.B. Regularization and unity of Volterra linear integral equations solutions of third kind in the space of summed up functions / S.B. Tagaeva // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – page. 401-406.
8. Kenenbaeva G. Survey of effects and phenomena in some branches of mathematics / G. Kenenbaeva, S. Tagaeva // Proceedings of V Congress of the Turkic World Mathematicians. Ed. by acad. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – page. 107-111.

УДК 532.546:536.421

#### ПРОЦЕСС ЗАГРЯЗНЕНИЯ В ЗОНЕ ТАЛОГО ГРУНТА

Джаманбаев Мураталы Джузумалиевич, д.ф.-м.н., профессор, КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызская Республика, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: [jamanbaev@mail.ru](mailto:jamanbaev@mail.ru).

Чыныбаев Мирлан Койчубекович, к.ф.-м.н., доцент, КГТУ им. И.Раззакова, Кыргызская Республика, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: [jamanbaev@mail.ru](mailto:jamanbaev@mail.ru)

На типичном примере имитируется процесс загрязнения под основанием водоема в зоне талого грунта. Приводится численная реализация математической модели, которая описывает процесс загрязнения под основанием водоема через фильтрационный поток жидкости с помощью пакета прикладных программ COMSOL Multiphysics с визуализацией полученных результатов. Загрязнителями могут быть промышленные отходы, отходы золоторудной фабрики и хвостохранилища. Качественное исследование, прогнозирование процессов загрязнения подземной гидросферы является основной задачей охраны окружающей среды.

**Ключевые слова:** загрязнение, фильтрация, плотина, грунт, моделирование, водоем, жидкость, прогнозирование

## CONTAMINATIONS PROCESS IN UNFROZEN SOIL

**Muratally Jamanbaev**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, KSTU named after I.Razzakov, Kyrgyz Republic, 720044, Bishkek, Mir avenue, 66, e-mail: [jamanbaev@mail.ru](mailto:jamanbaev@mail.ru).

**Mirlan Chynybaev**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, KSTU named after I.Razzakov, Kyrgyz Republic, 720044, Bishkek, Mir avenue 66, e-mail: [jamanbaev@mail.ru](mailto:jamanbaev@mail.ru)

On a typical example of the process is simulated contamination under the base of the reservoir in the area of unfrozen soil. Numerical implementation of a mathematical model that describes the process of pollution under the base of the reservoir through the filtration flow of fluid via the application package COMSOL Multiphysics with the visualization of the results. Pollutants may be industrial waste, waste and tailings gold factory. Qualitative research, forecasting of pollution of underground hydrosphere is the main task of environmental protection.

**Keywords:** contamination, filtration, dam, soil, modeling, reservoir, fluid, prediction

**Постановка задачи.** Рассматривается случай, когда загрязнение может происходить через дно пруда хвостохранилища (рис.1). Для общности задачи пористая среда под основанием пруда считается двухслойной, имитирующей хвостохранилища, т.к. отходы золоторудной фабрики в виде пульпы складываются и образуют плотный слой пульпы под основанием пруда хвостохранилища. Поэтому область фильтрации представляется как двухслойная среда. Первый слой более плотный, второй с большей пористостью и представляет горную породу. Чтобы предотвратить фильтрацию через тело плотины, верхний бьеф и часть основания хвостохранилища, предполагается покрыты их водонепроницаемым материалом.

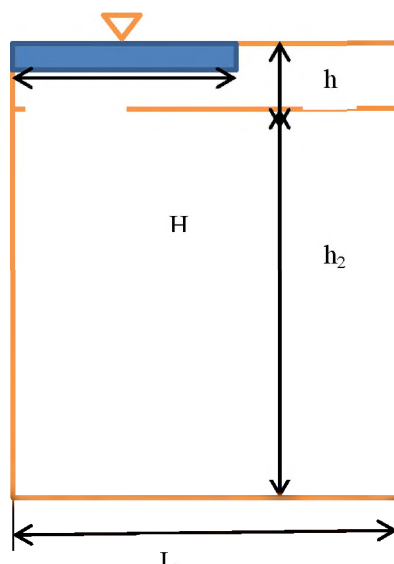


Рис.1. Схематичное представление проникновения загрязнителей в слой грунта.

Для исследования процесса загрязнения через фильтрацию воды из водоема достаточно рассмотреть область под основанием хвостохранилища. Для имитации данного процесса источником загрязнения считается водоем. Часть основания водоема вблизи к верхнему бьефу плотины покрыта пленкой, а остальная часть длиной –  $r$  не покрыта. На рис.1. показано схематичное проникновение загрязнителей из водоема в грунты. Водопроницаемые грунты глубиной  $h_1$ ,  $h_2$  имеют разные геометрические и гидрогеологические характеристики. Нижняя граница второго слоя считается непроницаемой. Вода на дневной поверхности содержит вредные вещества постоянной концентрации. Вредные вещества входят в пористую среду с водой и перемещаются адвекцией и дисперсией. В процессе впитывания раствора в слоях грунта уменьшается концентрация в воде и замедляется движение раствора относительно воды. Сорбция считается линейно пропорциональной водным концентрациям загрязнителей. Сначала решается фильтрационная задача, затем с учетом ее результатов задача о переносе вредных веществ методом конечных элементов. Область типичного примера рассматривалась со следующими размерами:  $L = 60\text{m}$ ,  $h_1 = 0.4\text{m}$ ,  $h_2 = 2.6\text{m}$ ,  $r = 1.8\text{m}$ . Разбиение области на треугольные элементы производится автоматически и равнялось 776 элементам. В начальный момент задается поле значений гидростатических давлений и концентраций.

Процесс насыщения и фильтрации жидкости моделируется уравнением Ричардсона.

$$(C + S_e S) \frac{\partial H_p}{\partial t} + \nabla \cdot (-K \nabla (H_p + D)) = 0 \quad ,$$

где  $C$  – влагоемкость грунта;  $S_e$  – эффективная насыщенность грунта или почвы (безразмерная);  $S$  – коэффициент насыщенности среды;  $H_p$  – гидростатическое давление, которое пропорционально давлению  $P(\text{Pa})$ ;  $t$  – время;  $K$  – гидравлическая проницаемость ( $\text{м/с}$ );  $D = z$  – направление, которое представляет разность

по вертикали (м). Гидравлический напор  $H$ , гидростатическое давление  $H_p$ , и высота  $D$  связаны с давлением  $P$  через известное соотношение

$$H_p = \frac{P}{\rho g}; \quad H = H_p + D.$$

$k$  – проницаемость ( $1/m^2$ ) и гидравлическая проводимость  $K$  ( $m/c$ ) связаны с вязкостью  $\mu$  ( $Pa \cdot s$ ), плотностью  $\rho$  ( $kg/m^3$ ) жидкости и ускорением свободного падения  $g$  ( $m/t^2$ ) соотношением

$$\frac{k}{\mu} = \frac{K}{\rho g}.$$

В процессе проникновения жидкости в сухую или влажную среду жидкость может не полностью заполнять все поры в грунте. Поэтому вводится параметр, характеризующий объем жидкости, содержащийся в грунте  $S = (\theta_s - \theta_r)/(lm \rho g)$  - уровень насыщенности среды. Здесь  $\theta_s, \theta_r$  характеризуют содержание воды в насыщенной и ненасыщенной среде. Влагоемкость среды  $C$  характеризует изменения влажности с изменением гидростатического давления  $C = \partial\theta/\partial H_p$  или изменением содержания жидкости в грунте

**Граничные условия.** Кроме источника загрязнения на всех границах области ставится условие непроницаемости

$$n u = 0, \tag{1}$$

где  $n$  – вектор нормали границ области  $u$  – скорость фильтрации. Начальное условие для гидростатического давления задано

$$H_p = H_{p0} \tag{2}$$

Скорость фильтрации с гидростатическим давлением связана через закон Дарси

$$u = K_s k_r \nabla(H_p + D) \tag{3}$$

Процесс переноса вредных веществ в пористой среде моделируется в общем виде уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta c) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b c_p) + \nabla[-\theta D_L \nabla c + u c] = \sum R_L + \sum R_p + S_c \tag{4}$$

Здесь  $\theta c$  – растворенная концентрация вещества в жидкости ( $kg/m$ ),  $c_p$  – масса адсорбированного загрязнителя на грунте ( $mg/kg$ ),  $\theta$  – доля объема жидкости в грунте,  $\rho_b$  – объемная плотность ( $kg/m^3$ ),  $\rho_b c_p$  – масса раствора в грунте,  $D_L$  – гидродинамический тензор дисперсии ( $m^2/d$ ),  $R_L$  представляет реакции в воде ( $kg/(m^3 d)$ ),  $R_p$  – реакцию, вовлекающую растворы ( $kg/(m^3 d)$ ),  $S_c$  – раствор, отнесенный к единичному объему почвы в единицу времени ( $kg/(m^3 d)$ ). Для простоты вышеприведенное уравнение перепишем только для случая растворенной концентрации. Масса раствора в почве  $c_p$  выражается линейно через концентрацию и коэффициент разделения  $K_p$  ( $m^3/kg$ ):  $c_p = K_p c$  или  $K_p = \frac{\partial c_p}{\partial c}$ . С учетом этих преобразований исходное уравнение имеет вид

$$(\theta + \rho_b k_p) \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla(-\theta D_L \nabla c + u c) = \theta \varphi_L c + \rho_b k_p \varphi_p + S_c$$

Здесь  $\varphi_L, \varphi_p$  – показатели распада для растворенных и впитанных почвой концентраций раствора,  $D_L$  – гидродинамический тензор дисперсии, он описывает механическое распространение от движения грунтовой воды в дополнение к химическому распространению:

$$\theta D_{Lii} = \alpha_1 \frac{u_i^2}{|u|} + \alpha_2 \frac{u_j^2}{|u|} + \theta D_m \tau_L,$$

$$\theta D_{Lij} = (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{u_i u_j}{|u|},$$

где  $D_{Lii}$  – диагональные компоненты тензора дисперсии;  $D_{Lij}$  – не диагональные члены;  $\alpha_1, \alpha_2$  – продольные и поперечные дисперсии ( $m$ );  $D_m$  – коэффициент молекулярной дисперсии ( $m^2/d$ );  $\tau_L$  – фактор извилистости, который уменьшает воздействия молекулярного распространения в пористой среде относительно чистой воды.

Граничные и начальные условия процесса переноса вредных веществ в грунте считается следующими: в начале раствор поступает в грунт с водой при концентрации  $c_0$ . До начала процесса загрязнения грунт считается сухим и чистым, т.е. начальное условие – нулевая концентрация. Все границы области загрязнения, кроме границ, где происходит загрязнение, считаются непроницаемыми. Конкретно рассмотрен типичный пример, исходные данные которого равны:

Данные для фильтрационной задачи

Переменная	Единица измерения	Описание	Верхний слой почвы	Нижний слой почвы
$K_s$	m/d	Насыщенная гидравлическая проводимость	0.298	0.454
$\theta_s$		Пористость	0.1	0.25
$\theta_r$		Остаточная насыщенность	0.001	0.001
$\alpha$	$m^{-1}$	Альфа-параметр	1.74	1.39
$n$		Параметр	1.38	1.60
$m$		m параметр	1-1/n	1-1/n
$l$		Параметр возможности соединения поры	n/a	
$H_{p0}$		Гидростатическое давление в кольце	5	
$H_{p,init}$		Начальное гидростатическое давление	$-(z+1.2) - 0.2(z+0.4)$	$-(z+1.2)$

Таблица 2

Данные для задачи переноса вредных веществ

Переменная	Единица измерения	Описание	Значение
$\rho_b$	$kg/m^3$	Объемная плотность	1400
$k_p$	$m^3/kg$	Коэффициент распределения	0.0001
$D_m$	$m^2/d$	Коэффициент молекулярной диффузии	0.00374
$\alpha_r$	m	Продольная дисперсия	0.005
$\alpha_z$	m	Поперечная дисперсия	0.001
$\phi_L$	$d^{-1}$	Уровень распада в жидкости	0.05
$\phi_P$	$d^{-1}$	Уровень распада в почве	0.01
$c_0$	$kg/m^3$	Уровень концентрации раствора в кольце	1.0
$c_{ini}$	$kg/m^3$	Начальный уровень концентрации раствора	0

Согласно вышеприведенной математической модели загрязнения подземной гидросферы произведены расчеты на определенный период времени.

Результаты расчета представлены в течение 120 часов с начала загрязнения или в течение 5 суток. Как видно из рис.3, показано распространение вредного вещества в грунте во времени. Оно распространяется согласно гидростатическому давлению среды, которое представлено на рис.4.

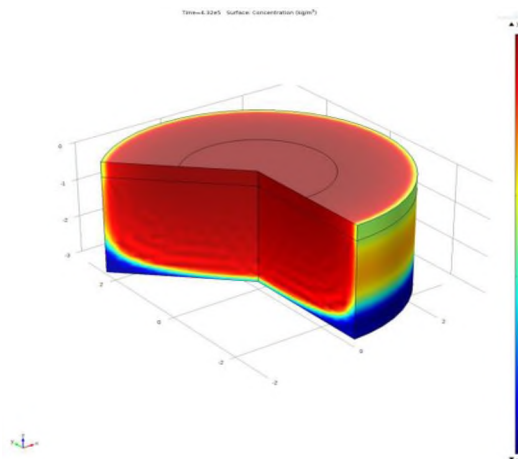


Рис. 2. Концентрация загрязнителя  $kg/m^3$  в пространстве

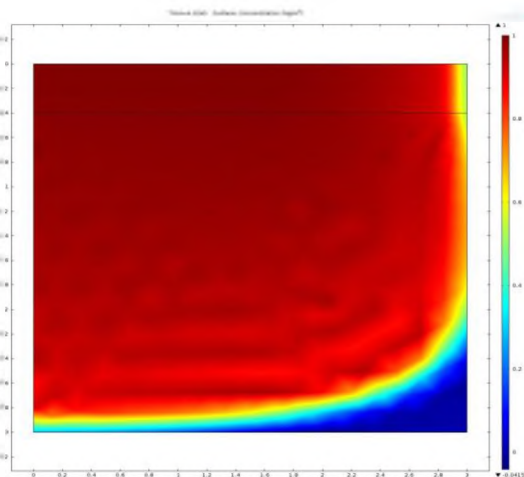


Рис. 3. Концентрация загрязнителя  $kg/m^3$  в плоскости

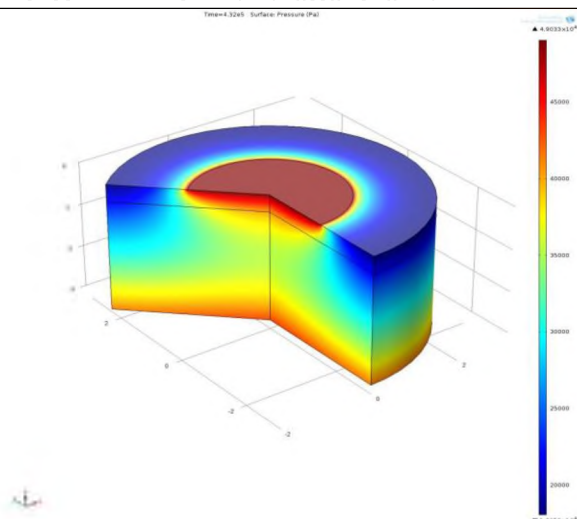


Рис.4. Внутреннее давление МПа в пространстве.

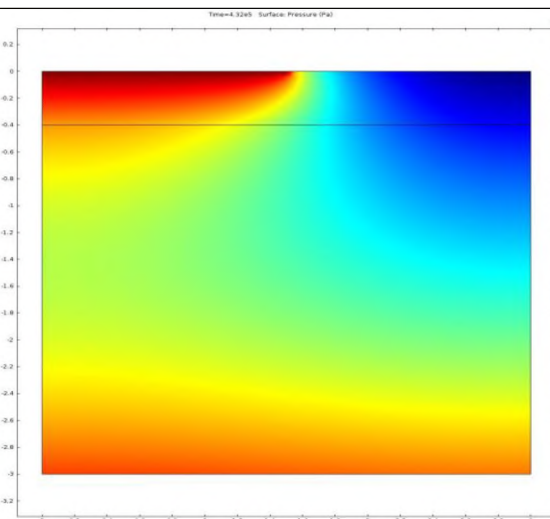


Рис.5. Внутреннее давление МПа в плоскости.

**Выводы.** Результаты математической модели загрязнения вредных веществ в пористой среде, полученные с помощью программного продукта, являются достоверными. Работоспособность модели и программного продукта COMSOL проверены на типичном примере задачи загрязнения подземной гидросферы.

#### Список литературы

1. Методы охраны подземных вод от загрязнения и истощения/ Под ред. И.К. Гавич.-М.: Недра, 1985.-320с.
2. Лукнер Л., Шестаков М.М. Моделирование геофильтрации.-М.: Недра, 1975.-320с.
3. Brooks R.H. and Corey A.T. "Properties of porous media affecting fluid flow". J.Irrig. Drainage., ASCE. Proc.72(IR2), pp. 61-88, 1966.
4. Pryor, Roger W., Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach, Jones and Bartlett Publishers, ISBN: 0763779997, 2009
5. Я.Б.Горелик, В.С. Колунин. Удивительная мерзлота. Криосфера земли 2000. т.4.№2. стр .41-51
6. Томирдиаро С.В. Тепловые расчеты оснований в районах вечной мерзлоты. Магадан. 1963. – стр.104
7. Основы геокриологии (мерзловедение). Инженерная геокриология. Цытович Н.А., И.Я Баранов и др. Часть II. АН СССР, Москва, 1959.- стр. 365
8. Н.А.Цытович, М.И. Сумгин. Основание механики мерзлых грунтов. М. АН СССР, 1937. -12-14стр, 259-280стр
9. М.Дж.Джаманбаев. Протаивание мерзлого грунта с учетом фильтрации воды из водоема. Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 32, с.126-129. Бишкек-2014.
10. М.Дж. Джаманбаев, М. Чыныбаев. Температурный режим тела плотины и основания водохранилища. Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 32, с.129-134. Бишкек-2014.
11. Анискин Н.А. Температурно-фильтрационный режим основания и плотины Курейской ГЭС во втором правобережном понижении. – М. Вестник МГСУ 2/2006. С.43-52.

#### References

1. Methods of protection of groundwater against pollution and depletion / Ed. IK Gavich. M. : Nedra, 1985.- 320 p.
2. Lukner L. Shestakov MM Modeling geofiltratsii. M. : Nedra, 1975.- 320 p.
3. Brooks R.H. and Corey A.T. "Properties of porous media affecting fluid flow". J.Irrig. Drainage., ASCE. Proc.72 (IR2), pp. 61-88, 1966.
4. Pryor, Roger W., Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach, Jones and Bartlett Publishers, ISBN: 0763779997, 2009
5. Ya.B.Gorelik, VS Kolunin, Amazing frost. Earth Cryosphere 2000. t.4.№2. pp.41-51.
6. Tomirdiario SV Thermal calculations bases in permafrost regions. Magagadan. 1963. - 104 p.
7. Fundamentals of Geocryology (Permafrost). Inzhenennrnaya geocryology. Tsitovich NA, I.YA Baranov et al. Part II. USSR Academy of Sciences, Moscow, 1959.- 365 p.
8. N.A.Tsytovich, MI Sumgin. The base mechanics of frozen soils. M. USSR Academy of Sciences, 1937. pp.12-14, pp. 259-280
9. M.Dzh.Dzhamanbaev. Thawing of frozen soil based filtering water from the reservoir. Proceedings of KSTU. I.Razzakova, № 32, s.126-129. Bishkek 2014.
10. MJ Dzhamanbaev, M. Chynybay. The temperature regime of the dam and reservoir base. Proceedings of KSTU. I.Razzakova, № 32, pp.129-134. Bishkek 2014.



11. Aniskin NA Temperature-filtration mode and the base of the dam hydroelectric Kureiskaya second right bank lowered. - M. Herald MGSU 2/2006. 43-52 p.

УДК 539.47

### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РЕАКТИВНЫХ УСИЛИЙ СОСТАВНЫХ ПРУЖИН

**С.А. Абдрахманов, Ж.Ж. Доталиева, М.Б. Джолдошбаева, Джанузакова А.А.**, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: zh.dotalieva@gmail.com

**Целью** данной работы является теоретическое изучение генерации реактивных усилий, развиваемых рассматриваемой конструкцией, включающих составные пружины, одна из которых изготовлена из материала с памятью формы, при различных соединениях.

Рассмотрены процессы нагрузки, разгрузки, а также вопросы генерации реактивных усилий при их нагреве в области температур фазового перехода. Известно, что пружины, как правило, в основном работают в упругой области их деформирования. Но с появлением нового класса материалов, в частности, обладающих эффектом памяти формы, рабочая область деформирования пружин расширяется и может включать и неупругую зону. Следовательно, изучение условия деформирования пружин за пределами упругости является важной задачей. В данной работе сделан анализ генерации реактивных усилий пружин при их совместной работе с пружиной, не обладающей эффектом памяти формы. Получена зависимость величины максимального реактивного усилия от величины нагрузки в момент разгрузки. Сделано сравнение полученных результатов при параллельном и последовательном соединении пружин.

**Ключевые слова:** составные пружины, жесткость пружины, модуль сдвига, упругая и неупругая работа, осевое перемещение, напряжения, растягивающее усилие, реактивное усилие.

### ABOUT DETERMINATION REACTION FORCE OF COMPOSITE COIL SPRINGS

**S.A. Abdrahmanov, Zh.Zh. Dotalieva, M.B. Dzholdoshbaeva, A.A. Djanuzakova**, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Mira ave. 66, e-mail: [zh.dotalieva@gmail.com](mailto:zh.dotalieva@gmail.com)

The aim of this work is a theoretical study of the generation of reactive force exerted by the construction under consideration, including the components of the spring, one of which is made of a shape memory material, with various compounds. Considered the processes of loading and unloading, as well as issues of generation of reactive force when they are heated in the temperature range of the phase transition. It is known that the springs tend to work mainly in the region of their elastic deformation. But with the advent of a new class of materials, in particular having a shape memory effect, the deformation of the springs working area expands and may include resilient zone. Therefore, the study of the deformation conditions of the springs outside of elasticity is an important task. In this paper we made an analysis of the generation of reactive force of the spring when they work together with the spring, not having a shape memory effect. Received the dependence of the maximum reactive force of the load at the time of discharge. Done to compare the results with parallel and series connection springs.

**Keywords:** composite spring, spring, shear modulus, elastic and inelastic work, axial displacement, stress, tension force, reactive force.

Эффект памяти формы (ЭФП) и генерация реактивных усилий, как известно, проявляются только при наличии неупругих деформаций (мартенситной природы) [1,2,3], в связи с этим, важными этапами при проектировании конструкций, работающих за пределом упругости, являются: определение предельной нагрузки, после которой возникают неупругие деформации, в дальнейшем их будем называть фазовыми деформациями; определение величин неупругих деформаций; вопросы разгрузки и изучение остаточных деформаций, и наконец, исследование реактивных усилий, возникающих в условиях воспрепятствования ее формовосстановлению.

В данной работе рассматриваются составные пружины, одна из которых обладает свойством памяти формы. Диаграмму сдвига этой пружины примем в виде двухзвенной ломаной линии. В упругой области деформирования модуль сдвига  $G_2 = G_\mu$ , где  $G_\mu$  - модуль сдвига материала в мартенситном состоянии, в неупругой области этот модуль равен  $nG_\mu$ , где  $n$  - безразмерный параметр, характеризующий степень упрочнения материала ( $0 \leq n \leq 1$ ). Касательное напряжение, соответствующее началу фазовой текучести второй пружины, обозначим через  $\tau_{фт}$ . Учитывая, что  $\tau_{фт}$  намного меньше дислокационного предела текучести,