ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

МАМАТКАСЫМОВА А.Т., САТЫБАЕВ А. ДЖ.
ОШСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519 .633 ,517 .962 .2

Постановка задачи. Рассмотрим задачу для системы уравнений Максвелла следующего вида [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial t}-\frac{\partial W_1}{\partial z}+a_1(z)W_1(z,t)+a_2(z)W_2(z,t)+a_3(z)W_3(z,t)+\lambda_1\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\cdot\sqrt{\frac{\mu_1(0)}{2}}\delta(z,t)=0,\\
&\frac{\partial W_2}{\partial t}+\frac{\partial W_2}{\partial z}+b_1(z)W_1(z,t)+b_2(z)W_2(z,t)+b_3(z)W_3(z,t)+\lambda_1\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}\cdot\sqrt{\frac{\mu_1(0)}{2}}\delta(z,t)=0,\\
&\frac{\partial W_3}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}a_3(z)W_1(z,t)-\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}a_3(z)W_2(z,t)=0
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$W_1(z,t)\big|_{t<0}\equiv 0,\ W_2(z,t)\big|_{t<0}\equiv 0,\ W_3(z,t)\big|_{t<0}\equiv 0,\quad(2)$$

$$\left[\frac{W_1(z,t)+W_2(z,t)}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right]_{z=0}=0,\quad \left[\frac{W_1(z,t)-W_2(z,t)}{\sqrt{\mu_1}}\right]_{z=0}=0,\qquad(3)$$

где λ_1,λ_2-коэффициенты гармоники Фурье,

$$a_j(z)=\frac{\bar\sigma_1}{2\bar\varepsilon_1}-(-1)^j\frac{\sqrt{\bar\mu_1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar\mu_1}}\right)'+\frac{\sqrt{\bar\varepsilon_1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar\varepsilon_1}}\right)',\quad j=1,2;$$

$$b_j(z)=\cdot\frac{\bar\sigma_1}{2\bar\varepsilon_1}-(-1)^j\frac{\sqrt{\bar\mu_1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar\mu_1}}\right)'+\frac{\sqrt{\bar\varepsilon_1}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar\varepsilon_1}}\right)',\quad j=1,2;$$

$$a_3(z)=\frac{1}{\sqrt{2\bar\varepsilon_1\mu_2}};\qquad\qquad b_3(z)=\frac{1}{\sqrt{2\bar\varepsilon_1\bar\mu_2}}$$

Обозначим через $\lambda=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$, $\quad d(0)=\frac{\lambda_1}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu_1(0)}{2}}$,

Условие (3) перепишем в виде

$$W_1(-0,t)=r_2W_2(-0,t)+r_1W_1(+0,t),\quad W_2(-0,t)=r_3W_2(-0,t)+r_2W_2(+0,t),\quad(4)$$

где $r_1=\dfrac{2}{\omega\sqrt{\varepsilon_1^+\mu_1^+}};\quad r_2=\dfrac{1}{\omega\sqrt{\varepsilon_1^+\mu_1^-}}-\dfrac{1}{\omega\sqrt{\varepsilon_1^-\mu_1^+}};\ r_3=\dfrac{2}{\omega\sqrt{\varepsilon_1^-\mu_1^-}},$

$$\omega_2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^+\mu_1^-}}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^-\mu_1^+}},\ \varepsilon_1^\pm=\lim_{z\to\pm0}\varepsilon_1(z),\ \mu_1^\pm=\lim_{z\to\pm0}\mu_1(z)$$

Условие (3) означает соответствия функций $W_1(z,t),W_2(z,t),W_3(z,t)$ на границе области $z=0$.

По методике выделения особенностей, разработанной В.Г. Романовым [2], выделим сингулярную и регулярную часть решения прямой задачи. Для этого решение задачи (1)–(2) представим в виде

$$\left.\begin{aligned}
&W_1(z,t)=V_1(z,t)+p_1(z)\delta(t+z)+p_3(z)\delta(t+z)\theta(-z),\\
&W_2(z,t)=V_2(z,t)+p_2(z)\delta(t-z),\\
&W_3(z,t)=V_3(z,t),\qquad t\in R_+ .
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

где $\delta(z)$-дельта функция Дирака, $\theta(z)$-функция Хевисайда, т.е.. $\theta(z)=\begin{cases}1, & при\ z>0\\ 0, & при\ z\le 0\end{cases}$. Продифференцируя (5) получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial t}=\frac{\partial V_1}{\partial t}+p_1(z)\delta_t'(t+z)+p_3(z)\delta_t'(t+z)\theta(-z);\\
&\frac{\partial W_1}{\partial z}=\frac{\partial V_1}{\partial z}+p_{1z}'(z)\delta(t+z)+p_1(z)\delta_z'(t+z)+p_{3z}'(z)\delta(t+z)\theta(-z)+\\
&+p_3(z)\delta_z'(t+z)\theta(-z)-p_3(z)\delta(t+z)\delta(-z);\\
&\frac{\partial W_2}{\partial t}=\frac{\partial V_2}{\partial t}+p_2(z)\delta_t'(t-z);\\
&\frac{\partial W_2}{\partial z}=\frac{\partial V_2}{\partial z}+p_{2z}'(z)\delta(t-z)-p_2(z)\delta_z'(t-z);\\
&\frac{\partial W_3}{\partial t}=\frac{\partial V_3}{\partial t};\qquad \frac{\partial W_3}{\partial z}=\frac{\partial V_3}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Подставляя (6) в (1), (2) и (4) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial t}+p_1(z)\delta_t'(t+z)+p_3(z)\delta_t'(t+z)\theta(-z)=\frac{\partial V_1}{\partial z}+p_{1z}'\delta(t+z)+p_1(z)\delta_z'(t+z)+\\
&+p_{3z}'(z)\delta(t+z)\theta(-z)+p_3(z)\delta_z'(t+z)\theta(-z)-p_3(z)\delta(t+z)\delta(-z)-\\
&-a_1(z)\left[V_1(z,t)+p_1(z)\delta(t+z)+p_3(z)\delta(t+z)\theta(-z)\right]-\\
&-a_2(z)\left[V_2(z,t)+p_2(z)\delta(t-z)\right]-a_3(z)V_3(z,t)-d(t)\delta(t+z);
\end{aligned}\quad(7)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_2}{\partial t}+p_2(z)\delta_t'(t-z)=-\frac{\partial V_2}{\partial z}-p_{2z}'(z)\delta(t-z)+p_2(z)\delta_z'(t-z)-\\
&-b_1(z)\left[V_1(z,t)+p_1(z)\delta(t+z)+p_3(z)\delta(t+z)\theta(-z)\right]-\\
&-b_2(z)\left[V_2(z,t)+p_2(z)\delta(t-z)\right]-b_3(z)V_3(z,t)-d(t)\delta(z+t);
\end{aligned}\quad(8)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_3}{\partial t}=-\frac{1}{\lambda}a_3(z)\left[V_1(z,t)+p_1(z)\delta(t+z)+p_3(z)\delta(t+z)\theta(-z)\right]+\\
&+\frac{1}{\lambda}a_3(z)\left[V_2(z,t)+p_2(z)\delta(t-z)\right]
\end{aligned}\quad(9)$$

Сокращая одинаковые члены, затем приравнивая к нулю при одинаковых коэффициентах δ, δ', θ из (7), (8), (9) получим задачи

$$\left.\begin{aligned}
&p_{1z}'(z)-a_1(z)p_1(z)=0,\\
&p(t)=d(t),\quad z\in(-T,0)
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{array}{l} p'_{2z}(z)+b_2(z)p_2(z)=0, \quad z\in(0,T); \\ p_2(0)=(1+r_2)d(0); \end{array}\right\} \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} p'_{3z}(z)=-a_1(z)p_3(z); \quad z\in(-T,0); \\ p_3(0)=r_2 d(0); \end{array}\right\} \quad (12)$$

Предположим, что относительно коэффициентов выполнено условие

$$(a_l(z), b_l(z)) \in \{\rho(z)\in C^2(R_+),\ \ \rho'_z(0)=0,\ \ 0<M_1<\rho(z)\le M_2,\ \ \|\rho\|_C\le M_3\},\ \ l=\overline{1,2}; \quad (13)$$

$M_1,\quad M_2,\quad M_3$ - положительные константы.

Определим область

$$\Pi(0,T)=\bigcup_{j=1}^{3}\Pi_j(0,T), \qquad j=\overline{1,3}$$

$$\Pi_1(0,T)=\{(z,t): z\in(-T,0),\ \ |z|<t<T-|z+T|\},$$

$$\Pi_2(0,T)=\{(z,t): z\in(-T,0),\ \ -z<t<2T+z\},$$

$$\Pi_3(0,T)=\{(z,t): z\in(0,T),\ \ z<t<2T-z\}.$$

Тогда для сингулярной части задачи (1), (2), (4) получим следующие задачи с данными на характеристиках

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}-\frac{\partial V_1}{\partial z}+a_1(z)V_1(z,t)+a_2(z)V_2(z,t)+a_3(z)V_3(z,t)=0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{\partial V_2}{\partial z}+b_1(z)V_1(z,t)+b_2(z)V_2(z,t)+a_3(z)V_3(z,t)=0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t}+\frac{1}{\lambda}a_3(z)V_1(z,t)-\frac{1}{\lambda}a_3(z)V_2(z,t)=0, \quad (z,t)\in\Delta(T). \quad (16)$$

На характеристиках уравнений выполняются:

$$V_2(z,t)\Big|_{t=z}=-\frac{1}{2}b_1(z)p_1(z), \qquad z\in[0,T], \quad (17)$$

$$V_3(z,t)\Big|_{t=z}=a_3(z)p_1(z), \qquad z\in[0,T], \quad (18)$$

$$V_j(z,t)\Big|_{z=0}=g_j(t), \quad j=\overline{1,2}; \qquad t\in[0,2T], \quad (19)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_j(z)=\dfrac{\sigma_1(z)}{2\varepsilon_1(z)}+(-1)^j\dfrac{\mu'_{1z}(z)}{4\mu(z)}-\dfrac{\varepsilon'_{1z}(z)}{4\varepsilon_1(z)}; \\ b_j(z)=\dfrac{\sigma_1(z)}{2\varepsilon_1(z)}+(-1)^j\dfrac{\mu'_{1z}(z)}{4\mu(z)}+\dfrac{\varepsilon'_{1z}(z)}{4\varepsilon_1(z)}; \end{array}\right\} \quad (20)$$

$$a_3(z)=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_1(z)\mu_2(z)}}; \qquad b_3(z)=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_1(z)\mu_2(z)}}; \quad (21)$$

Из дифференциальных задач (10) – (12) получим

$$
\left.
\begin{aligned}
&p_1(z) = d_0 + \int_0^z a_1(\xi)\, p_1(\xi)\, d\xi, \qquad z \in [0,-T],\\
&p_2(z) = (1 + r_2)\, d_0 + \int_0^z b_2(\xi)\, p_2(\xi)\, d\xi, \qquad z \in [0,T],\\
&p_3(z) = r_2 d_0 - \int_0^z a_1(\xi)\, p_3(\xi)\, d\xi, \qquad z \in [0,-T]
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

Численное решение. Для численного решения обратной задачи $(4)-(6)$, $(7)-(9)$ с данными на характеристиках и граничными условиями введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \{(z_i, t_k):\ z_i = ih, \quad t_k = kh, \quad i = \overline{0,N}; \quad k = \overline{0,2N}; \quad z_i < t_k < 2T - z_i, \quad h = T/N\},$$

где h-шаг сетки, и составим конечно-разностный аналог обратной задачи $(4)-(9)$, при этом отбрасываем малый член $O(h)$:

$$(U_{1,i}^{k+1} - U_{1,i}^{k}) - (U_{1,i+1}^{k} - U_{1,i}^{k}) + h\left[b_{1,i}U_{1,i}^{k} + b_{2,i}U_{2,i}^{k} + b_{3,i}U_{3,i}^{k}\right] = 0, \qquad (13)$$

$$(U_{2,i}^{k+1} - U_{2,i}^{k}) + (U_{2,i}^{k} - U_{2,i-1}^{k}) + h\left[a_{1,i-1}U_{1,i-1}^{k} + a_{2,i-1}U_{2,i-1}^{k} + a_{3,i-1}U_{3,i-1}^{k}\right] = 0, \qquad (14)$$

$$(U_{3,i}^{k+1} - U_{3,i}^{k}) + \lambda a_{3,i}(U_{1,i}^{k} + U_{2,i}^{k}) = 0. \qquad (15)$$

$$U_{2,i}^{i} = -\frac{1}{2} b_{1,i} q_i, \quad i = \overline{0,-N}; \qquad (16)$$

$$U_{3,i}^{i} = -a_{3,i} q_i, \quad i = \overline{0,N}; \qquad (16')$$

$$U_{j,o}^{k} = g_j^{k}, \quad j = \overline{1,2}; \quad k = \overline{0,2N}; \qquad (17)$$

$$q_{i+1} = d_0 + h\sum_{l=0}^{i} a_{1,l} q_l, \quad i = \overline{0,N-1}; \qquad (17')$$

$$a_{l,i} = \frac{\sigma_{1,i}}{2\varepsilon_{1,i}} \mp \frac{\mu_{1,i} - \mu_{1,i-1}}{4h\mu_i} - \frac{\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{1,i-1}}{4h\varepsilon_{1,i}}; \quad l = \overline{1,2};$$

$$b_{l,i} = \frac{\sigma_{1,i}}{2\varepsilon_{1,i}} \mp \frac{\mu_{1,i} - \mu_{1,i-1}}{4h\mu_i} + \frac{\varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{1,i-1}}{4h\varepsilon_{1,i}}; \quad l = \overline{1,2};$$

Из (13) получим выражение

$$U_{1,i+1}^{k} = U_{1,i}^{k+1} - U_{1,i}^{k} + U_{1,i}^{k} + h\left[b_{1,i}U_{1,i}^{k} + b_{2,i}U_{2,i}^{k} + b_{3,i}U_{3,i}^{k}\right]; \qquad (18)$$

$$U_{1,i}^{k+1} = U_{1,i-1}^{k+2} + h\left[b_{1,i-1}U_{1,i-1}^{k+1} + b_{2,i-1}U_{2,i-1}^{k+1} + b_{3,i-1}U_{3,i-1}^{k+1}\right];$$

$$U_{1,i-1}^{k+2} = U_{1,i-2}^{k+3} + h\left[b_{1,i-2}U_{1,i-2}^{k+2} + b_{2,i-2}U_{2,i-2}^{k+2} + b_{3,i-2}U_{3,i-2}^{k+2}\right];$$

$$U_{1,i-2}^{k+3} = U_{1,i-3}^{k+4} + h\left[b_{1,i-3}U_{1,i-3}^{k+3} + b_{2,i-3}U_{2,i-3}^{k+3} + b_{3,i-3}U_{3,i-3}^{k+3}\right];$$

$$U_{1,i-3}^{k+4} = U_{1,i-4}^{k+5} + h\left[b_{1,i-4}U_{1,i-4}^{k+4} + b_{2,i-4}U_{2,i-4}^{k+4} + b_{3,i-4}U_{3,i-4}^{k+4}\right];$$

....

$$U_{1,i-i+1}^{k+i} = U_{1,i-i}^{k+k+1} + h\left[b_{1,i-i}U_{1,i-i}^{k+i} + b_{2,i-i}U_{2,i-i}^{k+i} + b_{3,i-i}U_{3,i-i}^{k+i}\right];$$

$$U_{1,1}^{k+i} = U_{1,0}^{k+i+1} + h\left[b_{1,0}U_{1,0}^{k+i} + b_{2,0}U_{2,0}^{k+i} + b_{3,0}U_{3,0}^{k+i}\right];$$

Подставляя последовательно полученные последние выкладки в (18) получим

$$U_{1,i+1}^{k} = g_1^{k+i+1} + h\sum_{l=0}^{i}\left(b_{1,l}U_{1,l}^{k+i-l} + b_{2,l}U_{2,l}^{k+i-l} + b_{3,l}U_{3,l}^{k+i-l}\right); \quad k=\overline{i,2N-i} \quad (29)$$

Из (24) получим выражение

$$U_{2,i}^{k+1} = U_{2,i-1}^{k} + h\left(a_{1,i-1}U_{1,i-1}^{k} + a_{2,i-1}^{k}U_{2,i-1}^{k} + a_{3,i-1}^{k}U_{3,i-1}^{k}\right); \quad (30)$$

Отсюда

$$U_{2,i-1}^{k} = U_{2,i-2}^{k-1} + h\left(a_{1,i-2}U_{1,i-2}^{k-1} + a_{2,i-2}^{k}U_{2,i-2}^{k-1} + a_{3,i-2}U_{3,i-2}^{k-1}\right);$$

$$U_{2,i-2}^{k-1} = U_{2,i-3}^{k-2} + h\left(a_{1,i-3}U_{1,i-3}^{k-2} + a_{2,i-3}^{k}U_{2,i-3}^{k-2} + a_{3,i-3}U_{3,i-3}^{k-2}\right);$$

$$U_{2,i-3}^{k-2} = U_{i-4}^{k-3} + h\left(a_{1,i-4}U_{1,i-4}^{k-3} + a_{2,i-4}U_{2,i-4}^{k-3} + a_{3,i-4}U_{3,i-4}^{k-3}\right);$$

....

$$U_{2,i-i+1}^{k-i+2} = U_{2,i-i}^{k-i+1} + h\left(a_{1,i-i}U_{1,i-i}^{k-i+1} + a_{2,i-i}U_{2,i-i}^{k-i+1} + a_{3,i-i}U_{3,i-i}^{k-i+1}\right);$$

$$U_{2,1}^{k-i+2} = U_{2,0}^{k-i+1} + h\left(a_{1,0}U_{1,0}^{k-i+1} + a_{2,0}U_{2,0}^{k-i+1} + a_{3,0}U_{3,0}^{k-i+1}\right);$$

Подставляя последовательно последние полученные выражения в (30) получим $k=\overline{i,2N-i}$

$$U_{2,i}^{k+1} = U_{2,0}^{k-i+1} + h\sum_{l=0}^{i}\left(a_{1,l}U_{1,l}^{k-i+l} + a_{2,l}U_{2,l}^{k-i+l} + a_{3,l}U_{3,l}^{k-i+l}\right), \quad (31')$$

Отсюда

$$U_{2,i+1}^{k} = g_2^{k-i-1} + h\sum_{l=0}^{i+1}\left(a_{1,l}U_{1,l}^{k-i+l} + a_{2,l}U_{2,l}^{k-i+l} + a_{3,l}U_{3,l}^{k-i+l}\right), \quad (31)$$

Из (25) получим выражение

$$U_{3,i}^{k+1} = U_{3,i}^{k} - \lambda h\cdot a_{3,i}\cdot\left(U_{1,i}^{k} + U_{2,i}^{k}\right)$$

$$U_{3,i}^{k} = U_{3,i}^{k-1} - \lambda h\cdot a_{3,i}\cdot\left(U_{1,i}^{k-1} + U_{2,i}^{k-1}\right)$$

(32)

....

$$U_{3,i}^{i+1} = U_{3,i}^{i} - \lambda h\cdot a_{3,i}\cdot\left(U_{1,i}^{i} + U_{2,i}^{i}\right)$$

Подставляя последовательно полученные последние выражения в (32) получим

$$U_{3,i}^{k+1} = U_{3,i}^{i} - \lambda h\cdot\sum_{l=i}^{k}a_{3,i}\cdot\left(U_{1,i}^{k} + U_{2,i}^{k}\right), \quad (33')$$

Отсюда

$$U_{3,i+1}^{k} = -a_{3,i+1}q_{i+1}U_{3,i+1}^{i+1} - \lambda h\cdot\sum_{l=i}^{k-1}a_{3,i}\cdot\left(U_{1,i}^{l} + U_{2,i}^{l}\right), \quad (33)$$

Из (26) – (27) получим

$$U_{2,i+1}^{i+1} = -\frac{1}{2}b_{1,i+l}q_{l+1,} \qquad U_{3,i+1}^{i+1} = -a_{3,i+1}q_{i+1};$$

$$q_{i+1} = d_0 + h\sum_{l=0}^{i}a_{1,l}q_l, \qquad i=\overline{0,N-1};$$

Обозначим через

$$\Phi_{1,i+1}^{k} = U_{1,i+1}^{k}, \quad \Phi_{2,i+1}^{k} = U_{2,i+1}^{k}, \quad \Phi_{3,i+1}^{k} = U_{3,i+1}^{k}, \quad \Phi_{4,i+1} = U_{2,i+1}^{i+1}, \quad \Phi_{5,i+1} = U_{3,i+1}^{i+1}, \quad \Phi_{6,i+1} = q_{i+1},$$

$$F_{1,i+1}^{k} = q_1^{k+i+1}, \quad F_{2,i+1}^{k} = q_2^{k-i-1}, \quad F_{3,i+1} = -a_{3,i+1}q_{i+1}; \quad F_{4,i+1} = 0; \quad F_{5,i+1} = 0; \quad F_{6,i+1} = d_0;$$

$$\Psi_{1,l}^{i,k}=h\sum_{l=0}^{i}\left(a_{1,l}u_{1,l}^{k+i-l}+b_{2,l}u_{2,l}^{k+i-l}+b_{3,l}u_{3,l}^{k+i-l}\right),\quad \Psi_{2,l}^{i,k}=h\sum_{l=0}^{i}\left(a_{1,l}U_{1,l}^{k-i+l}+b_{2,l}U_{2,l}^{k-i+l}+b_{3,l}U_{3,l}^{k+i-l}\right);$$

$$\Psi_{3,l}^{i,k}=-h\lambda\sum_{l=i}^{k-1}.a_{3,i}\left(U_{1,i}^{l}-U_{2,i}^{l}\right),\quad \Psi_{4,i}=-\frac{1}{2}b_{1,i}q_i;\quad \Psi_{5,i}=-a_{3,i}q_i;\ \Psi_{6,i}=h\sum_{l=0}^{i}a_{1,l}q_l;$$

Тогда получим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\Phi_{i+1}^{k}=F_{i+1}^{k}+\Lambda_{i,k}(\Psi),\quad i=\overline{0,N-1},\quad k=\overline{i+1,\,2N-i-1};\ (14)$$

Такие же выкладки можно сделать для точного решения обратной задачи $(4)-(9)$, т.е. для разностного аналога с $O(h)$.

Обозначим их через $\overline{U}_{1,i}^{k}$, $\overline{U}_{2,i}^{k}$ $\overline{U}_{3,i}^{k}$, $\overline{q}_i$, $\overline{a}_{l,i}$, $\overline{b}_{l,i}$, $l=1,2;$

Тогда для них также можно получить

$$\overline{\Phi}_{i+1}^{k}=\overline{F}_{i+1}^{k}+\Lambda_{i,k}(\overline{\Psi})+O(h),\ (14')$$

Из $(14)-(14')$ можно получить оценку

$$\left\|\Phi_{i+1}^{k}-\overline{\Phi}_{i+1}^{k}\right\|_C\le\left\|F_l^{k}-\overline{F}_i^{k}\right\|_C+\Lambda\left(\Psi_i^{k}-\overline{\Psi}_i^{k}\right).$$

Введем обозначения

$$\Delta_i=\max_{i=\overline{0,N}}\left|\Phi_l^{k}-\overline{\Phi}_l^{k}\right|,\qquad \delta_i=\max_{i=\overline{0,N}}\left|F_l^{k}-\overline{F}_l^{k}\right|,\qquad k=\overline{i,2N-i}.$$

Тогда используя дискретный аналог формулы Гронуолла-Беллмана к последней формуле получим оценку

$$\max_{i=\overline{0,N}}\left\|\Delta_i\right\|_C\le\left\|\delta_i\right\|_C*\exp\left(\Lambda\left\|\Delta_i\right\|_C\right),\ (15)$$

Таким образом, получено утверждение следующей теоремы

Теорема. Пусть для $g_j(t)\in C^2[0,2T]$, $j=\overline{1,2}$ решение обратной задачи $(4)-(9)$ существует и удовлетворяет условие (3) и пусть $W_j(x,t)\in C^2(\overline{D(T)})$.

Тогда построенное приближенное решение конечно-разностным методом обратной задачи $(13)-(17)$ сходится к точному решению обратной задачи $(4)-(9)$ в классе C со скоростью порядка $O(h)$, при некотором “малом” T.

Литература:

1. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. Москва: Науки, 1991.
2. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М. :Научный мир. 2005.