

УДК 622.276:517.977.1/5

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ИНДУКЦИОННОГО НАГРЕВА ОБСАДНОЙ КОЛОННЫ НЕФТЯНОЙ СКВАЖИНЫ

Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова

Исследованы закономерности влияния штрафных параметров β, γ на величину функционала энергии. Проведен сравнительный анализ горячего и промежуточного режимов нагрева. Даны рекомендации по выбору штрафных параметров в каждом режиме.

Ключевые слова: высокопарафинистые нефти; нефтеотдача пластов; индукционный нагрев; обсадная колонна; нефтяная скважина.

COMPARATIVE ANALYSIS OF OPTIMAL CONTROL PROCESS CONDITIONS OF THE OIL WELL CASING PIPE INDUCTIVE HEATING

L.G. Lelevkina, I.V. Goncharova, E.A. Komartsova

The regularities of the penalty parameters influence on the energy functional are researched. A comparative analysis of the hot and intermediate heating modes is held. Recommendations on the choice of penalty parameters in each mode are given.

Key words: highly paraffinic oil; oil recovery; induction heating; casing; oil well

Введение. По материалам геолого-геофизических исследований общие прогнозные ресурсы нефтегазоперспективных структур Кыргызстана оцениваются в 765–1360 млн т. Как сообщается в материалах, подготовленных Министерством энергетики и промышленности к форуму “Кыргызстан – Татарстан”, состоявшемуся 3 марта 2015 г., ежегодно в Кыргызстане добывают от 70 до 90 тыс. т нефти (рисунок 1).

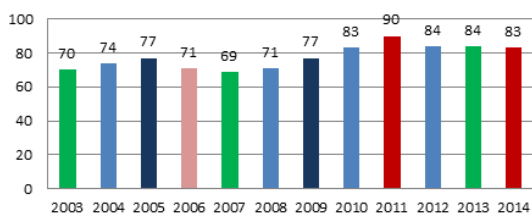


Рисунок 1 – Объемы добычи сырой нефти (тыс. т)

При разработке залежей высоковязких, высокопарафинистых нефтей, которыми являются большинство нефтей Кыргызстана, возникают проблемы, связанные с малой подвижностью флюидов, низкой проницаемостью пластов и невысокими забойными давлениями.

В настоящее время активно разрабатываются теоретические основы и практические методы

реализаций новейших технологий повышения нефтеотдачи пластов, в том числе применяются методы термического воздействия на пласт. В качестве источника тепла предлагается использовать, например, индуктор, разработанный сотрудниками кафедры прикладной физики Башкирского Государственного университета [1].

В данной работе проводится математическое моделирование процесса индукционного нагрева обсадной колонны нефтяной скважины и рассматривается процесс его оптимизации, в котором критерием качества является функционал энергии. Задача его минимизации решается методами оптимизации систем с распределенными параметрами [2].

1. Постановка задачи. Управляемый процесс индукционного нагрева в промежуточном режиме с распределенными источниками энергии в области $Q = \{0 < t \leq t_p, 0 < r < R\}$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{a}{\lambda} V(t, r) \tag{1.1}$$

с начальным условием и граничными условиями

$$T(0, r) = \varphi_1(r) \quad \frac{\partial T(t, 0)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(t, r)}{\partial r} \Big|_{r=R} = h [T_R - T(t, R)], \tag{1.2}$$

где $\frac{a}{\lambda} V(t, r) = w(r)u(t)$ и $w(r)$ – заданная функция, которая на каждом этапе нагрева задается различными аналитическими выражениями [3].

Требуется среди всех допустимых управлений $0 \leq u(t) \leq u_{max}$ найти такое управление $u_0(t)$, которое вместе с соответствующим ему решением $T^0(t, r)$ краевой задачи (1.1)–(1.2) минимизирует функционал энергии $J[u] = 2\pi l \int_0^R \int_0^{t_1} V(t, r) r dt dr$ и при $t = t_1$ выполняется $T(t_1, r) = \varphi_2(r)$. Задача минимизации функционала энергии заменяется задачей минимизации функционала вида [3]:

$$F[u, \beta, \gamma, c] = \beta \left\{ \gamma \int_0^{t_1} u(t) dt + \int_0^{t_1} [u(t) - c]^2 dt \right\} + \int_0^R r [T(t_1, r) - \varphi_2(r)]^2 dr \quad (1.3)$$

В результате замены $v(t) = u(t) - c + \frac{\gamma}{2}$ и преобразования функционала (1.3) получится квадратичный функционал

$$F[v, \beta, \gamma, c] = \beta \int_0^{t_1} v^2(t) dt + \int_0^R r [T(t_1, r) - \varphi_2(r)]^2 dr - \frac{\gamma \beta t_1 (\gamma - 4c)}{4}. \quad (1.4)$$

2. Решения основной и сопряженной задач.

При решении задачи (1.1)–(1.3) применяется метод максимума Понтрягина для систем с распределенными параметрами [2] в задаче оптимизации индукционного нагрева [3] и интегро-интерполяционный метод [4].

Рассматривается следующая итерационная задача:

$$\frac{\partial T^{(k)}(t, r)}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{(k)}}{\partial r} \right) + u^{(k-1)}(t) w(r), \quad (2.1)$$

$$T^{(k)}(0, r) = \varphi_1(r), \quad \left. \frac{\partial T^{(k)}(t, r)}{\partial r} \right|_{r=R} = h_z [T_R - T^{(k)}(t, R)] \quad (2.2)$$

Проводятся преобразования [5] с использованием квадратурной формулы

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} T^{(k)}(t, r) dt \approx \theta T^{(k)}(t_n, r) + (1 - \theta) T^{(k)}(t_{n-1}, r),$$

приводящие к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{a}{r} (r U'(r))' - b U(r) = f(r); \quad (2.3)$$

$$U'(0) = 0; \quad U'(R) = h_z [T_R - U(R)], \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$U(r) \equiv \theta T^n(r) + (1 - \theta) T^{n-1}(r), \quad T^n(r) \equiv T^{(k)}(t_n, r),$$

$$b = \frac{1}{\theta \tau}; \quad f(r) = -\frac{T^{n-1}(r)}{\theta \tau} - w(r) u_{n-1}.$$

Путем построения разностной схемы Кранка–Николсона для задачи (2.1)–(2.2), получим систему дискретных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a \frac{U_2^h - U_1^h}{h} = \frac{h}{4} (f_1 + b U_1^h); \\ a \frac{r_{i+1}^h}{r_i} S \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right) \frac{U_{i+1}^h - U_i^h}{h} - a S \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right) \frac{U_i^h - U_{i-1}^h}{h} = \\ = \frac{1}{2} (f_i + b U_i) \left[\frac{r_{i+1}}{r_i} S \left(\frac{r_i}{r_{i+1}} \right) r_{i+1/2} - S \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \right) r_{i-1/2} \right]; \\ i = \overline{1, N-1} \\ -a S \left(\frac{r_{N-1}}{r_N} \right) \frac{U_N^h - U_{N-1}^h}{h} + a h_z T_R - a h_z U_N^h = \\ = \frac{1}{2} (f_N + b U_N) \left[-S \left(\frac{r_{N-1}}{r_N} \right) r_{N-1/2} + r_N \right]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Таким образом, (2.1)–(2.2) аппроксимируется задачей (2.5), решение которой находится с помощью метода прогонки, после чего, решение исходной основной задачи (2.1)–(2.3) определяется по формуле:

$$T_i^n = \frac{1}{\theta} U_i^h - \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) T_i^{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

Решается сопряженная задача:

$$\frac{\partial \psi^{(k)}(t, r)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \psi^{(k)}(t, r)}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial \psi^{(k)}(t, r)}{\partial r} = 0,$$

$$\psi^{(k)}(t_1, r) = -2 [T^{(k)}(t_1, r) - \varphi_2(r)],$$

$$\left[\frac{\partial \psi^{(k)}(t, r)}{\partial r} + h_z \psi^{(k)}(t, r) \right]_{r=R} = 0.$$

Эта задача решается тем же методом, что и основная задача [5]. С учетом обозначения $\Phi(r) \equiv (1 - \theta) \psi^n(r) + \theta \psi^{n-1}(r)$ получается следующая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{a}{r} (r \Phi'(r))' - b \Phi(r) = f(r); \quad (2.7)$$

$$\Phi'(0) = 0; \quad \Phi'(R) = -h_z \Phi(R). \quad (2.8)$$

К этой задаче применяется схема (2.5), где $T_R = 0$, находится значение Φ_i^h , тогда итерационные значения для решения сопряженной задачи (2.6) находятся по формуле:

Таблица 1 – Результаты численных исследований влияния штрафных параметров β, γ в промежуточном режиме

$\beta\gamma$	1E-08	1E-07	1E-06	1E-05	1E-04	1E-03	1E-02	1E-01
5E+06	4443,57	4443,57	4443,59	4443,80	4445,87	4466,59	4676,42	7035,21
7E+06	347,20	347,20	347,20	347,22	347,43	349,51	370,63	608,35
9E+06	54,15	54,15	54,16	54,16	54,21	54,70	59,62	108,76
1E+07	25,74	25,74	25,74	25,74	25,77	26,10	29,37	57,98
3E+07	2,09	2,09	2,09	2,09	2,14	2,63	7,23	22,11
5E+07	2,09	2,09	2,09	2,10	2,18	3,00	10,55	29,17
9E+07	2,10	2,10	2,10	2,12	2,26	3,72	17,17	42,03
1E+08	2,10	2,10	2,10	2,12	2,28	3,90	18,82	45,14
3E+08	2,11	2,11	2,11	2,16	2,65	7,48	51,84	105,88
5E+08	2,11	2,11	2,12	2,20	3,01	11,05	84,84	166,04
1E+09	2,11	2,11	2,13	2,29	3,91	19,97	167,34	316,16

Таблица 2 – Выборочные результаты исследований влияния параметров $\beta, \gamma \in$ в горячем режиме

$\beta\gamma$	1,E-08	1,E-07	1,E-06	1,E-05	1,E-04	1,E-03	1,E-02	1,E-01
5,E+05	38,82	38,82	38,82	38,82	38,80	38,61	36,81	24,09
6,E+05	15,84	15,84	15,84	15,84	15,84	15,86	15,98	18,45
7,E+05	13,04	13,04	13,04	13,04	13,05	13,10	13,68	19,42
8,E+05	13,14	13,14	13,14	13,14	13,15	13,22	13,96	20,73
1,E+06	14,28	14,28	14,28	14,28	14,29	14,38	15,25	22,92
3,E+06	19,62	19,62	19,62	19,86	19,8	19,85	21,37	32,20
7,E+06	21,97	21,97	21,97	22,07	22,16	22,27	24,83	37,70
1,E+07	22,58	22,58	22,58	22,68	23,06	23,96	26,21	40,01
3,E+07	23,60	23,60	23,60	23,71	24,69	25,52	32,24	50,61
1,E+08	23,97	23,97	23,98	24,09	25,26	29,77	49,96	82,71

$$\psi_i^{n-1} = \frac{1}{\theta} \Phi_i^h - \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \psi_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.9)$$

После нахождения приближенного решения сопряженной задачи и использования квадратурной формулы находится оптимальное управляющее воздействие на каждом итерационном шаге по формуле

$$u^{(k)}(t_n) = \frac{1}{2\beta} \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{l-1} \{ r_i \psi_i^n w(r_i) + r_{i+1} \psi_{i+1}^n w(r_{i+1}) \} + c - \frac{\gamma}{2},$$

после чего делается переход к следующей итерации, этот процесс продолжается до тех пор, пока количество итераций не превысит определенного числа, либо когда изменение значения управления будет незначительным.

3. Анализ численных экспериментов в промежуточном и горячем режимах нагрева. Численная реализация проводится в среде Borland Delphi 7. При численных расчетах использована работа [1].

Функция распределения внутренних источников тепла в промежуточном режиме нагрева имеет вид

$$w(t, r) = \begin{cases} \frac{3824R}{(4R - \Delta_2)\Delta_2}, & \text{при } R - \frac{\Delta_2}{2} \leq r \leq R \\ 0, & \text{при } 0 \leq r \leq R - \frac{\Delta_2}{2}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где R – радиус цилиндра; Δ_2 – глубина проникновения в металл электромагнитной волны на втором этапе нагрева.

После потери магнитных свойств слоев стали, лежащем на расстоянии Δ_2 от поверхности цилиндра, начинается горячий режим, в течение которого удельная мощность и электрические параметры индуктора остаются постоянными.

Функция распределения внутренних источников тепла в горячем режиме нагрева имеет вид

$$w(r) = \frac{\sqrt{2}K (ber'^2 Z + bei'^2 Z)}{ber'ZberZ + bei'ZbeiZ}, \quad (3.2)$$

где $K = \frac{1}{\Delta_K}$, $z = \sqrt{2}rK$; $berZ$, $beiZ$, $ber'Z$, $bei'Z$ – функции Кельвина и их производные.

При исследованиях в промежуточном и горячем режимах нагрева были получены благоприятные зоны по параметру c , соответственно, равные $[0,02; 0,04]$ и $[0,02; 0,1]$.

Выборочные результаты численных исследований влияния штрафных параметров γ, β на величину минимизируемого функционала в промежуточном режиме при $A=0,03$ и времени нагрева $t=60$ представлены в таблице 1 и на рисунке 2.

В результате расчетов в промежуточном режиме получена область относительно постоянных минимальных значений функционала – зона благоприятных значений функционала при $\beta \in [1E+7; 1E+8]$, $\gamma \in [1E-4; 1E-8]$. Минимальные значения функционала наблюдаются при $\beta \in [3E+7; 5E+7]$, $\gamma \in [1E-5; 1E-8]$. Как видно на рисунке 2, в промежуточном режиме возникают две зоны флуктуации: первая зона при $\gamma \geq 1E-2$, $\beta \geq 3E+8$, вторая – при $\beta \leq 1E+7$, $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$.

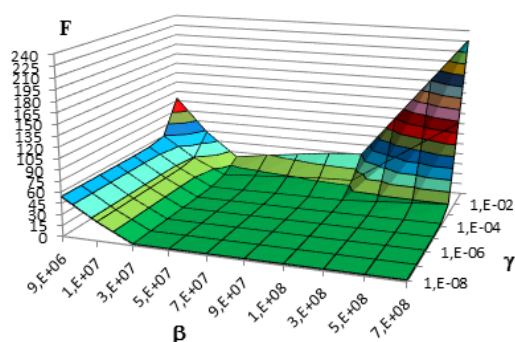


Рисунок 2 – Поверхностная диаграмма зависимости $F(\beta; \gamma)$ в промежуточном режиме при $t=60$, $c=0,03$, $\beta \in [5E+6; 1E+9]$, $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$

Выборочные результаты исследований влияния параметров β, γ в горячем режиме при $t=90$, $c=0,03$ приведены в таблице 2 и на поверхностной диаграмме (рисунок 3).

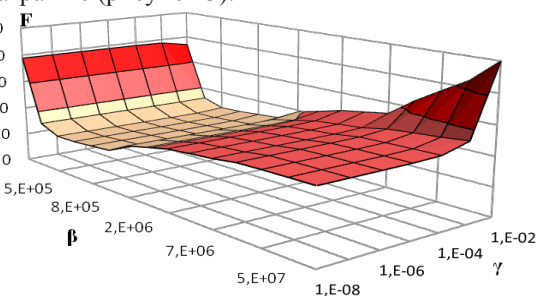


Рисунок 3 – Поверхностная диаграмма зависимости $F(\beta; \gamma)$ в горячем режиме при $t=90$, $c=0,03$, $\beta \in [5E+5; 1E+8]$, $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$

Как видно из данных таблицы 2 и поверхностной диаграммы (рисунок 3), в горячем режиме зона минимальных значений функционала наблюдается при $\beta \in [5E+5; 1E+6]$. При $\beta \in [2E+6; 1E+7]$, $\gamma \in [1E-8; 1E-6]$ выявлена зона практически по-

стоянных (стабильных) значений функционала, что наблюдается и в промежуточном режиме. Варьирование параметра γ в пределах $\beta \in [5E+5; 1E+8]$ практически не оказывает влияния на значение функционала, но при $\gamma \geq E-2$ значение функционала резко возрастает – наблюдается первая зона флуктуации. Как показали исследования, такая же закономерность имеется и при промежуточном режиме нагрева. Вторая зона флуктуаций в горячем режиме выявлена при $\beta < 5E+5$, $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$.

Из поверхностных диаграмм (рисунки 2, 3) видно, что по сравнению с промежуточным режимом, в горячем режиме нагрева зона минимальных значений функционала смещается в сторону уменьшения параметра β на два порядка. Так в промежуточном режиме нагрева зона минимальных значений при $\beta \in [3E+7; 5E+7]$, а в горячем при $\beta \in [5E+5; 1E+6]$.

Характер влияния параметра β на минимизируемый функционал в зоне благоприятных значений параметра $\gamma \in [1E-8; 1E-5]$, представлен на рисунке 4.

На рисунке 4 и из сопоставления данных таблиц 1 и 2 видно, что для обоих режимов нагрева при увеличении параметра β (для промежуточного режима до $\beta = 3E+7$, для горячего – до $\beta = 7E+5$), значения функционала сначала резко падают до минимального значения, т. е. происходит переход из зоны флуктуаций в зону минимальных значений функционала. При дальнейшем увеличении параметра β значения функционала растут, причем в промежуточном режиме рост происходит незначительными темпами, так увеличение с $\beta = 5E+7$ до $\beta = 1E+9$ приводит к росту функционала в среднем на 3%, минимальный рост зафиксирован при $\gamma = 1E-8$ и составляет 1%, максимальный – при $\gamma = 1E-5$ составляет 9%.

В горячем режиме при выходе параметра β из зоны минимальных значений в большую сторону, значения функционала растут быстрее. Так изменение параметра $\beta = 2E+6$ до $\beta = 1E+8$ приводит к росту функционала в среднем на 34%, и колеблется при варьировании параметра $\gamma \in [1E-5; 1E-8]$ в пределах 33–35%. Следовательно, влияние параметра γ в промежуточном режиме сильнее, чем в горячем.

Зависимость функционала энергии от параметра γ представлена на рисунке 5.

Из данных таблиц 1 и 2 и кривых на рисунке 4 видно, что при уменьшении параметра γ от $\gamma = 1E-1$ до $\gamma = 1E-5$ значения функционала уменьшаются тем значительнонее, чем больше β . Дальнейшее уменьшение этого параметра ниже $1E-6$ нецелесообразно, т. к. это не оказывает существенного влияния на величину функционала, как в промежуточном так и в горячем режимах нагрева.

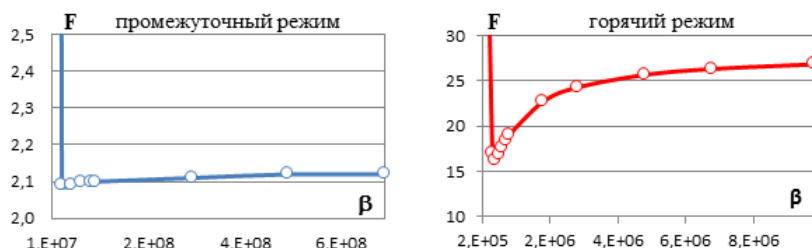


Рисунок 4 – Зависимость функционала энергии от параметра β

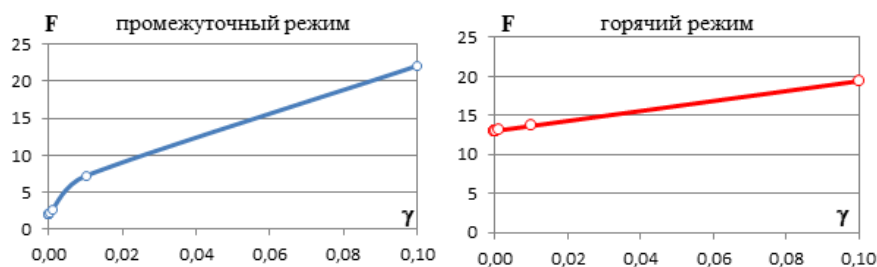


Рисунок 5 – Зависимость функционала энергии от параметра γ

Выводы. Штрафной параметр β как в горячем, так и в промежуточном режимах нагрева оказывает доминирующее влияние на величину функционала энергии. Причем в горячем режиме это влияние более существенно.

Влияние параметра γ в зонах, благоприятных по параметру β , несущественно как в горячем, так и в промежуточном режимах нагрева.

В промежуточном режиме при $\gamma = 0,1$, $\beta \in [7E+6; 1E+9]$ и при $\beta = 7E+6$, $\gamma \in [1E-6; 1E-1]$ возникают зоны флуктуации. В горячем режиме эти зоны также наблюдаются, но при $\beta < 5E+5$, $\gamma \in [1E-8; 1E-1]$ и при $\gamma \geq E-2$, $\beta > 2E+6$. При попадании параметров β , γ в зоны флуктуации, значения функционала в промежуточном режиме изменяются значительно, нежели в горячем режиме. Влияние параметра γ более существенно в промежуточном режиме.

Выявлены зоны благоприятных (стабильных) значений функционала: в промежуточном режиме нагрева при $\beta \in [1E+7; 1E+8]$, $\gamma \in [1E-4; 1E-8]$, а в горячем – при $\beta \in [2+6; 1+7]$, $\gamma \in [1E-8; 1E-6]$.

В промежуточном режиме нагрева зона минимальных значений наблюдается при $\beta \in [3E+7; 5E+7]$, а в горячем – при $\beta \in [5E+5; 1E+6]$. Таким образом, по сравнению с промежуточным режимом нагрева зона минимальных значений функционала смещается на два порядка в сторону уменьшения параметра β .

Литература

1. Ковалева Л.А., Насыров Н.М., Максимочкин В.И., Суфьянов Р.Р. Изучение теплопроводности вы-

соковязких углеводородных систем методом экспериментального и математического моделирования / Л.А. Ковалева, Н.М. Насыров, В.И. Максимочкин, Р.Р. Суфьянов // ПМТФ. 2005. Т. 46. В. 6. С. 96–102.

2. Егоров А.И. Основы теории управления / А.И. Егоров. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
 3. Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцова Е.А. Численный анализ влияния штрафных параметров на процесс оптимизации индукционного нагрева обсадной колонны нефтяной скважины в промежуточном режиме нагрева / Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова // Матер. II между. юбил. научн. конф. “Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений”. Бишкек: КРСУ, 2013. С. 52.
 4. Lelevkina L.G., Sklyar S.N. and Khlybov O.S. Optimal Control and Heat Conductivity / L.G. Lelevkina, S.N. Sklyar and O.S. Khlybov // Automation and Remote Control, Springer Science + Business Media. 2008, Vol. 69, N 4. P. 654–667.
 5. Лелевкина Л.Г., Скляр С.Н., Хлыбов О.С. Оптимальное управление процессом теплопроводности / Л.Г. Лелевкина, С.Н. Скляр, О.С. Хлыбов // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 119–133.
 6. Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцова Е.А. Применение функций Кельвина в решении задачи оптимизации индукционного нагрева обсадной колонны нефтяной скважины / Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Е.А. Комарцова // Тр. X между. Азиатской школы-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем”. Бишкек, 2014. С. 464–472.