УДК 517.968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА НА ОСИ

Асанов Авыт, д.ф.-м.н., профессор, КТУ «Манас», Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира 56, e-mail: avyt.asanov@mail.ru

Камбарова Айсалкын Даминовна, преподаватель, ОшГУ, Кыргызстан, 723500, г. Ош, ул. Курманжан Датка 331, e-mail: aysalkun.kambarova@mail.ru

Целью данной статьи является нахождение достаточных условий единственности решения и построение регуляризирующего оператора по Лаврентьеву М.М. для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода на оси. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода применяются в различных прикладных задачах, в частности, в задачах сейсмологии. Чтобы выполнить поставленную цель, авторы сначала построили регуляризирующие операторы по Лаврентьеву М.М. для решения данного интегрального уравнения первого рода. Затем доказали теорему единственности. При исследовании данной задачи авторы применили метод, предложенный Иманалиевым М.И. и Асановым А. Особенностью этого метода является то, что от ядра не требуется гладкость ядра данного интегрального уравнения. Кроме того, не требуется гладкость от решения данного линейного интегрального уравнения первого рода. Показан конкретный пример, иллюстрирующий результаты данной работы. Этот пример решен на основе предложенного метода.

Ключевые слова: линейные, интегральные, уравнения Вольтерра, первого рода, регуляризация по Лаврентьеву М.М., единственность, пример.

REGULARIZATION AND UNIQUENESS SOLUTION OF THE LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS ON THE FIRST KIND ON THE AXIS

Asanov A., PhD (Mathematics), professor, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KTMU, e-mail:avyt.asanov@mail.ru

Kambarova A. D., lecturer, Kyrgyzstan, 723500, c.Osh, OshSU, e-mail: aysalkun.kambarova@mail.ru

The purpose of this article is to find sufficient conditions for the uniqueness of the solution and the construction of a regularizing operator M.M. Lavrentiev for linear Volterra integral equations of the first kind on the axis. Volterra integral equations of the first kind are used in various applications, in particular in the problems of seismology. To complete the first objective of the authors built a regularizing operator for M.M. Lavrentiev to solve this integral equation of the first kind. Then prove a uniqueness theorem. In the study of this problem, the authors applied the method proposed by M. Imanaliev and A. Asanov feature of this method is that the nucleus is not required smoothness of the kernel of the integral equation. Also, do not require smoothness of solutions of linear integral equations of the first kind. Shows a specific example illustrating the results of this work. This example is solved on the basis of the proposed method.

Keywords: linear integral equations of Volterra, the first kind MM Lavrentiev regularization, the only example.

Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = f(t), \qquad t\epsilon(-\infty,+\infty) \tag{1}$$

где $a(t)$ и $f(t)$ – заданные функции, $u(t)$ –неизвестная функция.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода исследованы в работах [1-6]. В частности, в работе [4] доказаны теоремы единственности и построен регуляризирующий оператор для систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на отрезке. В данной работе построен регуляризирующий оператор и доказана теорема единственности для решения уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s)v(s,\varepsilon)ds = f(t) + \varepsilon u_0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр ,$u_0 = \lim_{t\to-\infty} u(t), u(t)$ –решение уравнения (1).

Введем обозначения:

1) Обозначим через $C(-\infty,+\infty)$ пространство всех функций $u(t)$ −непрерывных и ограниченных на $(-\infty,+\infty)$, $\|\cdot\|_C$ − норма в $C(-\infty,+\infty)$, т.е. для любого $u(t)\epsilon C(-\infty,+\infty)$

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t\epsilon(-\infty,\infty)} |u(t)|.$$

2) Через $L_1(-\infty,+\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|dt < \infty.$$

3) Обозначим через $C_0(-\infty,+\infty)$ −пространство всех функций $u(t)\epsilon C(-\infty,+\infty)$, таких, что $\lim_{t\to-\infty} u(t),= u_0\epsilon R$.

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t\epsilon(-\infty,\infty)} |u(t)|.$$

4) Через $L_{1,loc}(-\infty,+\infty)$ обозначим пространство всех функций $u(t)$, таких, что для любого $T\epsilon(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{T} |u(t)|dt < \infty.$$

5) Обозначим через $C_0^{\gamma}(-\infty,+\infty), 0<\gamma\le 1$, пространство всех функций $u(t)\epsilon C_0(-\infty,+\infty)$, таких, что для любых $t_1,t_2\epsilon(-\infty,+\infty)$

$$|u(t_1)-u(t_2)| \le M_0\left|\int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds\right|^{\gamma},$$

где положительная постоянная M_0 не зависит от t_1,t_2, но зависит только от $u(t), K(t,t)\epsilon\ L_{1,loc}(-\infty,+\infty)$ и $K(t,t)\ge 0$ при всех t ϵ $(-\infty,+\infty)$.

Предположим выполнение следующих условий:

a) $K(t,t)\ge 0$ при всех t ϵ $(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{t} \| |K(t,s)|ds\epsilon C(-\infty,+\infty), K(t,t)\epsilon L_{1,loc}(-\infty;+\infty).$$

b) Для любых $t_1,t_2\epsilon(-\infty;+\infty)$,

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)| \le l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2} K(s,s)ds\right|,$$

где $0\le l(t)$ при всех t ϵ $(-\infty,+\infty)$, $l(t)\epsilon L_1(-\infty;+\infty)$.

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon). \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), имеем $\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t} K(s,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + [u_0 - u(t)]$.

Отсюда, используя резольвенту $R(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$ ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)\right]$, имеем

$$\xi(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}[K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)ds + [u_0-u(t)] +$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\tau}[K(\tau,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)dsd\tau -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{t}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u_0-u(\tau)]d\tau. \qquad (4)$$

Применяя формулу Дирихле, уравнение (4) запишем в виде

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{t} H(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)ds + \varphi(t,\varepsilon), t\epsilon(-\infty,+\infty), \qquad (5)$$

где

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)] +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(\tau,s)-K(s,s)]\,d\tau,\qquad (t,s)\epsilon G, \tag{6}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)=u_0-u(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u_0-u(\tau)]d\tau. \tag{7}$$

$G=\{(t,s):-\infty<s\le t<+\infty\}$, $t\epsilon(-\infty,+\infty)$.

Теорема. Пусть выполняются условия а), б) и $u(t)\epsilon C_0^\gamma(-\infty,+\infty)$, где $u(t)-$ решение уравнения (1). Тогда решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ стремится к решению $u(t)$уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C\le M_2\varepsilon^\gamma, \tag{8}$$

где $M_2=M_1\exp\{\int_{-\infty}^{\infty} l(s)ds\}, \forall t_1,t_2\epsilon(-\infty;+\infty)$,

$$|u(t_1)-u(t_2)|\le M_0\left|\int_{t_1}^{t_2}K(s,s)ds\right|^\gamma, M_1=\sup_{\nu\ge 0}(e^{-\nu}\nu^\gamma)+\int_0^\infty e^{-\nu\gamma}\nu^\gamma d\nu.$$

Доказательство. Учитывая формулы

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}d\tau=1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

из (6) и (7) получим

$$H(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[K(t,s)-K(\tau,s)]d\tau, \tag{9}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)=-[u(t)-u_0]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(\tau)]\,d\tau \tag{10}$$

Учитывая условие б), из (9) имеем

$$|H(t,s,\varepsilon)|\le l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K(\tau,\tau)d\tau]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}+\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\, l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]d\tau$$

$$=\ l(s)[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K(\tau,\tau)d\tau]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}+l(s)\int\limits_s^t[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]d_\tau[e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}]$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим

$$|H(t,s,\varepsilon)|\le l(s)\int_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}K(\tau,\tau)d\tau=l(s)\left[1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}\right].$$

Из последнего неравенства имеем

$$|H(t,s,\varepsilon)|\le l(s),(t,s)\epsilon G=\{(t,s):-\infty<s\le t<+\infty\}. \tag{11}$$

В силу $u(t)\epsilon C_0^\gamma(-\infty,+\infty)$, из (10) имеем

$$|\varphi(t,\varepsilon)|\le M_0\left[\int\limits_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau\right]^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

$$+\,M_0\int\limits_{-\infty}^t\frac{1}{\varepsilon}K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\left[\int\limits_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\right]^\gamma d\tau$$

$$=M_0\varepsilon^\gamma\left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau\right]^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^t K(\tau,\tau)d\tau}$$

$$-M_0\varepsilon^\gamma\int\limits_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau\right]^\gamma d_\tau[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t K(\tau,\tau)d\tau]\le$$

$$\le M_0\varepsilon^\gamma\{\sup_{\nu\ge 0}(e^{-\nu}\nu^\gamma)+\int_0^\infty e^{-\nu}\nu^\gamma d\nu\}.$$

Отсюда получим

$$\|\varphi(t,\varepsilon)\|_C \le M_0M_1\varepsilon^\gamma. \qquad (12)$$

Учитывая (11) и (12), из (5) получим

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{-\infty}^{t} l(s)|\xi(s,\varepsilon)|ds + M_0M_1\varepsilon^\gamma, \quad t\epsilon(-\infty,+\infty). \qquad (13)$$

Применяя формулу Гронуолла-Белмана, из (13) имеем (8). Теорема доказана.

Следствие. Пусть выполняются условия а), б) и $K(t,t) > 0$ почти при всех $t\epsilon(-\infty,+\infty)$. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве$C_0^\gamma(-\infty,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in C_0^\gamma(-\infty,+\infty)$ является решением уравнения (1) при $f(t) = 0$, $t\epsilon(-\infty,+\infty)$. В этом случае сначала в силу условий а), б) доказываем, что $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$. В самом деле

$$\int_{-\infty}^{t} K(t,s)u(s)ds = 0, \qquad t\epsilon(-\infty,+\infty).$$

Отсюда имеем

$$\int_{-\infty}^{t} K(s,s)u(s)ds = -\int_{-\infty}^{t}[K(t,s) - K(s,s)]u(s)ds, \quad t\epsilon(-\infty,+\infty). \qquad (14)$$

В силу условий а)иb),из (14) имеем

$$|u(t^*)|\int_{-\infty}^{t} K(s,s)ds = \left|\int_{-\infty}^{t} K(s,s)u(s)ds\right| \le \int_{-\infty}^{t} l(s)\left[\int_{s}^{t} K(\tau,\tau)d\tau\right]ds\ \|u(t)\|_C,$$

где $-\infty < t^* \le t < \infty$.

Из последнего неравенства получим

$$|u(t^*)| \le \|u(t)\|_C \int_{-\infty}^{t} l(s)ds, -\infty < t^* \le t < +\infty$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t\to-\infty} |\,u(t^*)\,| = 0.$$

Далее в силу оценки (8) доказывается u(t)=0 при всех $t\epsilon(-\infty,+\infty)$.

Пример. Рассмотрим уравнения (1) и (2) при

$$K(t,s)=\frac{1}{1+s^2}\left[\frac{|s|}{1+s^2} + \int_s^t \frac{|s|}{(1+s^2)^2}ds\right], (t,s) \in G. \qquad (15)$$

В этом случае условия теоремы выполняются при

$$K(s,s)=\frac{|s|}{(1+s^2)^2}, l(s) = \frac{1}{1+s^2}, s\epsilon(-\infty,+\infty).$$

В самом деле, в силу (15) для любых $t_1, t_2\epsilon(-\infty,+\infty)$ имеем

$$K(t_1,s) - K(t_2,s) = \frac{1}{1+s^2}\int_{t_2}^{t_1} \frac{|s|}{(1+s^2)^2}ds,$$

Отсюда

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| \le l(s)\left|\int_{t_1}^{t_2} K(s,s)\,ds\right|.$$

Поэтому утверждения теоремы справедливы для уравнения (1) и (2), когда K(t,s) определяется по формуле (15).

Выводы. Полученный результат является важным вкладом в теорию интегральных уравнений и может быть применен для приближенного решения различных прикладных задач, в частности задач сейсмологии.

Список литературы

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода //Вычисл. матем. и матем. физики,- 1979, Т.19, № 4 – С.970-988.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Р. Некорректные задачи математической физики и анализ.- М: Наука, 1980. С.286.
3. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности //Вести. Моск. унив-та, Сер.15 Вычисл. матем. и киберн.- 1980. № 3, - С.49-52.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл. АН СССР,- 1989, - Т.309, № 5,- С.1052-1055.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода //Докл. АН СССР,- 1991, - Т.317, № 1,- С.22-35.
6. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода //Докл. РАН,- 2007, - т.415, № 1, с.14-17.

References

1. Magnitsky N.A. Linear Volterra Integral Equations of the first and third kind // Journ. Vychisl. Matem. i matem. fiziki. 1979, t.19, №4, p.970-988.
2. Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. M.: Nauka, 1980, 286 p.
3. Denisov A.M. On the approximate solution of the Volterra equation of the first kind associated with an inverse problem for the heat equation //Vesti. Mosk. Univ-ta, Ser.15 Vychisl. matem. i kibern.- 1980. № 3, - p.49-52.
4. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the first kind // Doklady AN SSSR, 1989, t-309, №5, p.1052-1055.
5. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the first kind // Doklady AN SSSR, - 1991, - t.317, № 1, - p.22-35.
6. Imanaliev M.I., Asanov A. On solutions of systems of nonlinear Volterra integral equations of the third kind // Doklady RAN, - 2007, - t.415, № 1, p.14-17.

УДК 539.10

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЕЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Дуйшеналиев Т.Б., Аскарбеков Р.Н., Искендер Козубай, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, 720044, г.Бишкек, пр. Мира 66, e-mail: duishenaliev@mail.ru

В статье приводится пример расчета прямоугольной пластины. На основе нетрадиционного решения краевой задачи теории упругости произведен анализ напряженно-деформированного состояния пластины при значительных деформациях и перемещениях.

Ключевые слова: тензор Коши, тензор вращения, перемещение, деформированное состояние, кручение.

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE ELASTIC PLATES CONFIGURATION AT CHANGE STRESS-STRAIN STATE

Duishenaliev T.B., Askarbekov R.N., Iskender Kozubai, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic, e-mail: duishenaliev@mail.ru

In this article provides an example of calculating a rectangular plate. On the basis of non-traditional solutions of the boundary value problem of elasticity theory analyzed the stress-strain state of the plate with large deformations and displacements.

Keywords: Cauchy tensor, the tensor of rotation, displacement, strain state, torsion.

В работе [1] приведена постановка статической краевой задачи в перемещениях и напряжениях. Установлен порядок составления уравнений равновесия в напряжениях, перемещениях, граничные условия, условия совместности деформаций в компонентах деформаций и напряжений. Предложен новый нетрадиционный подход к решению статической краевой задачи. Получено ее аналитическое решение. На основе этого решения можно установить напряженно-деформированное состояние многих конструкций и элементов.

Обратимся к конкретной задаче о равновесии прямоугольной пластины. В ней декларируется, что тело находится а равновесии в области V, заданной выражениями $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $0 \le x_2 \le \ell$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$ (рис.1).

Укажем внешние силы p_i на поверхности S.

На гранях, где $x_1 = \pm b/2$, $0 \le x_2 \le \ell$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$: $p_i(b/2, x_2, x_3) = 0$, $p_i(-b/2, x_2, x_3) = 0$. На гранях, где $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $0 \le x_2 \le \ell$, $x_3 = \pm h/2$: $p_i(x_1, x_2, h/2) = 0$, $p_i(x_1, x_2, -h/2) = 0$.

На левой торцевой грани, где $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $x_2 = 0$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$: $p_i(x_1, 0, x_3) = -\delta_{i2} c x_3$.

На правой торцевой грани, где $-b/2 \le x_1 \le b/2$, $x_2 = \ell$, $-h/2 \le x_3 \le h/2$: $p_i(x_1, \ell, x_3) = \delta_{i2} c x_3$.

Изгибающие моменты на левом и правом торцевых гранях соответственно равны:

$$m_1 = -\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c x_1^2 dx_1\, dx_2 = -cbh^3/12, \quad m_2 = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} c x_1^2 dx_1\, dx_2 = cbh^3/12$$