ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, РЕДУЦИРУЮЩИЕСЯ В УРАВНЕНИЯ ТИПА БЮРГЕРСА

ОМУРОВ М.Т.

КНУ им. Ж. Баласагына
УДК. 517.9

Аннотация: *В данной работе исследуется задача Коши для возмущенного волнового интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с оператором Даламбера в неограниченной области* $D_0 = (0,T)\times R$. *Учитывая модификации метода вспомогательной функции (МВФ) [3] волновое исследуемое уравнение трансформируется к уравнению типа Бюргерса с малым параметром [1,2,5,6,8]. Для решения полученной эквивалентной задачи Бюргерса воспользуемся методом Соболева, который позволяет интегрировать исследуемое уравнение в классе пуассоновских интегралов [3,7]. При этом, доказаны вопросы разрешимости исследуемой задачи с установлением оценки близости решений возмущенных и вырожденных задач в пространстве с равномерной метрикой.*

Abstract: *In the given work the Cauchy problem for the perturbed wave integro-differential equation of the third order with a D'Alembertian in unlimited area (*$D_0 = (0,T)\times R$*) is investigated. Considering modifications of a method of auxiliary function (IMF) [3] the wave investigated equation it is transformed to the equation of type of Burgers with small parametre [1,2,5,6,8]. For a solution of the received equivalent problem of Burgers we will use a method of Soboleva which allows to integrate the investigated equation in a class of Poisson integrals [3,7]. Thus, problems of resolvability of an investigated problem with an establishment of an estimation of affinity of solutions revolted and вырожденных problems in space with the uniform metric are proved.*

Ключевые слова: *задача Коши, уравнения типа Бюргерса, параметр вязкости, метода Соболева.*

Рассмотрим задачу вида:

$$u_{t^2} = \mu u_{x^2} + f(t,x,(Ku)) + \beta[u^2 + \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t - \sqrt{\mu}u_x)],(\bar{D}_0 \quad [0,T]\times R), \qquad (1)$$

$$u_{t^j}^{(j)}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x),\ (j = (0,1)),\ \ \varphi_j \in C^3(R), \qquad (2)$$

для определения неизвестной функции: u_μ. Здесь $(0,1) \ni \mu$ - малый параметр, $\Box_\mu$ – оператор Даламбера, так как (1):

$$\Box_\mu u = f(t,x,(Ku)) + \beta[u^2 + \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t - \sqrt{\mu}u_x)],\ [\Box_\mu \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}],$$

$0 < \beta \quad \text{const}; K; f \in C^{0,3}(\bar{D}_0); \varphi_j \in C^2(R) -$ известные функции, при этом относительно функции $0 \le K$:

$$Ku \equiv \int_R K(t,\tau)(u_\tau(t,\tau))^2 d\tau;\ \sup_{[0,T]}\int_R K(t,\tau)d\tau \le C_0 = \text{const}. \qquad (3)$$

I. Пусть имеют место условия (2), (3). Существуют различные способы решения уравнений вида (1), когда это уравнение является линейным. В нашем случае, так как (1) является нелинейным, то мы воспользуемся идеей работы [4]. Для этого, учитывая подстановку вида:

$$
\begin{cases}
u_t - \sqrt{\mu}u_x = \psi_0(x) + V(t,x), \\
\psi_0(x) \equiv \varphi_1(x) - \sqrt{\mu}\varphi_{0x}(x), \\
V(0,x) = 0, \forall x \in R, \\
u = \varphi_0(x+\sqrt{\mu}t) + \int\limits_0^t V(s, x+\sqrt{\mu}(t-s))ds \equiv \varphi_0(x+\sqrt{\mu}t) + BV, \\
u_x = \varphi_{0x}(x+\sqrt{\mu}t) + \int\limits_0^t V_\rho(s, x+\sqrt{\mu}(t-s))ds \equiv \varphi_{0x}(x+\sqrt{\mu}t) + (B_1V_x)(t,x), \\
\rho = x + \sqrt{\mu}(t-s); \rho_x = 1; \rho_t = \sqrt{\mu},
\end{cases} \tag{4}
$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$
\begin{cases}
V_t + \sqrt{\mu}V_x = \mu\beta V_{x^2} + f(t,x,\int\limits_R K(t,\tau)[\varphi_{0\tau}(\tau+\sqrt{\mu}t) + \int\limits_0^t V_{\tilde\rho}(s,\tau+\sqrt{\mu}\times \\
\times(t-s))ds]^2 d\tau) + \beta[(BV)(t,x)+\varphi_0(x)]^2 + \Psi_1(\mu,x), (\bar{D}_0 \quad [0,T]\times R), \\
V(0,x) = 0, \\
\Psi_1(\mu,x) \equiv -\sqrt{\mu}\psi_{0x}(x) + \mu\beta\psi_{0x^2}; \quad \tilde\rho \quad \tau + \sqrt{\mu}(t-s).
\end{cases} \tag{5}
$$

В результате для новой неизвестной функции V получим уравнение типа Бюргерса и на основе метода Соболева [7] преобразуется к виду

$$
\begin{cases}
V = M(t,x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \exp(-\tau^2)\{f(s, x+2\tau\sqrt{\tilde\mu(t-s)}, \int\limits_R K(s,\bar\tau)[\varphi_{0\bar\tau}(\bar\tau + \\
+\sqrt{\mu}s) + \int\limits_0^s V_{\tilde\rho}(s,\bar\tau+\sqrt{\mu}(s-s'))ds']^2 d\bar\tau) + \beta[(BV)(s,x+2\tau\sqrt{\tilde\mu(t-s)}) + \varphi_0(x + \\
+2\tau\sqrt{\tilde\mu(t-s)})]^2\}d\tau ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \exp(-\frac{(x-s_1)^2}{4\tilde\mu(t-s)})\frac{1}{2\sqrt{\tilde\mu(t-s)}}\sqrt{\mu}V_{s_1}(s,s_1)ds_1ds, \\
M \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R \exp(-\tau^2)\Psi_1(x+2\tau\sqrt{\tilde\mu(t-s)})d\tau ds, \\
\tilde\mu = \beta\mu, 0 < \beta \quad \text{const}; \; s - x \quad 2\tau\sqrt{\tilde\mu(t-s)}.
\end{cases} \tag{6}
$$

Далее, взяв частный производный по *x* из (6), получим

$$\begin{cases}
V_x = W(t,x), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\
V = M(t,x) + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \; exp(-\tau^2)\{ f(s, x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int\limits_R \; K(s,\bar{\tau})[\varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau} + \\
+\sqrt{\mu}s) + \int\limits_0^s \; W(s, \bar{\tau} + \sqrt{\mu}(s-s'))ds']^2 d\bar{\tau}) + \beta[(BV)(s, x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + \\
+\varphi_0(x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})]^2\} d\tau ds - \sqrt{\mu}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \; exp(-\tau^2) W(s, x + 2\tau \times \\
\times\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) d\tau ds \equiv (P_1[V,W])(t,x), \\
W = M_x(t,x) + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \; exp(-\tau^2)\{ f_h(s, x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int\limits_R \; K(s,\bar{\tau})[\varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau} + \\
+\sqrt{\mu}s) + \int\limits_0^s \; W(s, \bar{\tau} + \sqrt{\mu}(s-s'))ds']^2 d\bar{\tau}) + \beta[(BW)(s, x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + \\
+\varphi_{0h}(x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})]^2\} d\tau ds - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_R \; exp(-\tau^2) \dfrac{1}{2\sqrt{\beta(t-s)}} W(s, x + \\
+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) d\tau ds \equiv (P_2[V,W])(t,x),
\end{cases} \tag{7}$$

где (7) – это система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра – Абеля второго рода по переменной $t \in [0, T_0]$. Следовательно, при выполнении условий принципа Банаха [3, 7] относительно операторов $P_i, (i = 1,2)$:

$$\begin{cases}
P_i : L_{P_i} \le \dfrac{d}{2}, (d < 1), (i = 1,2; \sum\limits_{i=1}^{2} L_{p_i} \le d < 1), \\
P_i : S_r(0) \to S_r(0), \quad (S_r(0) = \{V, W : |V|, |W| \le r, \forall (t,x) \in \bar{D}_0\}),
\end{cases} \tag{8}$$

система (7) разрешима в $C(\bar{D}_0)$, причем решение этого уравнения можем найти методом Пикара

$$\begin{cases}
V_{n+1} \equiv (P_1[V_n, W_n])(t,x), \\
W_{n+!} \equiv (P_2[V_n, W_n])(t,x), (n = 0,1,..., V_0 = 0, W_0 = 0), \\
V_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} V(t,x), \\
W_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} W(t,x), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \forall (t,x) \in \bar{D}_0.
\end{cases} \tag{9}$$

Поэтому, найденная функция V является решением задачи (5), причем $V \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$, т.е. учитывая норму пространства $\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$, получим

$$\|V\|_{\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^{2} \|V_{x^j}^{(j)}\|_{C(\bar{D}_0)} + \|V_t\|_{C(\bar{D}_0)} \le M_0 = \text{const}, \tag{10}$$

так как предыдущих параграфах были получены аналогичные оценки относительно в $\tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$.

Далее, подставляя функцию $V = \tilde{V} \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)$ в (4) имеем

$$u = \varphi_0(x + \sqrt{\mu}t) + \int\limits_0^t \; \tilde{V}(s, x + \sqrt{\mu}(t-s))ds \equiv Y(t,x), \tag{11}$$

где $Y(t,x)-$ известная функция. При этом, если относительно функции $Y(t,x)$ требуем $Y \in \tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$, то функция $u \in \tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$, т.е. учитывая (11) и норму пространства $\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$, следует

$$\|u\|_{\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^{2}\left\|u_{x^j}^{(j)}\right\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{j=1}^{2}\left\|u_{t^j}^{(j)}\right\|_{C(\bar{D}_0)} \le M_1 \quad \text{const},(\tilde{V} \in \tilde{C}^{1,2}(\bar{D}_0)). \tag{12}$$

Лемма 1. В условиях (8)-(11) и (12) задача (1), (2) разрешима в $\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$, причем решение этой задачи определяется единственным образом по правилу (4).

II. В этом пункте исследуем близости решений возмущенной и вырожденной задачи, когда выполняется условия леммы 1.

A. Пусть $\mu = 0$. Тогда получим вырожденную задачу вида

$$U_{t^2} = f(t,x,(KU)) + \beta U^2, \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \tag{13}$$

$$U_{t^j}^{(j)}\Big|_{t=0} = \varphi_0(x),\ (j = (0,1)),\quad \varphi_0 \in C^3(R). \tag{14}$$

В этом случае, найденное решение задачи (13), (14) обладает свойством гладкости в $C^{2,3}(\bar{D}_0)$.

Решения этой задачи можем найти на основе:

$$U = \varphi_0(x)(1+t) + \int_0^t (t-s)[f(s,x,\theta(s)) + \beta U^2(s,x)]ds, \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \tag{15}$$

где содержатся неизвестные функции $(U;\theta(t))$, при этом

$$\theta(t) \equiv \int_R K(t,\tau)(U_\tau(t,\tau))^2 d\tau. \tag{16}$$

Поэтому, дифференцируя по совокупности аргументов и проведя математические преобразования из (15) получим

$$\begin{cases} U_t = \varphi_0(x) + \int_0^t [f(s,x,\tilde{\theta}(s)) + \tilde{U}^2(s,x)]ds, \\ U_{t^2} = f(t,x,\tilde{\theta}(t)) + \tilde{U}^2(t,x), \\ U_x = \varphi_{0x}(x)(1+t) + \int_0^t (t-s)[f_x(s,x,\theta(s)) + 2U(s,x)U_x(s,x)]ds, \\ U_{x^2} = \varphi_{0x^2}(x)(1+t) + \int_0^t (t-s)[f_{x^2}(s,x,\theta(s)) + 2(U_x(s,x))^2 + 2U(s,x)U_{x^2}(s,x)]ds, \\ U_{x^3} = \varphi_{0x^3}(x)(1+t) + \int_0^t (t-s)[f_{x^3}(s,x,\theta(s)) + 6U_x(s,x)U_{x^2}(s,x) + 2U(s,x)\times \\ \times U_{x^3}(s,x)]ds, \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\ (U_x)^2 = \{\varphi_{0x}(x)(1+t) + \int_0^t (t-s)[f_x(s,x,\theta(s)) + 2U(s,x)U_x(s,x)]ds\}^2, \\ \int_R K(t,\tau)(U_\tau(t,\tau))^2 d\tau = \int_R K(t,\tau)\{\varphi_{0\tau}(\tau)(1+t) + \int_0^t (t-s)[f_\tau(s,\tau,\theta(s)) + \\ +2U(s,\tau)U_\tau(s,\tau)]ds\}^2 d\tau. \end{cases} \tag{17}$$

Тогда относительно функций U, W, θ имеем

$$
\begin{cases}
U_x = W(t,x), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\
U = \varphi_0(x)(1+t) + \int\limits_0^t (t-s)[f(s,x,\theta(s)) + \beta U^2(s,x)]ds \equiv (H_0[U,\theta])(t,x), \\
W = \varphi_{0x}(x)(1+t) + \int\limits_0^t (t-s)[f_x(s,x,\theta(s)) + 2U(s,x)W(s,x)]ds \equiv \\
\equiv (H_1[U,W,\theta])(t,x), \\
\theta(t) = \int\limits_R K(t,\tau)\{\varphi_{0\tau}(\tau)(1+t) + \int\limits_0^t (t-s)[f_\tau(s,\tau,\theta(s)) + 2U(s,\tau)W(s,\tau)]ds\}^2 \times \\
\times d\tau \equiv (H_2[U,W,\theta])(t),
\end{cases}
\tag{18}
$$

здесь (18) является системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода по переменной $t \in [0,T]$. Поэтому, можно было рассмотреть теорию вольтерровских уравнений второго рода, но аналогичные результаты получены в предыдущих параграфах. Следовательно, не нарушая общности, предположим, что относительно операторов $H_i, (i = \overline{0,2})$ реализуются условия принципа Банаха:

$$
\begin{cases}
H_i : L_{H_i} \le \frac{d}{3}, (i \quad \overline{0,2}; \ \sum\limits_{i=0}^{2} L_{H_i} \le d < 1), \\
H_i : S_r(0) \to S_r(0), (i \quad \overline{0,2}; \quad S_r(0) \quad \{U,W,\theta : |U|,|W|,|\theta| \le r, \forall (t,x) \in \bar{D}_0\}),
\end{cases}
\tag{19}
$$

где $L_{H_i}, (i = \overline{0,2})$ - коэффициенты Липшица операторов $H_i, (i = \overline{0,2})$. Тогда (18) разрешимо в $C(\bar{D}_0)$, причем решение этого уравнения можем найти методом Пикара

$$
\begin{cases}
U_{n+1} = (H_0[U_n,\theta_n])(t,x), \\
W_{n+1} = (H_1[U_n,W_n,\theta_n])(t,x), \\
\theta_{n+1}(t) = (H_2[U_n,W_n,\theta_n])(t), \\
U_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} U(t,x); \ W_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} W(t,x), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\
\theta_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{d<1} \theta(t), \forall t \in [0,T_0].
\end{cases}
\tag{20}
$$

Поэтому, найденные значения функций: $U \equiv \tilde{U}, \theta \equiv \tilde{\theta},$ подставляя в (15) получим

$$
U = \varphi_0(x)(1+t) + \int\limits_0^t (t-s)[f(s,x,\tilde{\theta}(s)) + \beta \tilde{U}^2(s,x)]ds \equiv F(t,x), \tag{21}
$$

при этом функция $F(t,x) \in C^{2,3}(\bar{D}_0)$, так как частные производные (17) ограничены $\forall (t,x) \in \bar{D}_0$.

Лемма 2. При условиях (14), (20) и $F(t,x) \in C^{2,3}(\bar{D}_0)$ вырожденная задача (13), (14) разрешима в $C^{2,3}(\bar{D}_0)$, причем: $\|U\|_{C^{2,3}(\bar{D}_0)} \le N_0$.

Б. Пусть имеют место условия лемм 1, 2. Тогда решение исследуемой задачи (1), (2) можем найти на основе преобразования

$$
\begin{cases}
u_\mu = U + (\varphi_\mu - \varphi_0)(1+t) + \xi_\mu, \\
\xi^{(i)}_{\mu t^i}(0,x) = 0, (i = 0,1),
\end{cases}
\tag{22}
$$

где функция ξ в роли остаточной функции. Значит, учитывая (13) и

$$
\begin{cases}
u_t = U_t + \varphi_\mu - \varphi_0 + \xi_t; \ = u_{t^2} \quad U_{t^2} + \xi_{t^2}, \\
u_{x^j} = U_{x^j} + (\varphi_{\mu x^j} - \varphi_{0 x^j})(1+t) + \xi_{x^j}, (j = 1,2,3),
\end{cases}
\tag{23}
$$

из (1) получим нелинейное уравнение

$$\begin{cases} \xi_{t^2} = \mu\xi_{x^2} + f(t,x,(K[U+(\varphi_\mu-\varphi_0)(1+t)+\xi])) - f(t,x,(KU)) + \\ +\beta[2U\xi + 2(\varphi_\mu-\varphi_0)(1+t)\xi + \xi^2] + \beta\mu\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi_t - \sqrt{\mu}\xi_x) + \Upsilon_\mu(t,x), \\ \Upsilon_\mu \equiv \mu[U_{x^2} + (\varphi_{\mu x^2} - \varphi_{0x^2})(1+t)] + \beta[(\varphi_\mu-\varphi_0)^2(1+t)^2 + 2U(\varphi_\mu-\varphi_0)(1+t)] + \\ +\beta\mu\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[U_t + \varphi_\mu - \varphi_0 - \sqrt{\mu}(U_x + (\varphi_{\mu x} - \varphi_{0x})(1+t))] \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, \forall (t,x)\in \bar{D}_0. \end{cases} \tag{24}$$

Далее, введя аналогичную постановку вида (4), т.е.:

$$\begin{cases} \xi_t - \sqrt{\mu}\xi_x = \eta(t,x), \\ \eta(0,x) = 0, \forall x\in R, \\ \xi = \int\limits_0^t \eta(s, x+\sqrt{\mu}(t-s))ds \equiv B_2\eta, \\ \xi_x = \int\limits_0^t \eta_\rho(s, x+\sqrt{\mu}(t-s))ds \equiv (B_3\eta_x)(t,x), (\rho \quad x+\sqrt{\mu}(t-s); \rho_x = 1), \end{cases} \tag{25}$$

из уравнение (24) получим

$$\begin{gathered} \eta_t + \sqrt{\mu}\eta_x \quad f(t,x,\int\limits_R K(t,\tau)[U_\tau(t,\tau) + (\varphi_{\mu\tau}(\tau) - \varphi_{0\tau}(\tau))(1+t)]^2 d\tau + \int\limits_R K(t,\tau)\times \\ \times[2(U_\tau(t,\tau) + (\varphi_{\mu\tau}(\tau) - \varphi_{0\tau}(\tau))(1+t))(B_1\eta_\tau)(t,\tau) + ((B_1\eta_\tau)(t,\tau))^2]d\tau) - \\ - f(t,x,\int\limits_R K(t,\tau)[U_\tau(t,\tau)]^2 d\tau) + \beta[2U(B\eta)(t,x) + 2(\varphi_\mu - \varphi_0)(1+t)(B\eta)(t,x) + \\ +((B\eta)(t,x))^2] + \beta\mu\eta_{x^2} + \Upsilon_\mu(t,x). \end{gathered} \tag{26}$$

Следовательно, относительно новой неизвестной функции η_ε получим уравнение

$$\begin{cases} \eta = M_{1\mu}(t,x) + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R exp(-\tau^2)\{f(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int\limits_R K(s,\bar{\tau})[U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau}) + \\ +(\varphi_{\mu\bar{\tau}}(\bar{\tau}) - \varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau}))(1+s)]^2 d\bar{\tau} + \int\limits_R K(s,\tau)[2(U_\tau(s,\tau) + (\varphi_{\varepsilon\tau}(\tau) - \varphi_{0\tau}(\tau))\times \\ \times(1+s))(B_3\eta_\tau)(s,\tau) + ((B_3\eta_\tau)(s,\tau))^2]d\tau) - f(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int\limits_R K(s,\bar{\tau})\times \\ \times[U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau})]^2 d\bar{\tau}) + \beta[2U(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})(B_2\eta)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + \\ +2(\varphi_\mu(x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) - \varphi_0(x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}))(1+t)(B_2\eta)(s, x+2\tau\times \\ \times\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + ((B_2\eta)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}))^2]\}d\tau ds - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R exp(-\dfrac{(x-s_1)^2}{4\tilde{\mu}(t-s)})\times \\ \times\dfrac{1}{2\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}}\sqrt{\mu}\eta_{s_1}(s,s_1)ds_1 ds, \\ M_{1\mu} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_R exp(-\tau^2)\Upsilon_\mu(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})d\tau ds, (\tilde{\mu} \quad \beta\mu, 0<\beta=\text{const}). \end{cases} \tag{27}$$

Далее, взяв производный по x и проведя математические преобразования, как в случае (7) из (27) получим

$$\begin{cases} \eta_x = \omega(t,x), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\ \eta = M_{1\mu}(t,x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2)\{f(s, x + 2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int_R K(s,\bar{\tau})[U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau}) + \\ +(\varphi_{\mu\bar{\tau}}(\bar{\tau}) - \varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau}))(1+s)]^2 d\bar{\tau} + \int_R K(s,\bar{\tau})[2(U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau}) + (\varphi_{\varepsilon\bar{\tau}}(\bar{\tau}) - \varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau}))\times \\ \times(1+s))(B_3\omega)(t,\bar{\tau}) + ((B_3\omega)(t,\bar{\tau}))^2]d\bar{\tau}) - f(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int_R K(s,\bar{\tau})\times \\ \times[U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau})]^2 d\bar{\tau}) + \beta[2U(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})(B_2\eta)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + \\ +2(\varphi_\mu(x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) - \varphi_0(x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}))(1+t)(B_2\eta)(s, x+2\tau\times \\ \times\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + ((B_2\eta)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}))^2]\}d\tau ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2)\sqrt{\varepsilon}\times \\ \times\omega(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})d\tau ds \equiv (\tilde{P}_1[\eta,\omega])(t,x), \\ \omega = M_{1\mu x}(t,x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2)\{f_\rho(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int_R K(s,\bar{\tau})[U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau}) + \end{cases}$$

$$\begin{cases} +(\varphi_{\mu\bar{\tau}}(\bar{\tau}) - \varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau}))(1+s)]^2 d\bar{\tau} + \int_R K(s,\bar{\tau})[2(U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau}) + (\varphi_{\mu\bar{\tau}}(\bar{\tau}) - \varphi_{0\bar{\tau}}(\bar{\tau}))\times \\ \times(1+s))(B_3\omega)(t,\bar{\tau}) + ((B_3\omega)(t,\bar{\tau}))^2]d\bar{\tau}) - f_\rho(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}, \int_R K(s,\bar{\tau})\times \\ \times[U_{\bar{\tau}}(s,\bar{\tau})]^2 d\bar{\tau}) + \beta[2U_\rho(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})(B_2\omega)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + \\ +2(\varphi_\mu(x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) - \varphi_0(x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}))(1+t)(B_2\omega)(s, x+2\tau\times \\ \times\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)}) + 2(B_2\eta)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})(B_2\omega)(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})]\}d\tau ds - \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_R \exp(-\tau^2)\frac{\tau}{\sqrt{\beta(t-s)}}\omega(s, x+2\tau\sqrt{\tilde{\mu}(t-s)})d\tau ds \equiv (\tilde{P}_2[\eta,\omega])(t,x), \end{cases} \tag{28}$$

где (28) – это система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и Вольтерра – Абеля второго рода по переменной $t \in [0, T_0]$. Следовательно, при выполнении аналогичных условий (8), т.е. когда относительно операторов $\tilde{P}_i, (i=1,2)$ реализуются условия принципа Банаха, то (28) разрешима в $C(\bar{D}_0)$. причем решение этого уравнения можем найти методом Пикара со сходимостью (9), т.е.:

$$\begin{cases} \eta_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(t,x), \\ \omega_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega(t,x), \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\ \eta \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0; \quad \omega \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, \\ M_{1\mu x^i} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, (i=0,1), \forall (t,x) \in \bar{D}_0. \end{cases} \tag{29}$$

Поэтому, найденное значение функции: $\eta \equiv \tilde{\eta}$ подставляя в (25) получим

$$\begin{cases} \xi = \int_0^t \tilde{\eta}(s, x+\sqrt{\mu}(t-s))ds, \forall (t,x) \in \bar{D}_0, \\ \|\xi\|_C \le \|\tilde{\eta}\|_C T_0 \quad Q_\mu \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0. \end{cases} \tag{30}$$

С другой стороны, так как функция $\xi \in \tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)$, то

$$\|\xi\|_{\tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_0)} = \sum_{j=0}^{2}\left\|\xi_{x^j}^{(j)}\right\|_{C(\bar{D}_0)} + \sum_{i=1}^{2}\left\|\xi_{t^i}^{(i)}\right\|_{C(\bar{D}_0)} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0. \qquad (31)$$

Лемма 3. В условиях лемм 1, 2 и (30), (31) существует единственным образом остаточная функция ξ , которая является решением задачи (24) и равномерно сходящаяся к нулю $\forall (t,x) \in \bar{D}_0$, когда $\mu \to 0.$

B. Для доказательства близости решений возмущенной и вырожденной задачи, пусть выполняется условия лемм 1-3. Тогда, учитывая преобразование (22) и условия (30) получим

$$\left\|u_\mu - U\right\|_C \le (1+T_0)\left\|\varphi_\mu - \varphi_0\right\|_C + \left\|\xi_\mu\right\|_C \le \Delta_0(\mu) \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0. \qquad (32)$$

Аналогичные условия можно получить на основе (31) и относительно разности:

$$\begin{cases} \left\|u_{t^i}^{(i)} - U_{t^i}^{(i)}\right\|_C \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, \\ \left\|u_{x^j}^{(j)} - U_{x^j}^{(j)}\right\|_C \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, (i\ \ \overline{1},2;\ j\ \ \overline{0},1,2). \end{cases} \qquad (33)$$

Теорема 1. Если имеют место лемм 1-3 и (32), (33), то близость решений возмущенной и вырожденной задачи оценима в смысле $\tilde{C}^{2,2}(D_0)$.

Литература

1. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. – Москва: Атомиздат, 1968. – 271 с.
2. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газовой динамики. – Новосибирск: Наука, 1985. – 224 с.
3. Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т. Обратные задачи в приложениях математической физики / КНУ им. Ж. Баласагына. – Б.: 2014. –192 с.
4. Омуров Т.Д., Туганбаев М.М. Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса. – Бишкек: Илим, 2010г. - 116с.
5. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т., Омуров М.Т. Обратные задачи для нагруженных дифференциальных уравнений типа Бюргерса // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына -2013г.- Вып. 1. - С.47-51.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – Москва: Наука, 1978. – 688 с.
7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. - 443 с.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.