

состояния. Его компоненты (2) могут быть бесконечно малыми ($c \rightarrow 0$), малыми ($c = -50$), большими ($c = -200$). В любом из этих случаев этот тензор определяет поле перемещения (формулы Чезаро), из которого можно найти все, что касается деформированного состояния.

Выбрав любое направление π_i в произвольной точке области V , можно определить функции:

-относительного удлинения в направлении π_i

$$\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{ij} \pi_i \pi_j,$$

-относительного сдвига на площадке, перпендикулярной к выбранному направлению

$$\gamma(x_1, x_2, x_3) = (\varepsilon_{ki} \varepsilon_{kj} \pi_i \pi_j - \varepsilon^2)^{1/2},$$

-компонент вращения

$$(\omega_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \varpi_{12}(x^0) & \varpi_{13}(x^0) - \frac{c}{E} v(x_1 - x_1^0) \\ \varpi_{21}(x^0) & 0 & \varpi_{23}(x^0) + \frac{c}{E} (x_2 - x_2^0) \\ \varpi_{31}(x^0) + \frac{c}{E} v(x_1 - x_1^0) & \varpi_{32}(x^0) - \frac{c}{E} (x_2 - x_2^0) & 0 \end{bmatrix},$$

позволяющих найти перемещения от вращения окрестности вокруг ротора поля в этой точке,

-разности квадратов длин после и до деформации

$$dx^2 - dz^2 = (2\varepsilon - (\varepsilon^2 + \gamma^2) - (2\omega_{kj} \varepsilon_{ki} + \omega_{ki} \omega_{kj}) n_i n_j) dx^2,$$

-компонент тензора Альманси

$$a_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}$$

и так далее.

Наконец, можно построить конфигурацию тела в сравниваемом состоянии. Координаты z_i этого состояния определяются по формулам

$$z_i = x_i - u_i(x) = x_i - (u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) - \frac{c}{E} (\delta_{i1} v x_3(x_1 - x_1^0) - \delta_{i2} x_3(x_2 - x_2^0) + \delta_{i3}(x_2^2 + v(x_3^2 - x_1^2) - x_2^0(2x_2 - x_2^0) - v((x_3^0)^2 - x_1^0(2x_1 - x_1^0))))/2), x_i \in V.$$

Для определения координат поверхности начальной конфигурации тела в предыдущее выражение надо вносить $x_i \in S$.

Список литературы

1. Жакыпбек А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела. - Бишкек, 1999, 236 с.

References

1. Zhakypbek A.B., T.B. Duyshenaliev. A new view on some of the basics mechanics of body deformation. - Bishkek, 1999, 236 p.

УДК620.10

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЯХ ИЗ СПЛАВА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Ибрагимов Рахманберди Шабданович, к.т.н., доцент, КНУ им. Ж. Баласагына, Кыргызстан, 720033, г.Бишкек, ул. Фрунзе, 547, e-mail: rahman.ibragimov.sh@gmail.com

Целью работы является получение простых расчетных формул зависимости распределения деформаций различной природы и остаточных напряжений в поперечном сечении деформируемого на чистый изгиб стержня из сплава с эффектом памяти формы, с использованием гипотез и теорем механики деформируемого твердого тела. Проанализирована природа появления остаточных напряжений в изогнутых стержнях из никелида титана. Характер распределения остаточных напряжений в сплавах с термоупругим мартенситным механизмом не существенно отличается от таковых для сплавов с дислокационным механизмом.

Ключевые слова: эффект памяти формы; схематизация диаграммы растяжения; испытания на изгиб; мартенситная деформация; остаточная неупругая деформация; остаточная упругая деформация; остаточное напряжение.

CALCULATION OF RESIDUAL STRESSES IN THE BENT RODS OF ALLOY WITH SHAPE MEMORY EFFECT

Ibragimov Rahmanberdy Shabdanovich, Ph.D (Engineering), Associate Professor, KNU named after J. Balasagyn, Kyrgyzstan, 720033, Bishkek, str. Frunze 547, e-mail: rahman.ibragimov.sh@gmail.com

The aim is to obtain simple calculation formulas depending on the strain distribution of different nature and residual stresses in the cross section of the deformable to pure bending rod of alloy with shape memory effect, with use a hypothesis and theory of solid mechanics. The nature of the appearance of residual stresses in the bent rod of NiTi has been analysed. The pattern of distribution of residual stresses in alloys with thermoelastic martensitic mechanism does not differ significantly from those for alloys with dislocation mechanism.

Keywords: shape memory effect; modeling of stress-strain curves; bending test; martensitic deformation; residual inelastic deformation; residual elastic deformation; residual stress.

Введение

Анализ диаграммы деформирования показывает, что имеются существенные отличия в деформационном поведении между сплавами с дислокационным механизмом и термоупругим мартенситным механизмом. Первое отличие состоит в том, что у сплавов с мартенситным механизмом формоизменения, в некотором температурном интервале, на начальном участке диаграммы деформирования, статический модуль упрочнения примерно на порядок ниже, чем нормальный модуль, определенный динамическими методами [2, 3, 4, 6]. Дефект модуля объясняется низким критическим напряжением мартенситной деформации, то есть, с самого начала нагружения стержня начинается мартенситная деформация внутри зерен. Второе отличие сплавов с мартенситной деформацией - низкий предел мартенситной текучести. При достижении напряжения предела мартенситной текучести, мартенситная деформация передается с одного зерна в другое [6]. Для никелида титана предел мартенситной текучести не превышает ~130 МПа [2, 6], а для других сплавов этого класса еще ниже [2]. Третья особенность сплава с мартенситной деформацией - проявление нетрадиционных поведений деформированных стержней, таких как псевдоупругость, эффект памяти формы, генерация реактивных усилий и т.д. [1, 2], что не наблюдается в сплавах с дислокационным механизмом формоизменения.

В неоднородно упруго-неупруго деформированном стержне (изгиб, кручение) при разгрузке, в результате перераспределения внутренних сил, в поперечном сечении формируется новое распределение внутренних (остаточных) напряжений. Это напряжение в разгруженном стержне, при комнатной температуре, находится в термодинамически неравновесном состоянии. Поэтому остаточные напряжения могут влиять на поведение изогнутого стержня на стадии нагрева, оказывая влияние на процессы формовосстановления и генерации реактивных сил. Таким образом, целью работы является получение простых расчетных формул зависимости распределения деформаций различной природы и остаточных напряжений в поперечном сечении деформируемого на чистый изгиб стержня из сплава с эффектом памяти формы, с использованием гипотез и теорем механики деформируемого твердого тела.

1. Растяжение. Как отмечено в [4], на начальном участке диаграммы растяжения, деформация не пропорциональна напряжению и не является полностью обратимой при изотермической разгрузке.

Для упрощения расчетов схематизируем диаграмму растяжения так, как показано на рис. 1, на которой будем рассматривать только два участка OA и AB. Величина наклона линии OA не удовлетворяет закону Гука [4], поэтому здесь коэффициент упрочнения участка обозначим через kE , где k – коэффициент относительного упрочнения на первом участке, E - модуль нормальной упругости. Коэффициент относительного упрочнения участка AB обозначим n . Здесь по аналогии с работой [1], записываем зависимости напряжений от деформаций для различных участков схематизированной диаграммы:

$$\text{для участка OA } 0 < \varepsilon < \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{kE}; \quad \sigma = kE\varepsilon; \quad (1)$$

$$\text{для участка AB } \varepsilon > \varepsilon_m, \quad \sigma = kE\varepsilon_m + nE(\varepsilon - \varepsilon_m) \quad (2)$$

Здесь предел мартенситной текучести никелида титана $\sigma_m=130$ МПа, $\varepsilon_m = 1,5$ % – деформация, соответствующая мартенситному пределу текучести, E - модуль упругости, определенный динамическим методом. Участок OA наклонен к оси абсцисс (ε) под углом $\alpha = \arctg(kE)$, а участок AB - под углом $\beta = \arctg(nE)$. На стадии разгрузки угол наклона зависимости $\sigma - \varepsilon$ составляет, с осью абсцисс, угол $\gamma = \arctg(mE)$ (при разгрузке также не выполняется закон Гука). По оси ε , участок OC характеризует величину остаточной деформации $\varepsilon_{ост}$, а участок CD - упруговозвращаемую деформацию $\varepsilon_{ув}$. Величины σ_m , ε_m , и коэффициенты k , n , m можно определить из диаграммы растяжения, при этом для никелида титана получается, что $n \ll k < m \ll 1$. Для сплавов с дислокационным механизмом формоизменения, в частности, для малоуглеродистой стали, соотношение между коэффициентами: $n \ll k = m = 1$. В поперечном сечении растягиваемого стержня все точки находятся в одинаково напряженно-деформированном состоянии.

2. Деформация в изогнутом стержне. В стержнях, испытанных на изгиб, напряженно-деформированное состояние в поперечных сечениях изменяется от точки к точке. Экспериментальные

диаграммы растяжения позволяют аналитически рассчитать распределения деформаций и напряжений в поперечном сечении чисто изогнутого стержня. В изогнутом стержне до точки В (рис. 1), осесимметричное поперечное сечение состоит из двух зон (рис. 2), в первой зоне деформируемые волокна имеют модуль упрочнения kE , а во второй зоне - nE . Высота от нейтральной плоскости y_m , разделяющая эти зоны, определяется по формуле

$$y_m = \frac{\varepsilon_m}{\kappa} \tag{3}$$

Здесь $\kappa = \frac{1}{\rho}$ - кривизна стержня, ρ - его радиус кривизны. Коэффициент жесткости сечения, при изгибе стержня, обозначим D . Этот коэффициент для никелида титана, без учета нарушения закона Гука и закона разгрузки, то есть $\kappa = m = l$, выведен в работе [1]. В данной работе при получении D учитывались экспериментально обоснованные особенности поведения никелида титана при его нагружении и разгрузке:

$$D = \frac{1}{J_0} [kJ_1 + (k - n)y_m S_2 + nJ_2], \tag{4}$$

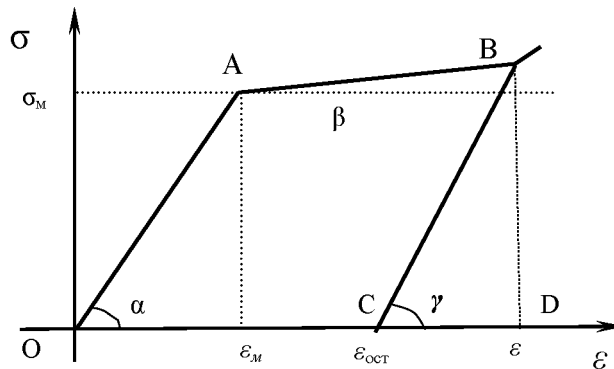


Рис. 1. Схематизация диаграммы растяжения никелида титана

где J_0 - момент инерции сечения «упруго» деформированного стержня (для никелида титана - гипотетический случай); J_1 - момент инерции зоны сечения с модулем деформационного упрочнения kE , находится интегрированием в интервале $[0, y_m]$, J_2 - момент инерции зоны сечения с модулем упрочнения nE , в этом случае предел интегрирования y изменяется в интервале $[y_m, h]$, S_2 - статический момент сечения с модулем деформационного упрочнения nE . Из (4) следует, что величина D определяется значением y_m , а величина y_m зависит от заданной кривизны стержня κ . Анализ формулы (4) показывает, что с ростом кривизны κ стержня

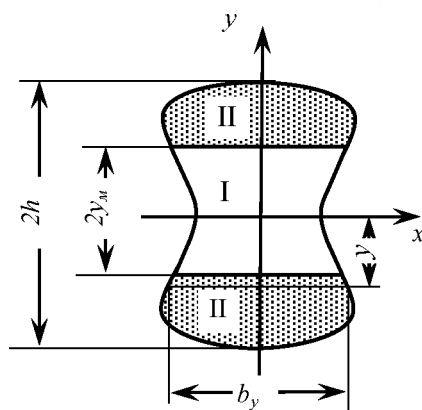


Рис. 2. Поперечное сечение изогнутого стержня (обозначение в тексте)

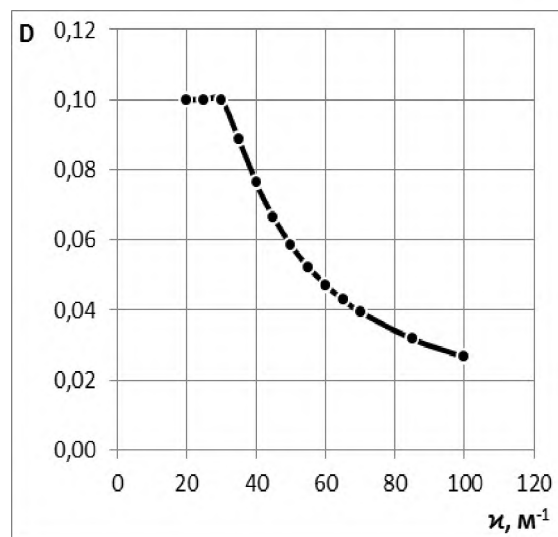


Рис. 3. Изменение D с ростом κ стержня

коэффициент D уменьшается (рис 3). Для никелида титана коэффициент D изменяется в интервале $[k, n]$. Здесь расчет D проведен для стержня с круглым поперечным сечением, диаметр которого равен 0,001 м.

В активно деформируемом на чистый изгиб стержне максимальное напряжение в любом сечении рабочей длины определяется по формуле (2).

Связь между остаточной кривизной и кривизной перед разгрузкой стержня в нашем случае имеет вид:

$$\text{если } \varepsilon < \varepsilon_m, \text{ то } \kappa_{\text{ост}} = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \kappa \quad (5)$$

$$\text{если } \varepsilon > \varepsilon_m, \text{ то } \kappa_{\text{ост}} = \left(1 - \frac{D}{m}\right) \kappa \quad (5a)$$

Напряжение в растянутом стержне перед его разгрузкой можно определить по величине ε_{yb} :

$$\sigma = mE\varepsilon_{yb}. \quad (6)$$

2.1. Считаем, что на внешних волокнах изогнутого стержня $\varepsilon \leq \varepsilon_m$. Тогда поперечное сечение стержня состоит только из одной зоны с модулем упрочнения kE . Рассмотрим распределение составляющих деформаций в поперечном сечении изогнутого стержня. В волокне с координатой y заданная деформация ε состоит из составляющих упруговозвращаемой ε_{yb} и остаточной $\varepsilon_{\text{ост}}$:

$$\varepsilon = \kappa y = \varepsilon_{yb} + \varepsilon_{\text{ост}}. \quad (7)$$

А остаточная деформация состоит из одной составляющей:

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \kappa_{\text{ост}} y = \varepsilon_n. \quad (8)$$

Здесь ε_n – неупругие деформации, это часть деформаций, накопленных в волокнах стержня на этапе нагружения, они сохраняются и после разгрузки. А при разгрузке изогнутого стержня упругие деформации в поперечном сечении полностью исчезают. Расчеты дали следующие результаты:

$$\varepsilon_{yb} = \frac{k}{m} \kappa y \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_n = \frac{m-k}{m} \kappa y \quad (10)$$

Отсюда следует, что в изогнутом стержне и ε_{yb} , и ε_n линейно растут с удалением от нейтральной линии. При изотермической разгрузке во всех продольных волокнах стержня ε_{yb} полностью возвращаются, а ε_n остаются неизменными.

2.2. Пусть на внешних волокнах изогнутого стержня $\varepsilon > \varepsilon_m$, тогда в поперечных сечениях образуются две зоны с разными деформационными упрочнениями (рис. 2). При активном нагружении стержня деформация ε изменяется линейно по высоте его сечения, причем она также состоит из двух составляющих, которые определяются по формуле (7). В поперечном сечении стержня в зоне I с увеличением кривизны стержня от нейтральной оси до волокна, где деформация равна ε_m , ε_n растет согласно (10) линейно. А в зоне II, в связи с низкой жесткостью, считаем, что ε_n растет также линейно, значительно быстрее с удалением от нейтральной оси. При этом неоднородное распределение ε_n в разгруженном стержне вызывает нелинейное распределение остаточных упругих деформаций $\varepsilon_{\text{ост.уп}}$ по высоте сечения стержня.

Рассмотрим распределение элементарных деформаций по высоте сечения активно деформируемого на изгиб стержня. Из (6) и (2) находим:

$$\varepsilon_{yb} = \kappa \left(\frac{k-n}{m} y_m + \frac{n}{m} y \right). \quad (11)$$

Для определения ε_n поступим следующим образом. Известно, что при разгрузке для каждого волокна зависимость $\sigma - \varepsilon$ линейная с «деформационным разупрочнением mE » независимо от того, на какой стадии деформирования, в пределах линии OAB (рис. 1), проведена разгрузка. Для каждого волокна изогнутого стержня выполняются формулы (2), (7), (8) и (11), из них находим:

$$\varepsilon_n = \kappa \left(\frac{m-n}{m} y - \frac{\kappa-n}{m} y_m \right). \quad (12)$$

Значения y изменяются в интервале $[y_m; r]$, y_m - высота волокна, где $\varepsilon = \varepsilon_m$. При разгрузке упругая часть деформаций частично возвращается. В волокнах изогнутого стержня ε_n не изменяется при разгрузке стержня. $\varepsilon_{\text{ост.уп}}$ деформация является частью деформаций ε_{yb} . В отличие от (10) здесь $\varepsilon_{\text{ост}}$ является сложной деформацией:

$$\varepsilon_{\text{ост}} = \varepsilon_{\text{ост.уп}} + \varepsilon_n = \kappa_{\text{ост}} y, \quad (13)$$

которая распределена линейно по высоте сечения, что свидетельствует о выполнении гипотезы плоских сечений. Из (12) и (13) находим $\varepsilon_{\text{ост.уп}}$:

$$\varepsilon_{\text{ост.уп}} = \varepsilon_{\text{ост}} - \varepsilon_n = \kappa_{\text{ост}} y - \varepsilon_n. \quad (14)$$

3. Эпюры деформаций по высоте сечения изогнутого стержня. Построим эпюры деформаций разной природы в поперечном сечении стержня из никелида титана. Расчет деформаций проведен для стержня с круглым поперечным сечением, диаметр которого $2r=0,001$ м, кривизна изогнутого стержня перед разгрузкой $\kappa=50$ м⁻¹. Из диаграммы растяжения определены коэффициенты: $k=0,1$; $n=0,0001$; $m=0,124$; при этом $y_m=0,3 \cdot 10^{-3}$ м, значение $D=0,05848$ вычислено по (4). Расчеты эпюр деформаций произведены по формулам (7) - (13) в программе Microsoft Excel.

На рис. 4 представлены эпюры деформаций по высоте растянутой части сечения изогнутого стержня: в нагруженном стержне: 1 – ε , 2 – ε_{yb} , 4 – ε_n ; и в разгруженном стержне: 3 – $\varepsilon_{\text{ост}}$; 5 – $\varepsilon_{\text{ост.уп}}$. Перелом эпюры элементарных деформаций происходит на высоте y_m . Анализ кривых эпюр деформаций в поперечном сечении стержня показывает, что ε_{yb} (кр 2) имеет аномально высокое значение не только в нагруженном состоянии, но и после его разгрузки (кр. 5). При разгрузке стержня во всех волокнах из-за неравномерного распределения ε_n по высоте сечения значительная часть деформации ε_{yb} возвращается, а не - возвратившуюся упругую деформацию обозначим как $\varepsilon_{\text{ост.уп}}$ (кр. 5). Отметим, что на внешних волокнах растянутой части сечения изогнутого и разгруженного стержня величины $\varepsilon_{\text{ост.уп}}$ имеют отрицательные значения.

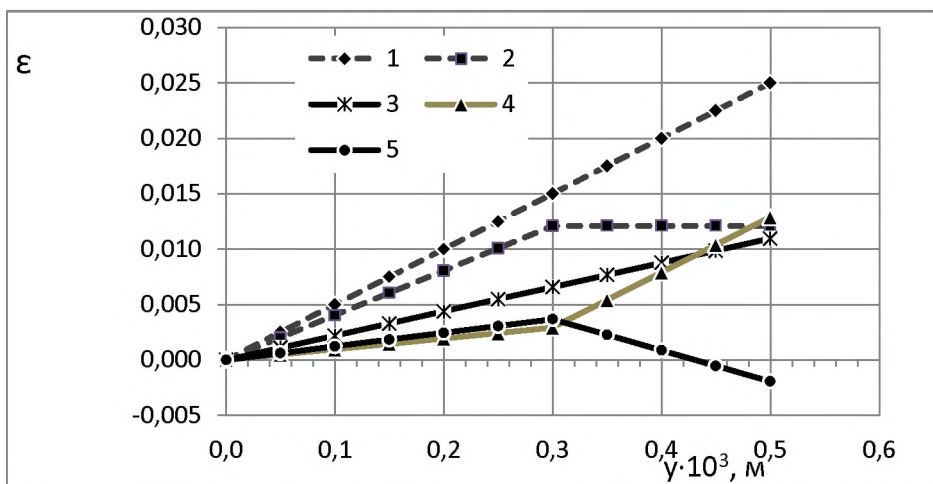


Рис. 4. Эпюры деформаций различной природы по сечению стержня (обозначение в тексте).

4. Эпюры остаточных напряжений в изогнутых стержнях из никелида титана.

Внутреннее остаточное напряжение в изогнутых и разгруженных стержнях прямо пропорционально остаточной упругой деформации. Поэтому в нашем случае очень просто определяются численные значения остаточных напряжений - умножением остаточных упругих деформаций на модуль разгрузки mE . На рис. 5 представлены изменения напряжений в нагруженном состоянии (кр. 1), и после его разгрузки (кр. 2) по высоте сечения. На рис. 6 представлены изменения остаточных напряжений на уровне y_m (кр. 1) и на внешних волокнах (кр. 2) в зависимости от заданной кривизны. Из рис. 6 следует, что при некоторой кривизне стержня остаточное напряжение и на уровне y_m , и на внешнем волокне стабилизируется.

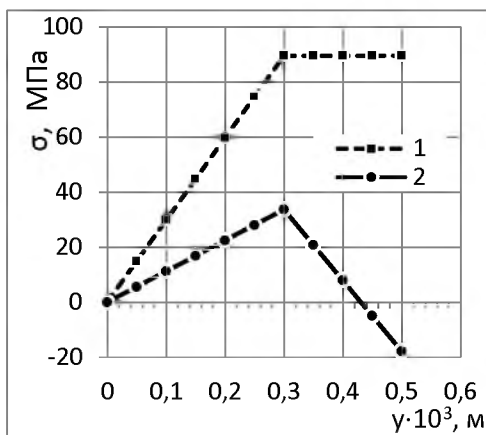


Рис. 5. Эпюра напряжений под нагрузкой (1) и после разгрузки (2) в сечении стержня.

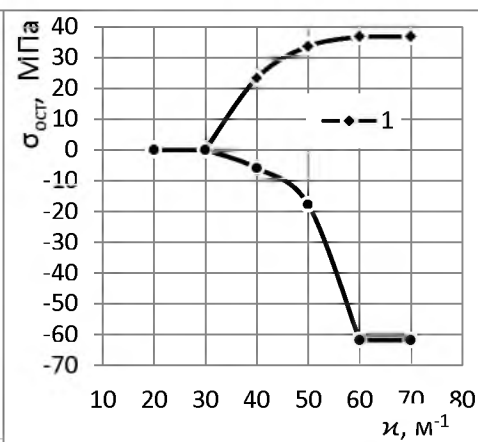


Рис. 6. Остаточные напряжения в сечении в зависимости от кривизны стержня: на границе раздела двух зон (1) и на внешних волокнах (2).

Таким образом, в нашем случае для расчета остаточных напряжений внутри изогнутого стержня нет необходимости вводить фиктивный разгружающий момент, как это сделано в большинстве монографий, например [1, 5].

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. Распределение элементарных деформаций по высоте изогнутого стержня зависит от жесткости зоны.
2. После изотермической разгрузки изогнутого стержня в его поперечном сечении остается остаточное напряжение, обусловленное неоднородным распределением неупругих деформаций по высоте

сечения. Характер распределения остаточных напряжений в сплавах с мартенситной деформацией несущественно отличается от таковых для сплавов с дислокационным механизмом.

3. Предложен новый метод расчета распределения деформаций различной природы и внутренних напряжений в поперечном сечении изогнутого стержня, когда он находится и под нагрузкой, и после разгрузки. Здесь для расчета внутренних остаточных напряжений отпала необходимость вводить фиктивный разгружающий момент.

Список литературы

1. Абдрахманов С.А., Ибрагимов Р.Ш., Джаналиев Н.Р. Деформация гибкой балки из материала с эффектом памяти формы. Бишкек. ИЦ "Техник", 2007. - 260 с.
2. Лихачев И.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Ленинград. Изд. ЛГУ. 1987. 216 с.
3. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы. Т.1. /Под ред. В.Э. Гюнтера. Томск: Изд-во МИЦ, 2011. 534 с.
4. Паскаль Ю.И., Ерофеев В.Я и др. Мартенситная деформация никелида титана. //Известия вузов. Физика. 1982. № 6. с.103 – 116.
5. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том 2. М. Наука. 1978. 616 с.
6. Хачин В.Н., Пушин В.Г., Кондратьев В.В. Никелид титана. Структура и свойства. –М. Наука.1992. -160 с.

References

1. Abdrakhmanov S.A., Ibragimov R.Sh., Dzhanaliev N.R. Deformation of the flexible beam from the material with shape memory effect. Bishkek. Publishing Center "Technique". 2007. -260 p.
2. Likhachev I.A., Kuzmin, S.L., Kamentsev Z.P. The shape memory effect. -Leningrad. Ed. LSU. 1987. 216 p.
3. Medical materials and implants with shape memory. V.1. / Ed. V.E. Gunther. Tomsk: Publishing House of the MIC, 2011. 534 p.
4. Pascal Y.I., Erofeev V.Y. et al. Martensitic deformation of NiTi. // Proceedings of the universities. Physics. 1982. № 6. p.103 - 116.
5. Filin A.P. Applied Mechanics of Solid Bodies. Volume 2. M. Science. 1978. 616 p.
6. Khachin V.N., Pushin V.G., Kondratiev V.V. Nickelid titanium. The structure and properties. - M. Nauka. 1992. -160 With.

УДК 663.631

ВЛИЯНИЕ УРОВНЯ ВОДЫ НА ВЕЛИЧИНУ ФИЛЬТРАЦИОННОГО РАСХОДА И НА ПРОЦЕСС ТАЯНИЯ ПОД ОСНОВАНИЕМ ВОДОЕМА

Джаманбаев М.Дж., Турсункулова З.С., д.ф.-м.н., профессор, старший преподаватель **Душенова У.Дж.**, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, jamanbaev@mail.ru

Цель статьи - исследование влияния уровня воды на величину фильтрационного расхода и на глубины таяния мерзлого грунта с помощью численно аналитического метода.

Ключевые слова: мерзлый грунт, коэффициент температуропроводности, коэффициент теплопроводности, метод конечных элементов, фронт таяния, процесс таяния под основанием водоема, фильтрационный расход, глубина таяния.

INFLUENCE OF THE WATER LEVEL FO SIZE AND FLOW FILTRATION MELTING PROCESS UNDER THE BASE POND

Jamanbaev M. Dj, Tursunkulova ZS, professor senior Lecturer senior Lecturer **Dushenova U. Dj**, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakova, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Mir ave. 66, jamanbaev@mail.ru

Purpose of the article - Study of the impact of the water level on the amount of filtration of flow rate and depth of thawing frozen ground, with the help of numerical analytical method.

Keywords: frozen ground, thermal diffusivity, thermal conductivity, finite element method, the front melting, melting process under the base of the reservoir, the filtration rate, the depth of melting.

Постановка задачи. Рассматривается процесс таяния мерзлого грунта под основанием водоема