

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ  
A CLASS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER  
VOLTERRA-STIELTJES ON THE HALF**

*Бул эмгекте өсүүчү функция боюнча алынган туундунун теориясынын жана теңдемелерди өзгөртүп түзүү методунун негизинде биринчи тартптеги Вольтерр-Стилтьестин сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемелеринин чыгарылышынын туундусунун  $L^2_g[t_0, \infty)$  мейкиндигине тийешелүүлүгүнүн жетиштүү шарттары алынды.*

**Ачык сөздөр:** өсүүчү функциядан алынган туунду, Вольтерр-Стилтьестин сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемеси, жарым айлана.

*В этой работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности производной решения линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка Вольтерра-Стилтьеса к пространству  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ .*

**Ключевые слова:** производная по возрастающей функции, интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа Вольтерра-Стилтьеса, полуось.

*In this paper, based on the notion of derivative of an increasing function and the method of transformation equations established sufficient conditions for the derivative of the solution of linear integro-differential equation of the first order Volterra-Stieltjes to space  $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$*

**Keywords:** derivative on an increasing function, integro-differential equalization of first-order of type of Вольтерра-Стилтьеса, semiaxis.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа Вольтерра-Стилтьеса

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)[x'(\tau) + b(\tau)x(\tau)]dg(\tau) = f(t), \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

$$x(t_0) = c \quad (2)$$

где интеграл является интегралом Стильеса,  $a(t), b(t), K(t, \tau)$  и  $f(t)$  – заданные при  $t \geq t_0$  и  $t \geq \tau \geq t_0$  непрерывные функции,  $g(t)$  – заданная возрастающая непрерывная функция при  $t \geq t_0$ ,  $x(t)$  – искомая функция.

Здесь  $x'(t)$  определяются следующим равенством  $x'(t) = \frac{dx(t)}{dg(t)} \frac{dg(t)}{dt} = g'(t) \frac{dx(t)}{dg(t)}$

Все фигурирующие функции являются непрерывными и соотношения имеют место при  $t \geq t_0$  и  $t \geq \tau \geq t_0$

Вопрос ограниченности и принадлежности к пространству  $L^2[t_0, \infty)$  решения для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразования уравнений исследованы в работе [1-7].

*Введем обозначения:*  $C[t_0, \infty)$  – пространство непрерывных функций на  $[0, \infty)$ ,  $C(G)$  – пространство непрерывных функций на  $G = \{(t, \tau) : t_0 \leq \tau \leq t < \infty\}$

Ниже приведем определение и теорему [9], которые будем использовать в данной работе. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на интервале  $(a, b)$ . Будем предполагать, что функция  $g(x)$  - строго возрастающая непрерывная функция всюду на интервале  $(a, b)$ . Возьмем точку  $x \in (a, b)$ . Зададим  $x$  приращение  $\Delta(x) \neq 0$  тогда функции  $f(x)$  и  $g(x)$  получат приращения  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$  и  $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$ .

**Определение.** Производной  $f(x)$  по  $g(x)$  функции в точке  $x \in (a, b)$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta f(x)$  к приращению функции  $\Delta g(x)$  при стремлении приращения аргумента  $\Delta x$  к нулю (если этот предел существует):  $f'_{g(x)}(x) = \frac{df(x)}{dg(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)}$

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $f(x)$  - непрерывная функция на сегменте  $[a, b]$  и

$$F(x) = \int_a^x f(t) dg(t), \quad x \in [a, b]$$

тогда  $F'_{g(x)}(x) = \left( \int_a^x f(t) dg(t) \right)'_{g(x)} = f(x), \quad x \in [a, b]$

где  $F'_{g(x)}(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(a + \Delta x) - F(a)}{g(a + \Delta x) - g(a)}, \quad F'_{g(x)}(b) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{F(b + \Delta x) - F(b)}{g(b + \Delta x) - g(b)}$

**ЗАДАЧА.** В данной работе рассматривается и исследуется методом преобразований уравнений, достаточные условия принадлежности решения  $x(t)$  линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (1) типа Вольтерра-Стилтьеса к пространству  $L^2_g[t_0, \infty)$ , где  $x(t) \in L^2_g(t_0, \infty)$  тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_0}^{\infty} x^2(t) dg(t) < \infty$$

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (1) выполняются следующие условия

1)  $g'(t) \geq 0$  и  $[a(t) + b(t)] \geq 0$  при всех  $t \in [t_0, \infty)$ ;

2)  $a(t)b(t) - \frac{1}{2} \{ [a(t) + b(t)] g'(t) \}'_{g(t)} \geq \alpha > 0$  при  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $\alpha$  - постоянная;

3)  $K(t, t_0) \geq 0$  для всех  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $K'_{g(t)}(t, s), K'_{g(s)}(t, s), K''_{g(t)g(s)}(t, s) \in C(G)$ ,

где  $K'_{g(t)}(t, s) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t, s) - K(t, s)}{g(t + \Delta t) - g(t)}, \quad K'_{g(s)}(t, s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{K(t, s + \Delta s) - K(t, s)}{g(s + \Delta s) - g(s)}$

4)  $K'_{g(t)}(t, t_0) \leq 0$  для всех  $t \in [t_0, \infty)$ ;

5)  $K'_{g(\tau)}(t, \tau) \geq 0$  и  $K''_{g(t)g(\tau)}(t, \tau) \leq 0$  для всех  $(t, \tau) \in G = \{(t, \tau) : t_0 \leq \tau \leq t < \infty\}$ ;

6)  $f(t) \in L^2_g[t_0, \infty)$ , такое что  $\int_{t_0}^t [1 + |b(s)|^2] f(s)^2 dg(s) < \infty$ .

Тогда для решения  $x(t)$  линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка (1)  $x(t), x'(t)$  принадлежит к пространству  $L^2_g[t_0, \infty)$  и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^t |x'(s)|^2 dg(s) + \int_{t_0}^t |x(s)|^2 dg(s) \leq \frac{1}{\beta - \varepsilon} \left\{ \int_{t_0}^t [1 + |b(s)|^2] f(s)^2 dg(s) + \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)] g(t_0) \right\}$$

**Доказательство.** Применяя метод преобразования уравнений рассмотренных в работе [1] и умножая уравнения (1) на  $x'(t) + b(t)x(t)$  и затем, интегрируя от  $t_0$  до  $t$  получаем:

$$\int_{t_0}^t [x'(s)]^2 dg(s) + \int_{t_0}^t [a(s) + b(s)]x(s)x'(s)dg(s) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)x^2(s)dg(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K(s, \tau)[x'(\tau) + b(\tau)x(\tau)][x'(s) + b(s)x(s)]dg(\tau)dg(s) = \int_{t_0}^t f(s)[x'(s) + b(s)x(s)]dg(s) \quad (3)$$

Для вычисления второго интеграла в левой части соотношения (3), применяем метод интегрирования по частям и получим:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [a(s) + b(s)]x(s)x'(s)dg(s) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [a(s) + b(s)]g'(s)[x^2(s)]'_{g(s)} dg(s) = \\ &= \left. \begin{array}{l} u(s) = [a(s) + b(s)]g'(s) \\ du(s) = \{[a(s) + b(s)]g'(s)\}'_{g(s)} dg(s) \\ dv(s) = [x^2(s)]'_{g(s)} dg(s) \\ v(s) = x^2(s) \end{array} \right| = \frac{1}{2} [a(s) + b(s)]g'(s)x^2(s) \Big|_{s=t_0}^{s=t} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t x^2(s) \{[a(s) + b(s)]g'(s)\}'_{g(s)} dg(s) = \frac{1}{2} [a(t) + b(t)]g'(t)x^2(t) - \\ &- \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)]g'(t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t x^2(s) \{[a(s) + b(s)]g'(s)\}'_{g(s)} dg(s) \end{aligned}$$

Подставляя полученные значение в соотношения (3), вычисляем значение суммы трех первых интегралов

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [x'(s)]^2 dg(s) + \int_{t_0}^t [a(s) + b(s)]x(s)x'(s)dg(s) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)x^2(s)dg(s) = \\ = \int_{t_0}^t [x'(s)]^2 dg(s) + \frac{1}{2} [a(t) + b(t)]g'(t)x^2(t) - \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)]g'(t_0) + \\ + \int_{t_0}^t \left[ a(s)b(s) - \frac{1}{2} \{[a(s) + b(s)]g'(s)\}'_{g(s)} \right] x(s)^2 dg(s) \end{aligned}$$

Подставляя последнее значения в соотношение (3) получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [x'(s)]^2 dg(s) + \frac{1}{2} [a(t) + b(t)]g'(t)x^2(t) + \int_{t_0}^t \left[ a(s)b(s) - \frac{1}{2} \{[a(s) + b(s)]g'(s)\}'_{g(s)} \right] x(s)^2 dg(s) + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K(s, \tau)[x'(\tau) + b(\tau)x(\tau)][x'(s) + b(s)x(s)]dg(\tau)dg(s) = \int_{t_0}^t f(s)[x'(s) + b(s)x(s)]dg(s) + \\ + \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)]g'(t_0) \quad (4) \end{aligned}$$

Для вычисления двойного интеграла в последнем соотношении (4), применяем следующие равенства, которые рассмотрены в работе [8] для операторных уравнений Вольтерра:

$$1. \frac{\partial}{\partial g(\tau)} [K(s, \tau)z(s, \tau)v(s)] = K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau)v(s) + K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau)v(s), \quad (s, \tau) \in G$$

Из последнего тождество следует, что

$$K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau)\nu(s) = \frac{\partial}{\partial g(\tau)} [K(s, \tau)z(s, \tau)\nu(s)] - K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau)\nu(s) \quad (5)$$

где 
$$z(s, \tau) = \int_{\tau}^s \nu(t)dg(t) = \int_{\tau}^s [x'(t) + b(t)x(t)]dg(t). \quad (6)$$

Из теоремы 1 следует

$$z'_{g(\tau)}(s, \tau) = -[x'(\tau) + b(\tau)x(\tau)], \quad (7)$$

$$z'_{g(s)}(s, \tau) = x'(s) + b(s)x(s). \quad (8)$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial g(s)} [K(s, \tau)z(s, \tau)z(s, \tau)] = K'_{g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau) + 2K(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), \quad (s, \tau) \in G$$

Из последнего тождество следует, что

$$K(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g(s)} [K(s, \tau)z^2(s, \tau)] - \frac{1}{2} [K'_{g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau)] \quad (9)$$

где  $K'_{g(\tau)}(s, \tau)$  – производная по возрастающей функции  $g(\tau)$  [9].

$$3. \quad \frac{\partial}{\partial g(s)} [K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau)z(s, \tau)] = K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau) + 2K'_{g(\tau)}(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), \quad (s, \tau) \in G$$

Из последнего тождество следует, что

$$K'_{g(\tau)}(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g(s)} [K'_{g(\tau)}(s, \tau)z^2(s, \tau)] - \frac{1}{2} [K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau)] \quad (10)$$

где  $K'_{g(\tau)}(s, \tau)$  – производная по возрастающей функции  $g(\tau)$  [9].

Применяя формулы (5), (6), (7), (8), (9) и (10) и проинтегрировав методом по частям, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K(s, \tau)\nu(\tau)\nu(s)dg(\tau)dg(s) = - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau)\nu(s)dg(\tau)dg(s) = - \int_{t_0}^t \nu(s) \left[ \int_{t_0}^s K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau)dg(\tau) \right] dg(s) = \\ & = - \int_{t_0}^t z'_{g(s)}(s, \tau) \{ K(s, \tau)z(s, \tau) \}_{\tau=t_0}^{\tau=s} - \int_{t_0}^s z(s, \tau)K'_{g(\tau)}(s, \tau)dg(\tau) \} dg(s) = \\ & = \int_{t_0}^t z'_{g(s)}(s, t_0)K(s, t_0)z(s, t_0)dg(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)dg(\tau)dg(s) = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dg(s)} [K(s, t_0)z(s, t_0)z(s, t_0)] dg(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0)z(s, t_0)z(s, t_0)dg(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)dg(\tau)dg(s) = \frac{1}{2} K(t, t_0)z^2(t, t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0)z^2(s, t_0)dg(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau)dg(\tau)dg(s) = \frac{1}{2} K(t, t_0)z^2(t, t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0)z^2(s, t_0)dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{d}{dg(s)} [K'_{g(\tau)}(s, \tau)z^2(s, \tau)] dg(\tau)dg(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau)dg(\tau)dg(s) = \\ & = \frac{1}{2} K(t, t_0)z^2(t, t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0)z^2(s, t_0)dg(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^t \frac{d}{dg(s)} [K'_{g(\tau)}(s, \tau)z^2(s, \tau)] dg(s) \right) dg(\tau) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau)dg(\tau)dg(s) = \frac{1}{2} K(t, t_0)z^2(t, t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0)z^2(s, t_0)dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(\tau)}(t, \tau)z^2(t, \tau)dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau)z^2(s, \tau)dg(\tau)dg(s) \end{aligned}$$

Отсюда для последнего двойного интеграла имеем

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K(s, \tau) \nu(\tau) \nu(s) dg(\tau) dg(s) = \frac{1}{2} K(t, t_0) z^2(t, t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0) z^2(s, t_0) dg(s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(\tau)}(t, \tau) z^2(t, \tau) dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau) z^2(s, \tau) dg(\tau) dg(s) \quad (11)$$

Подставляя полученные значения в соотношения (3) имеем

$$\int_{t_0}^t [x'(s)]^2 dg(s) + \frac{1}{2} [a(t) + b(t)] g'(t) x^2(t) + \int_{t_0}^t \left[ a(s) b(s) - \frac{1}{2} \{ [a(s) + b(s)] g'(s) \}'_{g(s)} \right] |x(s)|^2 dg(s) +$$

$$+ \frac{1}{2} K(t, t_0) z^2(t, t_0) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(s)}(s, t_0) z^2(s, t_0) dg(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t K'_{g(\tau)}(t, \tau) z^2(t, \tau) dg(\tau) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau) z^2(s, \tau) dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t f(s) [x'(s) + b(s)x(s)] dg(s) + \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)] g'(t_0) \quad (12)$$

Для вычисления интеграла в правой части соотношения (4) производим следующие преобразования:

$$\int_{t_0}^t f(s) [x'(s) + b(s)x(s)] dg(s) = \int_{t_0}^t f(s) x'(s) dg(s) + \int_{t_0}^t f(s) b(s) x(s) dg(s)$$

Отсюда применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов, получим

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |f(s)| \sqrt{\varepsilon} |x'(s)| dg(s) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t |f(s)|^2 dg(s) + \varepsilon \int_{t_0}^t |x'(s)|^2 dg(s)$$

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |f(s)| |b(s)| \sqrt{\varepsilon} |x(s)| dg(s) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t |f(s)|^2 |b(s)|^2 dg(s) + \varepsilon \int_{t_0}^t |x(s)|^2 dg(s)$$

В силу условий теоремы 1), 2), 3), 4), 5), 6) и применяя последние неравенства из (12) соотношения имеем

$$(1 - \varepsilon) \int_{t_0}^t |x'(s)|^2 dg(s) + (\alpha - \varepsilon) \int_{t_0}^t |x(s)|^2 dg(s) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t [1 + |b(s)|^2] |f(s)|^2 dg(s) + \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)] g'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t |x'(s)|^2 dg(s) + \int_{t_0}^t |x(s)|^2 dg(s) \leq \frac{1}{\beta - \varepsilon} \left\{ \int_{t_0}^t [1 + |b(s)|^2] |f(s)|^2 dg(s) + \frac{c^2}{2} [a(t_0) + b(t_0)] g'(t_0) \right\}$$

где  $\beta = \min\{1, \alpha\}$ ,  $0 < \varepsilon < \beta$ . Теорема 2 доказана.

**Пример.** Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнения первого порядка типа Вольтерра-Стилтьеса (1) при

$$t_0 = 2, \quad g(t) = \sqrt{t}, \quad a(t) = \sqrt{t} + 1, \quad b(t) = \sqrt{t} - 1 \quad \text{и} \quad K(t, s) = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t} + 1};$$

т.е. следующее линейное интегро-дифференциальное уравнения первого порядка типа Вольтерра-Стилтьеса

$$x'(t) + (\sqrt{t} + 1)x(t) + \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{t} + 1} [x'(\tau) + (\sqrt{\tau} - 1)x(\tau)] dg(\tau) = f(t), \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$x(2) = c, \quad (2)$$

Проверим выполнение условий теоремы 2:

$$g(t) = \sqrt{t}, \quad g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

$$a(t)b(t) - \frac{1}{2}[(a(t)+b(t))g'(t)]'_{g(t)} = (\sqrt{t}+1)(\sqrt{t}-1) - \frac{1}{2}\left[(\sqrt{t}+1+\sqrt{t}-1)\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]'_{g(t)} = t-1$$

$$1) \quad g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \geq 0 \quad u \quad a(t)+b(t) = 2\sqrt{t} \geq 0 \quad \text{при всех } t \in [2, \infty);$$

$$2) \quad a(t)b(t) - \frac{1}{2}[(a(t)+b(t))g'(t)]'_{g(t)} = t-1 \geq 1 > 0, \quad \forall t \in [2, \infty);$$

$$K(t,2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}+1} \geq 0, \quad K'_{g(t)}(t,1) = -\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{t}+1)^2} \leq 0,$$

$$K'_{g(s)}(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t}+1} \geq 0, \quad K''_{g(t)g(s)}(t,s) = -\frac{1}{(\sqrt{t}+1)^2} \leq 0.$$

Из этого следует что, выполняется все условие теоремы 2.

### Список литературы

1. Искандаров С. Об одном признаке ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра [Текст] / С.Искандаров // Изв. АН Киргиз. ССР. – 1978. – № 3. – с. 30-33.
2. Искандаров С. Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной [Текст] // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С.185-192.
3. Искандаров С. К вопросу о принадлежности пространству  $L^2[t_0, \infty)$  решения линейного интегрального уравнения типа Вольтерра [Текст] // Там же. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып.13. – С. 193-198.
4. Вельд Ю.А. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Ю.А.Вельд, З. Пахыров З. // Исслед. по интегро - дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1973. – Вып. 9. – С. 68–103.
5. Винокуров В.Р. Асимптотическое поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра [Текст] / В.Р.Винокуров // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, №10. – С. 1732-1744.
6. Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро - дифференциальных уравнений [Текст] / З.Б.Цалюк // Мат. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – С.103-107.
7. Цалюк З.Б. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтерра [Текст] / З.Б.Цалюк, М.М. Шамсутдинов // Мат. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1971. – С.63-71.
8. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра [Текст] / А.Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 13–18.
- [9]. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции [Текст] / А.Асанов // Табигый илимдер журналы /// Кыргызско-Турецкий ун-т «Манас».– Бишкек: 2001. – С. 18-64.