References

1. Magnitsky N.A. Linear Volterra Integral Equations of the first and third kind // Journ. Vychisl. Matem. i matem. fiziki. 1979, t.19, №4, p.970-988.
2. Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. M.: Nauka, 1980, 286 p.
3. Denisov A.M. On the approximate solution of the Volterra equation of the first kind associated with an inverse problem for the heat equation //Vesti. Mosk. Univ-ta, Ser.15 Vychisl. matem. i kibern.- 1980. № 3, - p.49-52.
4. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind // Doklady AN SSSR, 1989, t-309, №5, p.1052-1055.
5. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the first kind // Doklady AN SSSR, - 1991, - t.317, № 1, - p.22-35.
6. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the third kind // Doklady RAN, - 2007, - t.415, № 1, p.14-17.

УДК 539.10

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЕЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Дуйшеналиев Т.Б., Аскарбеков Р.Н., Искендер Козубай, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, 720044, г.Бишкек, пр. Мира 66, e-mail: duishenaliev@mail.ru

В статье приводится пример расчета прямоугольной пластины. На основе нетрадиционного решения краевой задачи теории упругости произведен анализ напряженно-деформированного состояния пластины при значительных деформациях и перемещениях.

Ключевые слова: тензор Коши, тензор вращения, перемещение, деформированное состояние, кручение.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE ELASTIC PLATES CONFIGURATION AT CHANGE STRESS-STRAIN STATE

Duishenaliev T.B., Askarbekov R.N., Iskender Kozubai, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic, e-mail: duishenaliev@mail.ru

In this article provides an example of calculating a rectangular plate. On the basis of non-traditional solutions of the boundary value problem of elasticity theory analyzed the stress-strain state of the plate with large deformations and displacements.

Keywords: Cauchy tensor, the tensor of rotation, displacement, strain state, torsion.

В работе [1] приведена постановка статической краевой задачи в перемещениях и напряжениях. Установлен порядок составления уравнений равновесия в напряжениях, перемещениях, граничные условия, условия совместности деформаций в компонентах деформаций и напряжений. Предложен новый нетрадиционный подход к решению статической краевой задачи. Получено ее аналитическое решение. На основе этого решения можно установить напряженно-деформированное состояние многих конструкций и элементов.

Обратимся к конкретной задаче о равновесии прямоугольной пластины. В ней декларируется, что тело находится а равновесии в области V, заданной выражениями $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $0 \le x_2 \le \ell$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$ (рис.1).

Укажем внешние силы p_i на поверхности S.

На гранях, где $x_1 = \pm b/2$, $0 \le x_2 \le \ell$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$: $p_i(b/2, x_2, x_3) = 0$, $p_i(-b/2, x_2, x_3) = 0$. На гранях, где $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $0 \le x_2 \le \ell$, $x_3 = \pm h/2$: $p_i(x_1, x_2, h/2) = 0$, $p_i(x_1, x_2, -h/2) = 0$.

На левой торцевой грани, где $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $x_2 = 0$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$: $p_i(x_1, 0, x_3) = -\delta_{i2} c x_3$.

На правой торцевой грани, где $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $x_2 = \ell$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$: $p_i(x_1, \ell, x_3) = \delta_{i2} c x_3$.

Изгибающие моменты на левом и правом торцевых гранях соответственно равны:

$$m_1 = -\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c x_1^2 dx_1\, dx_2 = -cbh^3/12,\quad m_2 = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c x_1^2 dx_1\, dx_2 = cbh^3/12$$

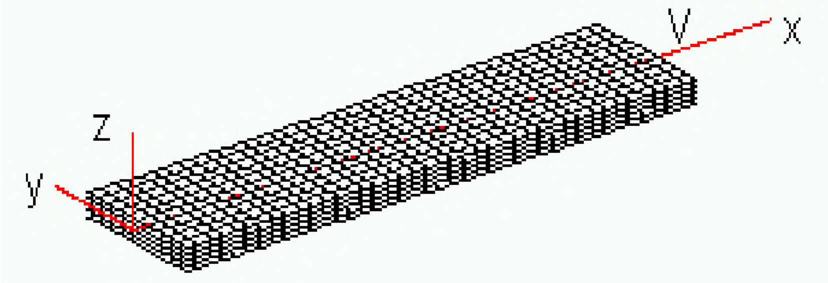

Рис. 1. Прямолинейная плита находится в равновесии.

Решение этой задачи приведено в [1] и оно имеет вид

$$\sigma_{ij}=\delta_{i2}\,\delta_{j2}cx_3 \qquad (1)$$

Этот тензор второго порядка имеет только один отличный от нуля элемент

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\,x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Из (1) определим компоненты линейного тензора

$$\varepsilon_{ij}=\frac{c}{E}\,x_3(-\nu(\delta_{i1}\,\delta_{j1}+\delta_{i3}\,\delta_{j3})+\delta_{i2}\,\delta_{j2}), \qquad (2)$$

которые приведем в развернутом виде:

$$\varepsilon_{11}=-\frac{c}{E}\,\nu x_3, \qquad \varepsilon_{23}=0,$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{c}{E}\,x_3, \qquad \varepsilon_{31}=0,$$

$$\varepsilon_{33}=-\frac{c}{E}\,\nu x_3, \qquad \varepsilon_{12}=0.$$

Этот тензор имеет три отличные от нуля элемента

$$(\varepsilon_{ij})=\frac{c}{E}\begin{bmatrix} -\nu x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu x_3 \end{bmatrix}.$$

Функции перемещений имеют вид

$$u_i(x)=u_i(x^0)+\omega_{ij}(x^0)\,(x_j-x_j^0)-$$

$$-\frac{c}{E}\,(\delta_{i1}\nu x_3(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}x_3(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}(x_2^2+\nu(x_3^2-x_1^2)$$

$$-x_2^0(2x_2-x_2^0)-\nu((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))/2), \qquad (3)$$

где x_i^0 - любая точка области V, $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ - компоненты перемещения и вращения в выбранной точке x0 области V.

Из (3) нетрудно определить и компоненты вращения в произвольной точке

$$\omega_{ij}(x)=\omega_{ij}(x^0)-\frac{c}{E}\,(\nu(x_1-x_1^0)(\delta_{1i}\delta_{3j}-\delta_{3i}\,\delta_{1j})-(x_2-x_2^0)(\delta_{2i}\,\delta_{3j}-\delta_{3i}\,\delta_{2j})) \qquad (4)$$

Этот антисимметричный тензор имеет вид следующей матрицы

$$(\omega_{ij})=\begin{bmatrix} 0 & \varpi_{12}(x^0) & \varpi_{13}(x^0)-\frac{c}{E}\nu(x_1-x_1^0) \\ \varpi_{21}(x^0) & 0 & \varpi_{23}(x^0)+\frac{c}{E}(x_2-x_2^0) \\ \varpi_{31}(x^0)+\frac{c}{E}\nu(x_1-x_1^0) & \varpi_{32}(x^0)-\frac{c}{E}(x_2-x_2^0) & 0 \end{bmatrix}$$

Наконец с помощью формул (1), (2) можно установить и конфигурацию (объем V_0, поверхность S_0) начального состояния тела.

Обратимся к вопросу об уровнях деформации. Как сказано выше, величины деформации являются прерогативой только массовых сил и условий на поверхности тела. В качестве произвольной точки x^0 выберем центр поперечного сечения

$$x_2=\frac{1}{2}1\text{, т.е. точку } x_1^0=0,\ x_2^0=\frac{1}{2},\ x_3^0=0. \qquad (5)$$

Далее, пусть произвольно задаваемые величины - компонент перемещения и вращения в этой точке равны нулю, что не ущемляет общность, ибо они нисколько не сказываются на величинах деформации

$$u_i(x^0)=0,\ \omega_{ij}(x^0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В данной задаче массовые силы отсутствуют, следовательно, в ней

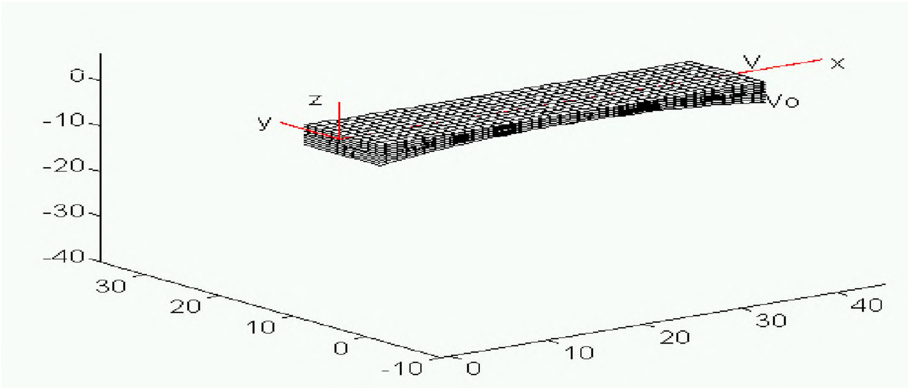

Рис.2. V_0- сравниваемое, V- конечное состояния плиты.

уровень деформации зависит только от величин внешних сил, приложенных на поверхность тела.

Пусть внешние силы малы, c=-50. Подставляя (5), (6), в (3) и используя выражение $z_i=x_i-u_i(x)$, $x_i\in V$ (6), можно установить начальную конфигурацию тела (рис.2)

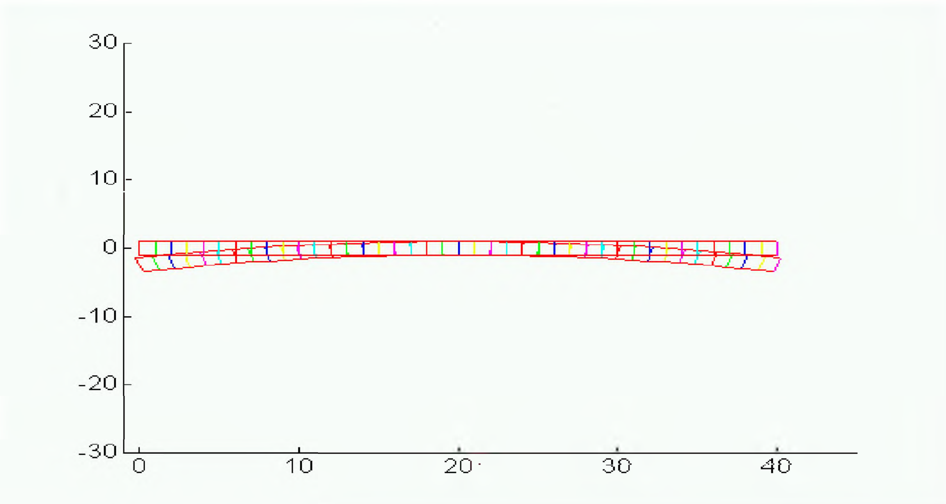

Рис.3. Очертания сечения $x_1=0$ в сравниваемом (криволинейное) и конечном (прямолинейное) состояниях.

На рисунках 3 и 4 показаны начальные очертания продольных и поперечных сечений плиты.

Как видно из (2), элементы тензора ε_{ij} зависят только от координаты x_3. Они достигают наибольших величин в точках верхней и нижней граней плиты. На верхней грани этот тензор имеет вид

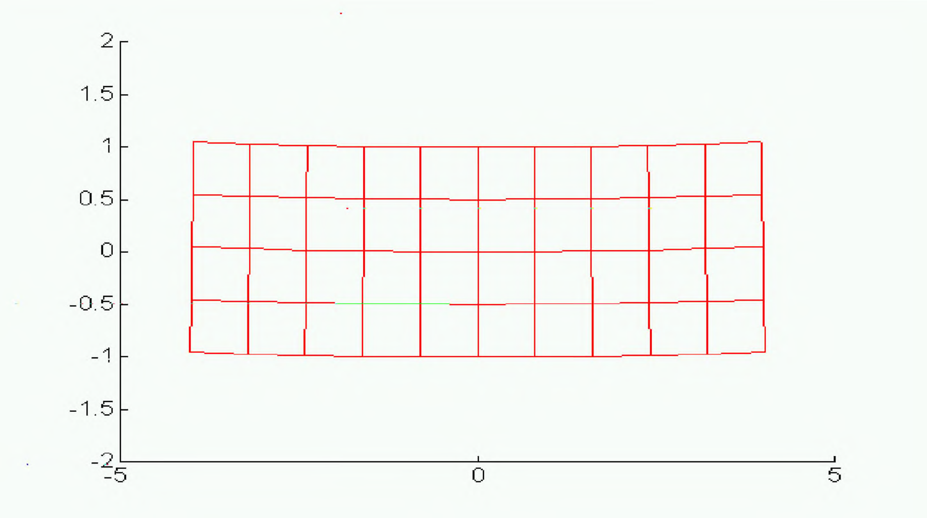

Рис.4. Очертание сечений **x_2=const** в сравниваемом состоянии.

$$\varepsilon_{ij}(x_1,x_2,2) = \begin{bmatrix} .0234 & 0 & 0 \\ 0 & -.0483 & 0 \\ 0 & 0 & .0234 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Тензор вращения, как видно из (4), зависит от координат x_1, x_2 и x_1^0, x_2^0. Элементы этого антисимметричного тензора достигают наибольших значений в угловых точках правой и левой торцевых граней. К примеру, в точке (4.40.2), находящейся в верхнем углу правой грани плиты

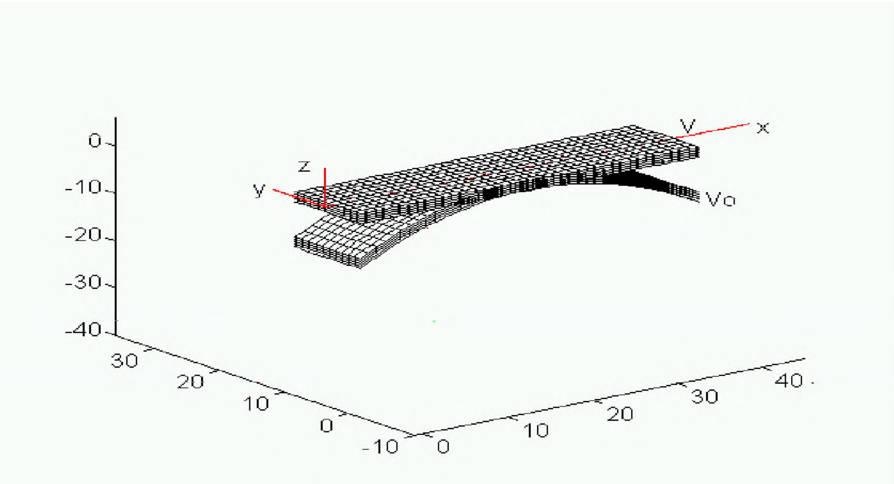

Рис. 5. Сравниваемое (V_0) и конечное (V) состояния плиты.

$$\omega_{ij}(4,40,2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0234 \\ 0 & 0 & -0.242 \\ -0.0234 & 0.242 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Увеличим теперь величины приложенных к поверхности плиты внешних усилий. Пусть

$$c=-200. \tag{9}$$

Здесь нельзя упускать из виду то обстоятельство, что область определения уравнений статической краевой задачи не зависит от величин приложенных внешних усилий. В рассматриваемой задаче определенная область V неизменяема (аксиома равновесия). Величины внешних усилий, как сказано выше, определяют степень напряженности.

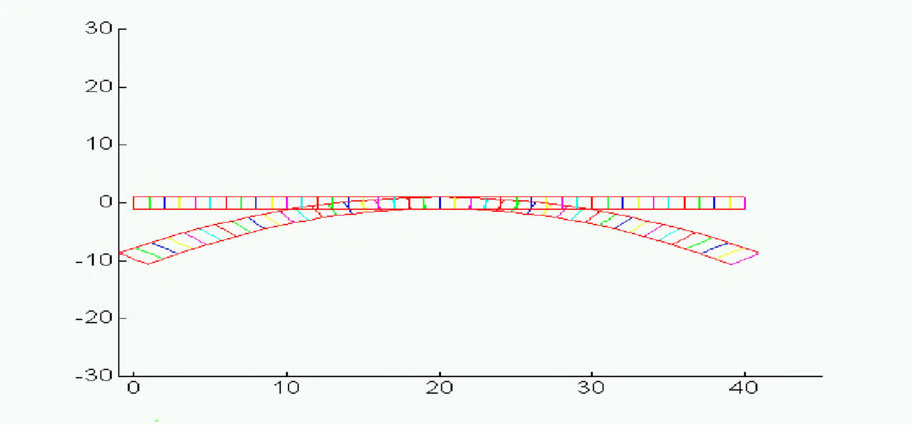

Рис. 6. Сравниваемое (криволинейное) и конечное (прямолинейное) очертания сечения $x_1 = 0$.

Подставляя (5), (6), (10) в (5), находим следующее поле перемещений

$$u_i(x_1,x_2,x_3)= \frac{200}{E}(\delta_{i1}\, \nu\, x_3x_1 - \delta_{i2}\, x_3\, (x_2 - \frac{1}{2}) +$$

$$+ \delta_{i3}(x_2^2 + \nu\, (x_3^2 - x_1^2) - \frac{1}{2}\,(2x_2 - \frac{1}{2})) / 2). \tag{10}$$

Это поле определяет напряжения

$$\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3),$$

которые удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности

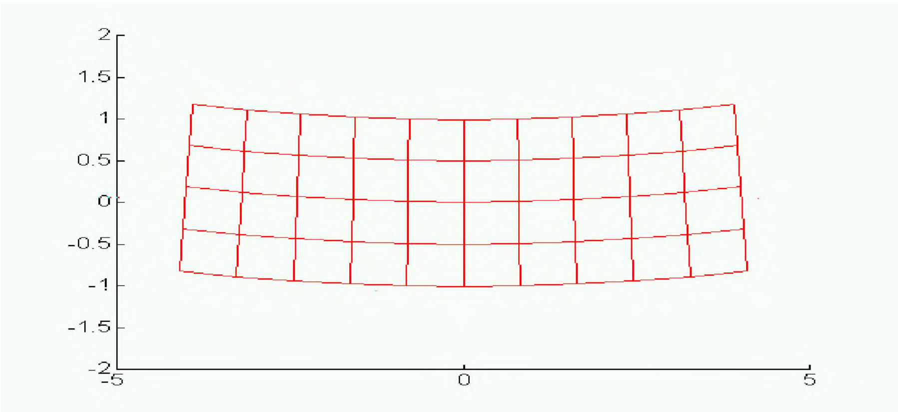

Рис.7. Очертание сечений $\mathbf{x_2}$**=const** в сравниваемом состоянии.

деформации в области V и граничным условиям на границе S. Здесь нет обычного координатного разночтения: в функциях перемещений $u_i(x_1,x_2,x_3)$, напряжений $\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$, также как и во всех предыдущих выражениях, только координаты конечного состояния. На рис.6 приведено положение сравниваемого состояния плиты, которое обозначено через V_0. Надо отметить, что в области V_0 нет никаких напряжений, а на ее поверхности S_0 - никаких внешних усилий.

Приведем наибольшие значения ε_{ij}, ω_{ij}. Выше были указаны те точки тела, где это имеет место.

$$\varepsilon_{ij}(x_1,x_2,2) = \begin{bmatrix} .0936 & 0 & 0 \\ 0 & -.1932 & 0 \\ 0 & 0 & .0936 \end{bmatrix},$$

$$\omega_{ij}(4,40,2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .0936 \\ 0 & 0 & -.968 \\ -.0936 & .968 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь мы видим, что линейный тензор ε_{ij} является полной характеристикой деформированного состояния. Его компоненты (2) могут быть бесконечно малыми ($c \Rightarrow 0$), малыми ($c=-50$), большими ($c=-200$). В любом из этих случаев этот тензор определяет поле перемещения (формулы Чезаро), из которого можно найти все, что касается деформированного состояния.

Выбрав любое направление n_i в произвольной точке области V, можно определить функции:

-относительного удлинения в направлении n_i

$$\varepsilon(x_1,x_2,x_3)=\varepsilon_{ij}n_in_j,$$

-относительного сдвига на площадке, перпендикулярной к выбранному направлению

$$\gamma(x_1,x_2,x_3)=(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}n_in_j-\varepsilon^2)^{1/2},$$

-компонент вращения

$$(\omega_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & \varpi_{12}(x^0) & \varpi_{13}(x^0)-\frac{c}{E}\nu(x_1-x_1^0) \\ \varpi_{21}(x^0) & 0 & \varpi_{23}(x^0)+\frac{c}{E}(x_2-x_2^0) \\ \varpi_{31}(x^0)+\frac{c}{E}\nu(x_1-x_1^0) & \varpi_{32}(x^0)-\frac{c}{E}(x_2-x_2^0) & 0 \end{bmatrix},$$

позволяющих найти перемещения от вращения окрестности вокруг ротора поля в этой точке,

-разности квадратов длин после и до деформации

$$dx^2-dz^2=(2\varepsilon-(\varepsilon^2+\gamma^2)-(2\omega_{kj}\varepsilon_{ki}+\omega_{ki}\omega_{kj})n_in_j)dx^2,$$

-компонент тензора Альманси

$$a_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}$$

и так далее.

Наконец, можно построить конфигурацию тела в сравниваемом состоянии. Координаты z_i этого состояния определяются по формулам

$$z_i=x_i-u_i(x)=x_i-(u_i(x^0)+\omega_{ij}(x^0)(x_j-x_j^0)-$$
$$-\frac{c}{E}(\delta_{i1}\nu x_3(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}x_3(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}(x_2^2+\nu(x_3^2-x_1^2)-$$
$$-x_2^0(2x_2-x_2^0)-\nu((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))/2)),\ x_i\in V.$$

Для определения координат поверхности начальной конфигурации тела в предыдущее выражение надо вносить $x_i\in S$.

Список литературы

1. Жакыпбек А.Б., Дуйшеналиев Т.Б. Новое воззрение на некоторые основы механики деформируемого тела. - Бишкек, 1999, 236 с.

References

1. Zhakypbek A.B, T.B. Duyshenaliev. A new view on some of the basics mechanics of body deformation. - Bishkek, 1999, 236 p.

УДК620.10

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЯХ ИЗ СПЛАВА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Ибрагимов Рахманберди Шабданович, к.т.н.,доцент, КНУ им. Ж. Баласагына, Кыргызстан, 720033, г.Бишкек, ул. Фрунзе, 547, e-mail: rahman.ibragimov.sh@gmail.com

Целью работы является получение простых расчетных формул зависимости распределения деформаций различной природы и остаточных напряжений в поперечном сечении деформируемого на чистый изгиб стержня из сплава с эффектом памяти формы, с использованием гипотез и теорем механики деформируемого твердого тела. Проанализирована природа появления остаточных напряжений в изогнутых стержнях из никелида титана. Характер распределения остаточных напряжений в сплавах с термоупругим мартенситным механизмом не существенно отличается от таковых для сплавов с дислокационным механизмом.

Ключевые слова: эффект памяти формы; схематизация диаграммы растяжения; испытания на изгиб; мартенситная деформация; остаточная неупругая деформация; остаточная упругая деформация; остаточное напряжение.