Бугубаева Ж.Т.
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына

УДК. 517. 944

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

В пространстве $C(D_0)$, $D_0=\{[0,b]\times[0,T]\}$ рассмотрим нелинейное двумерное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x,\tau)+\int_0^x\Big(K(x,t,\tau)u(t,\tau)+N\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)\Big)dt=g(x,\tau),\quad (1)$$

где для заданных функций $p(x)$, $g(x,\tau)$, $K(x,t,\tau)$, $N\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)$ выполняются следующие условия:

а) $p(x)$ - невозрастающая функция,

$p(x)\in C^1[0,b]$, $\quad p^i(x)\big|_{x=b}=0$, $\quad i=0,\quad 1,\quad 2;$

б) $K(x,x,\tau)\geq 0$, $\quad K(x,t,\tau)\in C(D_1)$, $\quad D_1=\{[0\leq t\leq x\leq b]\times[0,T]\}$,

$g(x,\tau)\in C(D_0)$, $\quad D_0=\{[0,b]\times[0,T]\}$;

в) $G(x,\tau)\geq d_1$, $\quad G(x,\tau)=C_0p(x)+C_1g(x,\tau)+K(x,x,\tau)$,

$0<C_0,C_1,d_1=const;$

г) $N\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)\in C^{1,1,1,2}(D_1\times R^1)$, $\quad N(x,x,\tau,u)=0$, $\quad N_x(x,t,\tau,0)=0$.

Пусть I - единичный оператор, J и T– операторы Вольтерра вида:

$$(Jv)(x,\tau)=\int_0^x v(t,\tau)dt,\ (Tv)(x,\tau)=\int_0^x u(t,\tau)v(t,\tau)dt.$$

Действуем оператором $I+C_0J+C_1T$ на уравнение (1). Тогда получимуравнение

$$p(x)u(x,\tau)+\int_0^x G(t,\tau)u(t,\tau)dt=\int_0^x M\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)dt+$$

$$+C_1\int_0^x p(t)u^2(t,\tau)dt+C_1\int_0^x u(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)\,u(s,\tau)ds+$$

$$+C_1\int_0^x u(t,\tau)dt\int_t^x N\big(s,t,\tau,u(t,\tau)\big)ds+f(x,\tau),\quad (2)$$

где $\quad f(x)=g(x,\tau)+C_0\int_0^x g(t,\tau)dt,$

$$M\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)=-C_0\int_t^x N\big(s,t,\tau,u(t,\tau)\big)ds-N\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)+$$

$$+\left[K(t,t,\tau)-K(x,t,\tau)-C_0\int_t^x K(s,t,\tau)ds\right]u(t,\tau),$$

Рассмотрим систему уравнений с малым параметром $\varepsilon\in(0,1)$:

$$(\varepsilon+p(x))u_\varepsilon(x,\tau)+\int_0^x G(t,\tau)\,u_\varepsilon(t,\tau)\,dt=\int_0^x M\big(x,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)dt+$$

$$+C_1\int_0^x p(t)u_\varepsilon^2(t,\tau)dt+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)\,u_\varepsilon(s,\tau)ds+$$

$$+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x N\big(s,t,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)\,ds+f(x,\tau). \qquad (3)$$

С помощью резольвенты ядра $-\dfrac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(x)}$ уравнение (3) преобразуем к интегральному уравнению второго рода

$$u_\varepsilon(x,\tau)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x \frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^t M\big(t,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)-\int_0^x M\big(x,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)ds+C_1\left[\int_0^t p(s)\,u_\varepsilon^2\,(s,\tau)ds-\right.\right.$$

$$-\int_0^x p(s)u_\varepsilon^2\,(s,\tau)ds+\int_0^t u_\varepsilon(s,\tau)\,ds\int_s^t K(\nu,s,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\nu-\int_0^x u_\varepsilon(s,\tau)\,ds\times$$

$$\times\int_s^x K(\nu,s,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu+\int_0^t u_\varepsilon(s,\tau)\,ds\int_s^t N\big(\nu,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)\,d\nu-$$

$$\left.\left.-\int_0^x u_\varepsilon(s,\tau)\,ds\int_s^x N\big(\nu,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)\,ds\right]-[f(t,\tau)-f(x,\tau)]\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\left\{\int_0^x M\big(x,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)\,dt+\right.$$

$$+C_1\left[\int_0^x p(t)\,u_\varepsilon^2(t,\tau)dt+\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)\,u_\varepsilon(s,\tau)\,ds+\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)dt\times\right.$$

$$\left.\left.\times\int_t^x N\big(s,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)\,ds\right]+f(x,\tau)\right\}\equiv(Au_\varepsilon)(x,\tau). \qquad (4)$$

Введем обозначение

$\Omega=\{u(x,\tau)\in C(D_0):|u(x,\tau)-u_0|\le r_1,\qquad 0<u_0,r_1=const\};$

$\Omega^\gamma=\{u(x,\tau)\in\Omega:|u(x,\tau)-u(t,\tau)|\le M_0(x-t)^\gamma,$

$0<\gamma\le 1,\quad 0<M_0=const\};$

$K_N=\max\limits_{D_1\times R^1}\left|N_u\big(x,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)\right|;\, M_N=\max\limits_{D_1\times R^1}\left|N\big(x,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)\right|.$

Пусть $\bar u_\varepsilon(x,\tau),\tilde u_\varepsilon(x,\tau)\in\Omega$. Рассмотрим оценки следующих выражений

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x \frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times\right.$$

$$\times\left\{\int_0^t\left[K(s,s,\tau)-K(t,s,\tau)-C_0\int_s^t K(\nu,s,\tau)\,d\nu\right]|\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)|\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_t^x\left[K(s,s,\tau)-K(x,s,\tau)-C_0\int_s^x K(\nu,s,\tau)\,d\nu\right]|\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)|ds\right\}dt\Bigg|\le$$

$$\le\frac{L_k+C_0M}{d_1\theta_2^2}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|dt;$$

$$\left|\frac{C_0}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times\right.$$

$$\times\left\{\int_0^t\int_t^x\left[N\big(\nu,s,\tau,\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(\nu,s,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)\right]d\nu ds+\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^x\int_s^x\left[N\big(\nu,s,\tau,\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(\nu,s,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)\right]d\nu\, ds\right\}dt\right|\le$$

$$\le\frac{C_0K_N}{d_1\theta_2^2}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|\,dt;$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times\right.$$

$$\times\left\{\int_0^t\left[N\big(x,s,\tau,\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(x,s,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)\right]d\nu+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\left[N\big(t,s,\tau,\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(t,s,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)\right]d\nu\right\}dt\le$$

$$\le\frac{C_1L_N}{d_1\theta_2^2}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|\,dt,$$

где L_N- коэффициент Липшица по x функции $N_u\big(x,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)$;

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_t^x\left[N\big(x,s,\tau,\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(x,s,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)\right]dsdt\right|\le$$

$$\le\frac{C_1K_N}{d_1\theta_2^2}\|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\|_c;$$

$$\left|\frac{C_1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\right\{\int_0^t[\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)]ds\times$$

$$\times \int_t^x N\big(\nu, s, \tau, u_\varepsilon(s)\big)\, d\nu + \int_t^x [\bar{u}_\varepsilon(s,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)]ds \times$$

$$\times \int_s^x N\big(\nu, s, \tau, u_\varepsilon(s,\tau)\big)\, d\nu \Big\} dt \Bigg| \le \frac{C_1 M_N}{d_1 \theta_2^2} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|\, dt;$$

$$\Bigg| \frac{C_1}{\varepsilon + p(x)} \int_0^x \frac{G(t,\tau)}{\varepsilon + p(t)} exp\left(- \int_t^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \Bigg\{ \int_0^t u_\varepsilon(s,\tau)\, ds \times$$

$$\times \int_t^x [N\big(\nu, s, \tau, \bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big) - N\big(\nu, s, \tau, \tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)]\, d\nu + \int_t^x u_\varepsilon(s,\tau) ds \times$$

$$\times \int_s^x [N\big(\nu, s, \tau, \bar{u}_\varepsilon(s,\tau)\big) - N\big(\nu, s, \tau, \tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\big)] d\nu \Bigg\} dt \Bigg| \le$$

$$\le \frac{C_1 r K_N}{d_1 \theta_2^2} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|\, dt;$$

$$\Bigg| \frac{1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(- \int_0^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \int_0^x (\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau))[K(x,t,\tau) - K(t,t,\tau) +$$

$$+ C_0 \int_t^x K(s,t,\tau) ds]\, dt \Bigg| \le (L_k + C_0 M) b\, p^{-1}(0) \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)| dt;$$

$$\Bigg| \frac{C_1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(- \int_0^x \frac{G(s,\tau) ds}{\varepsilon + p(s)} \right) \int_0^x [N(x,t,\tau,\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)) - N(x,t,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau))] dt \Bigg| \le$$

$$\le C_1 K_N p^{-1}(0) \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)| dt;$$

$$\Bigg| \frac{C_1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(- \int_0^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \times$$

$$\times \int_0^x \int_t^x [N(s,t,\tau,\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)) - N(s,t,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau))] ds\, dt \Bigg| \le$$

$$\le \frac{C_1 K_N b}{p(0)} \int_0^x |\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)| dt;$$

$$\Bigg| \frac{C_1}{\varepsilon + p(x)} exp\left(- \int_0^x \frac{G(s,\tau)}{\varepsilon + p(s)} ds \right) \times$$

$$\times \Bigg\{ \int_0^x [\bar{u}_\varepsilon(t,\tau) - \tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)] dt \int_t^x N\big(s, t, \tau, u_\varepsilon(t,\tau)\big)\, ds +$$

$$+\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)\,dt\int_t^x [N(s,t,\tau,\bar{u}_\varepsilon(t,\tau))-N(s,t,\tau,\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau))]\,ds\Bigg\}\Bigg|\le$$

$$\le\frac{C_1 b(M_N+rK_N)}{p(0)}\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|\,dt.$$

Таким образом, для оператора A получим следующее неравенство:

$$|(A\bar{u}_\varepsilon)(x,\tau)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x,\tau)|\le q_0\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\|_{C(D_0)}+$$

$$+(q_1+q_2)\int_0^x|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)|\,dt,$$

или

$$\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x,\tau)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x,\tau)\|_{C(D_0)}\le(q_0+q_1+q_2)\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\|_{C(D_0)},$$

где $q_0=C_1K_Nd_1^{-1}\theta_2^{-2}+\ 2C_1rb\theta_2^{-2}(L_kbd_1^{-1}+1)$;

$q_1=2C_1r\left(\theta_2^{-1}+1+\theta_2^{-2}(L_kbd_1^{-1}+1)+(\|p(x)\|_C+Mb)p^{-1}(0)\right)$;

$q_2=\left(L_k+C_0(M+K_N)+C_1(L_N+M_N+K_Nr)\right)d_1^{-1}\theta_2^{-2}+$

$+\left(C_1K_N+(L_k+C_0M)b+C_1b(M_N+K_N(1+r))\right)p^{-1}(0)$.

Для оператора $\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)$, заданного в виде

$$\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)\equiv\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)u(x)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)[u(x)-u(t)]\,dt,$$

имеет место [1, стр. 47]

Лемма 1. Если выполняются условия *а) - г)* и $u(x,\tau)\in C(D_0)$, то справедлива оценка

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)\|_{C(D_0)}\le\left(3\varepsilon+4d_2\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x,\tau)\|_{C(D_0)}+d_3\omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $d_2=1/(\theta_2^2d_1e)$, $\quad d_3=1+\theta_2^{-1}$, $\quad \theta_2=1-\theta_1$,

$$\omega_u(\varepsilon^\beta)=\sup_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}|u(x,\tau)-u(t,\tau)|,\qquad 1/2\le\beta<1.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия *а) - г)*, $q=(q_0+q_1+q_2)$<1 и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau)\in\Omega$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1), при этом справедлива оценка

$\|u_\varepsilon(x,\tau)-u(x,\tau)\|_{C(D_0)}\le(1-q)^{-1}\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)\|_{C(D_0)}$.

Доказательство. С помощью подстановки

$$\eta_\varepsilon(x,\tau)=u_\varepsilon(x,\tau)-u(x,\tau),\qquad(5)$$

из уравнения (4) получим

$$\eta_\varepsilon(x,\tau)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x\frac{G(t,\tau)}{\varepsilon+p(t)}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\times$$

$$\times\Bigg\{\int_0^t\Big[M\big(t,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)-M\big(t,s,\tau,u(s,\tau)\big)+M\big(x,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)-$$

$$-M\big(x,s,\tau,u(s,\tau)\big)\big]ds+\int_t^x\big[M\big(x,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)-M\big(x,s,\tau,u(s,\tau)\big)\big]\,ds-$$

$$-C_1\Bigg[\bigg[\int_t^x p(s)[u_\varepsilon(s,\tau)+u(s,\tau)]\eta_\varepsilon(s,\tau)\,ds+\int_0^t \eta_\varepsilon(s,\tau)ds\times$$

$$\times\int_t^x K(\nu,s,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu+\int_t^x \eta_\varepsilon(s,\tau)\,ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu+$$

$$+\int_0^t u(s,\tau)ds\int_t^x K(\nu,s,\tau)\,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\nu+\int_t^x u(s,\tau)\,ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu+$$

$$+\int_0^t \eta_\varepsilon(s,\tau)ds\int_t^x N\big(\nu,s,\tau,u(s,\tau)\big)\,d\nu+\int_t^x \eta_\varepsilon(s,\tau)\,ds\int_s^x N\big(\nu,s,\tau,u(s,\tau)\big)\,d\nu+$$

$$+\int_0^t u(s,\tau)ds\int_t^x\big[N\big(\nu,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(\nu,s,\tau,u(s,\tau)\big)\big]\,d\nu+\int_t^x u(s,\tau)ds\times$$

$$\times\int_s^x\big[N\big(\nu,s,\tau,u_\varepsilon(s,\tau)\big)-N\big(\nu,s,\tau,u(s,\tau)\big)\big]\,d\nu\Bigg]-\varepsilon[u(t,\tau)-u(x,\tau)]\Bigg\}dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s,\tau)ds}{\varepsilon+p(s)}\right)\left\{\int_0^x\big[M\big(x,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)-\right.$$

$$-M\big(x,t,\tau,u(t,\tau)\big)\big]dt+C_1\bigg[\int_0^x p(t)[u_\varepsilon(t,\tau)+u(t,\tau)]\eta_\varepsilon(t,\tau)dt+$$

$$+\int_0^x \eta_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)\,u(s,\tau)ds+\int_0^x u(t,\tau)\,dt\int_t^x K(s,t,\tau)\,\eta_\varepsilon(s,\tau)ds+$$

$$+\int_0^x \eta_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x N\big(s,t,\tau,u(t,\tau)\big)\,ds+\int_0^x u(t,\tau)dt\times$$

$$\left.\times\int_t^x\big[N\big(s,t,\tau,u_\varepsilon(t,\tau)\big)-N\big(s,t,\tau,u(t,\tau)\big)\big]ds\bigg]+\varepsilon u(x,\tau)\right\}.$$

Производя оценки, имеем неравенство
$\|\eta_\varepsilon(x,\tau)\|_{C(D_0)}\le q\|\eta_\varepsilon(x,\tau)\|_{C(D_0)}+\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)\|_{C(D_0)}$.
Отсюда при $q<1$ следует оценка теоремы 1. Следовательно, при $\varepsilon\to 0$ функция $u_\varepsilon(x,\tau)\to u(x,\tau)$ равномерно. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в Ω.

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau)\in\Omega^\gamma$, $0<\gamma\le 1$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1), причем
$\|u_\varepsilon(x,\tau)-u(x,\tau)\|_{C(D_0)}\le M_0(\varepsilon l_0+\varepsilon^\gamma l_1)(1-q)^{-1}$,
где $l_0=b^\gamma p^{-1}(0)$, $l_1=d_1^{-\gamma}\theta_2^{-(1+\gamma)}$.

Доказательство. С помощью подстановки (5) получим неравенство

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C(D_0)} \leq q\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C(D_0)} + \|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)\|_{C(D_0)}, \qquad (6)$$

в котором оценка оператора $|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)|$ имеет вид

$$\|\varepsilon(H_\varepsilon u)(x,\tau)\|_{C(D_0)} \leq \varepsilon M_0 b^\gamma p^{-1}(0) + \varepsilon^\gamma M_0 d_1^{-\gamma}\theta_2^{-(1+\gamma)}.$$

Впоследствии неравенство (6) примет вид

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{C(D_0)} \leq (1-q)^{-1} M_0(\varepsilon l_0 + \varepsilon^\gamma l_1).$$

При $\varepsilon \to 0$ функция $u_\varepsilon(x,\tau) \to u(x,\tau)$ равномерно. Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач – Бишкек: Илим, 2006
2. Каракеев Т.Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений // Исследования по интегро – дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Выпуск 32. – С. 179 – 183.
3. Бугубаева Ж.Т. Регуляризация линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода (тезис) // Конференция НАН КР «Старт в большую науку». – Бишкек: 2013 г. – Стр. 16 – 17.