

Список литературы

1. Лихачев В.А. и др. Эффект памяти формы. – Л.: Из-во ЛГУ, 1987, 216с.
2. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы //Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47-53.
3. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. //Бишкек, «Илим», 1991, 116с.

References

1. V.A. Likhachev and others. The shape memory effect. - L.: publishing house LSU, Leningrad, 1987, 216p.
2. A.A. Movchan. Micromechanical constitutive equations for shape memory alloys. //Problems of mechanical engineering and reliability of the machines. 1994. №6. P. 47-53.
3. Abdrakhmanov S.A. Deformation of shape memory materials with thermo- exposure. //Bishkek "Ilim", 1991, 116p.

УДК 539.47

О НЕУПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ФАСОННОЙ ПРУЖИНЫ

С.А. Абдрахманов, Абдыжапар Асыл, Ж.Ж. Доталиева, А.А. Джанузакова, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, e-mail: sasv1b@mail.ru

Цель статьи – получение зависимости крутящего момента от относительного угла закручивания для сплошного вала при его деформировании в неупругой области. В работе рассматривается проблемный вопрос определения осевых перемещений любых фасонных пружин в неупругой области её деформирования.

Ключевые слова: эффект памяти формы, фасонная пружина, осевые перемещения, угол закручивания, крутящий момент.

ABOUT INELASTIC DEFORMATION OF SHAPED SPRINGS

S.A. Abdrakhmanov, Abdyjapar Asyl, Zh.Zh. Dotalieva, A.A. Djanuzakova, **S.A. Abdrakhmanov, Zh.Zh. Dotalieva, M.B. Dzholdoshbaeva, A.A. Djanuzakova**, Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Mir ave. 66, e-mail: sasv1b@mail.ru

The purpose of the article - receiving torque depending on the relative angle of twist for a solid shaft when it is deformed in the inelastic region. The paper deals with the problematic issue of determining the axial displacement of any shaped springs in the inelastic region of its deformation.

Keywords: shape memory effect, shaped spring, axial displacement, angle of twist, torque.

Как правило, пружины работают в упругой области деформирования. Но с появлением материалов с эффектом памяти формы актуальным становится вопрос работы пружин в неупругой области.

Рассмотрим вопрос определения осевых перемещений пружин с малым шагом подъёма, работающих на растяжение (сжатие). Как известно [1], при этом витки пружины, в основном, испытывают кручение. Пусть элемент пружины длиной ds закручен на угол $d\varphi$. Тогда из геометрических соображений для осевого перемещения пружины $d\lambda$ можно записать следующее выражение:

$$d\lambda = R d\varphi. \quad (1)$$

Здесь $R = R(s)$ – радиус пружины.

Учитывая, что относительный угол закручивания $\theta = d\varphi/ds$, формулу (1) запишем в виде:

$$d\lambda = R \theta ds. \quad (2)$$

При известной зависимости относительного угла закручивания от крутящего момента путём интегрирования выражения (2) можно получить величину осевого перемещения пружины как в упругой, так и в

неупругой области её деформирования. Здесь мы остановимся на вопросе определения осевого перемещения пружины в случае её деформирования в неупругой области. Такие исследования необходимы, в частности, если пружина изготовлена из материала, обладающего эффектом памяти формы. Для изучения процессов формовосстановления и генерации реактивных усилий такая пружина должна деформироваться за предел упругости с возможностью получения остаточных деформаций при разгрузке.

В нашей работе [2] получена зависимость крутящего момента от относительного угла закручивания для сплошного вала при его деформировании в неупругой области. При этом принято, что материал обладает линейным упрочнением $n * G$. Здесь G – модуль сдвига, а коэффициент n – параметр, характеризующий упрочнение материала. Она меняется от нуля (диаграмма Прандтля) до единицы (диаграмма абсолютно упругого тела), т.е. $0 \leq n \leq 1$.

В безразмерном виде эта зависимость записывается в следующем виде:

$$\bar{M} = n\bar{\theta} + \frac{1-n}{3} \left(4 - \frac{1}{\bar{\theta}^3}\right). \quad (\bar{\theta} \geq 1) \quad (3)$$

Здесь безразмерный крутящий момент $\bar{M}$ и относительный угол закручивания $\bar{\theta}$ равны:

$$\bar{M} = \frac{M}{M_T}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_T},$$

где M_T и θ_T – соответственно значения крутящего момента и относительного угла закручивания, при котором максимальное касательное напряжение равно пределу текучести материала τ_T . Они определяются следующими формулами:

$$M_T = \tau_T * W_\rho; \quad \theta_T = \frac{\tau_T}{Gr_0}. \quad (4)$$

Здесь $W_\rho = J_\rho/r_0$ – момент сопротивления кручению; r_0 – радиус прутка пружины.

Для использования зависимости (3) при определении осевого перемещения пружины необходимо обратить эту зависимость, т.е. получить обратную функцию $\theta = \theta(M)$. Следовательно, для обращения зависимости (3) необходимо решить нижеследующее алгебраическое уравнение относительно θ , которое получается из формулы (3):

$$(1 - 3N)\theta^4 + (4N - M)\theta^3 - N = 0, \quad (M \geq 1) \quad (5)$$

где $N = (1 - n)/3$.

Данное уравнение при заданном параметре упрочнения n и нагрузке M имеет четыре корня. При этом известно [3], что если уравнение имеет более чем один корень, обратной функции не существует. Но исходя из физической сути данной задачи можно из четырёх корней выбрать один корень, удовлетворяющий нашим условиям. Таким образом, задаваясь значением нагрузки M и решая для неё уравнение (5), мы можем построить график зависимости θ от M . Исходя из свойств обратных функций полученный нами график должен быть симметричным графику функции, определяемой зависимостью (3), относительно прямой линии $M = \theta$. Схематично графики функций $M(\theta)$ и $\theta(M)$ показаны на рис. 1.

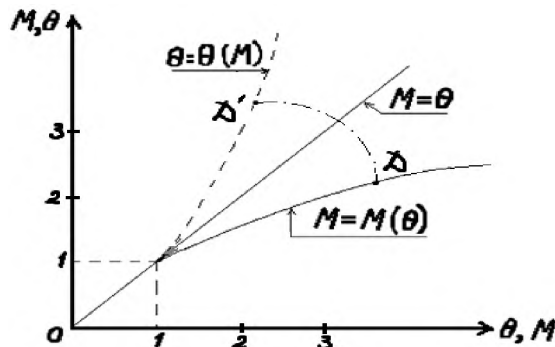


Рис. 1. Сплошные линии соответствуют графику $M(\theta)$, а пунктирные – $\theta(M)$.

В данном случае можно показать, что график функции $\theta(M)$ получается из графика $M(\theta)$ путём замены координат θ на M и M на θ , например, произвольная точка D на графике $M(\theta)$, имеющая координаты $[\theta, M(\theta)]$, переходит на графике $\theta(M)$ в точку D' с координатами $[M(\theta), \theta]$.

Перепишем уравнение (3) в виде:

$$M(\theta) = 4N + (1 - 3N)\theta - \frac{N}{\theta^3}. \quad (6)$$

Очевидно, что эта кривая имеет асимптоту, уравнение которой:

$$M_1(\theta) = 4N + (1 - 3N)\theta. \quad (7)$$

Учитывая данное обстоятельство, разобьём кривую $M(\theta)$ на два участка. Пусть для относительных углов закручивания $1 \leq \theta \leq \theta^*$ она определяется формулой (6), а для углов закручивания $\theta > \theta^*$ её заменим прямой, параллельной её асимптоте. С учётом формул (6) и (7) уравнение этой прямой определяется следующим выражением:

$$M_2(\theta) = \left(4N - \frac{N}{\theta^{*3}}\right) + (1 - 3N)\theta. \quad (8)$$

Величину θ^* выбираем таким образом, чтобы разность между функцией $M(\theta)$ и её асимптотой не превышала 5%. Следовательно, при $\theta = \theta^*$ должно быть

$$1,05M(\theta^*) = M_1(\theta^*).$$

Расписывая последнее выражение, получаем алгебраическое уравнение четвёртого порядка для определения θ^* :

* В дальнейшем, для удобства, «чёрточки» над функциями $\bar{M}$ и $\bar{\theta}$ опускаем.

$$0,05(1 - 3N)\theta^{*4} + 0,20N * \theta^{*3} - 1,05N = 0. \quad (9)$$

Решая данное уравнение, из четырёх корней выбираем корень, отвечающий физическому смыслу данной задачи.

Таким образом, при таком разбиении значения функций, определяемые формулами (6) и (8), при $\theta > \theta^*$ будут отличаться менее чем на 5%.

Кривую $M(\theta)$ на участке $1 \leq \theta \leq \theta^*$ аппроксимируем следующей параболой:

$$M(\theta) = \xi_0 + \xi_1\theta + \xi_2\theta^2. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов данной кривой примем следующие условия. Пусть значения кривых, определяемых уравнениями (6) и (10), совпадают в точках $\theta_1 = 1$ и $\theta_3 = \theta^*$, кроме этого потребуем, чтобы касательная к кривой (10) в точке $\theta_3 = \theta^*$ была параллельна асимптоте кривой (6). В этом случае для определения неизвестных коэффициентов $\xi_i (i = 0, 1, 2)$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_0 + \xi_1\theta_1 + \xi_2\theta_1^2 &= M(\theta_1) = 1; \\ \xi_0 + \xi_2\theta_3 + \xi_2\theta_3^2 &= M(\theta_3) = 4N + (1 - 3N)\theta_3 - \frac{N}{\theta_3^3}; \\ \xi_1 + 2\xi_2\theta_3 &= (1 - 3N). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, кривую $M(\theta)$, в дальнейшем, до точки $C[\theta^*, M(\theta^*)]$ определяем формулой (10), а далее – формулой (8) (рис.2). Аналогичным образом поступим и для кривой $\theta(M)$. Очевидно, координаты точки C' на кривой $\theta(M)$ будут $[M(\theta^*), \theta^*]$ (рис. 2). Кривую $\theta(M)$ на участке AC' также аппроксимируем квадратной параболой:

$$\theta(M) = \psi_0 + \psi_1 M + \psi_2 M^2. \quad (1 < M < M(\theta^*)) \quad (12)$$

Для определения коэффициентов $\psi_i (i = 0, 1, 2)$ в выражении (12) поступим следующим образом. Приравняем значение функции $\theta(M)$ в двух выбранных нами точках, т.е. при $M_1(\theta_1)$, $M_3(\theta_3)$, определяемых формулой (6). А для второго уравнения потребуем, чтобы касательная к кривой (12) в точке $M_1 = \theta_1$ совпадала с биссектрисой I-го координатного угла.

В этом случае для коэффициентов $b_i (i = 0, 1, 2)$ получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \psi_0 + \psi_1 M_1 + \psi_2 M_1^2 &= \theta_1; \\ \psi_1 + 2\psi_2 M_1 &= \theta_1; \\ \psi_0 + \psi_1 M_3 + \psi_2 M_3^2 &= \theta_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Для получения обратной функции $\theta(M)$ при значениях M , больших $M(\theta^*)$, обратим зависимость (8). Решая это уравнение относительно θ , получаем:

$$\theta = \frac{1}{1-3N} \left[M - \left(4N - \frac{N}{\theta^{*3}} \right) \right]. \quad (14)$$

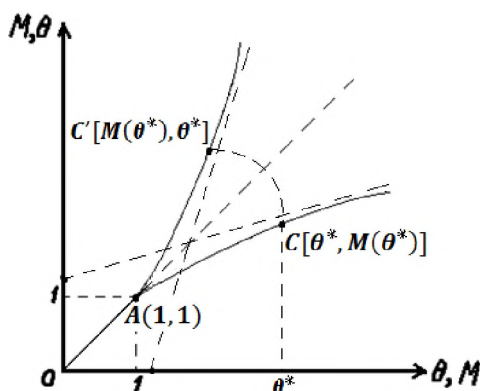


Рис. 2.

Таким образом, кривая $\theta(M)$ разбита нами на два участка. На участке AC' она описывается уравнением (12), при этом относительный угол закручивания $1 \leq \theta \leq \theta^*$, а далее, при $\theta > \theta^*$ она определяется уравнением (14).

Следовательно, зная функцию $\theta(M)$, путём интегрирования выражения (2) мы можем определить осевые перемещения фасонных пружин в неупругой области их деформирования, т.е. при $\theta > 1$.

По полученным выше формулам подсчитаны коэффициенты ξ_i и ψ_i , а также величина относительного угла закручивания θ^* для различных значений n , характеризующих упрочнение материала пружины (таблица 1).

Таблица 1

n	θ^*	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2
0.01	1.731	-0.237	1,736	-0,499	6.105	-11.209	6.105
0.1	1.664	-0.34	1.873	-0.533	3.995	-6.991	3.995
0.15	1.628	-0.395	1.947	-0.522	3.249	-5.499	3.249
0.30	1.516	-0.57	2.195	-0.625	1.888	-2.776	1.888

По этим результатам построены аппроксимирующие кривые. На рис.3 линии 2 и 3 определяют функцию $M(\theta)$, а линия 4 характеризует функцию $\theta(M)$. Все расчеты на рисунке 3 приведены для коэффициента упрочнения $n = 0.1$.

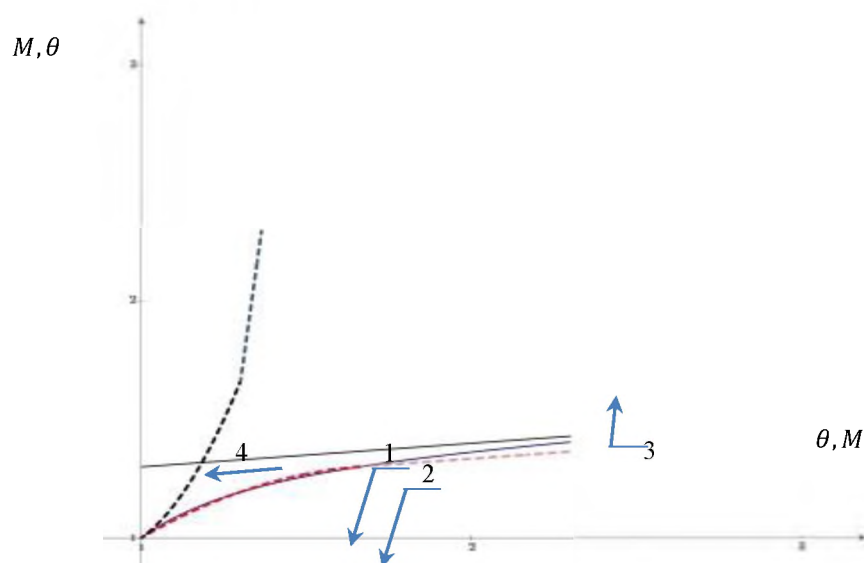


Рис. 3.

Линия 1 – асимптота кривой 2;

Кривая 2 построена по формуле (6);

Линия 3 (пунктирная) – аппроксимирующая кривая, построенная по формулам (8) и (10);

Линия 4 построена по формулам (12) и (14).

Список литературы

1. Пономарёв С.Д., Андреева Л.Е. Расчёт упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение, 1980. – 326с.
2. Абдрахманов С.А., Асылбек Абдыжапар. Кручение вала в неупругой области деформирования. Известия КГТУ им. И. Раззакова, №30. Бишкек, 2013.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. – 832с.

References

1. Ponomarev S.D., L.E. Andreeva. Calculation of elastic elements of machines and devices. M.: Engineering, 1980. – 326p.
2. Abdrahmanov S.A., Asylbek Abdyjapar. Torsion shaft inelastic deformation field. Proceedings of KSTU after I. Razzakov, №30. Bishkek, 2013.
3. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics (for scientists and engineers). M.: Nauka, 1973 - 832 p.