УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э.

Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного граничного векторного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; векторное оптимальное управление; система нелинейных интегральных уравнений.

THE SOLUTION OF THE BOUNDARY VECTOR CONTROL PROBLEM FOR THE THERMAL PROCESSES, DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Kerimbekov, Seidakmat kyzy E.

It is investigated a questions of solvability of the nonlinear boundary vector optimal control problem for the thermal process, described by Volterra integro – differential equations. It is established the sufficient conditions for the unique solvability of the nonlinear optimization problem.

Key words: boundary value problem; the functional; optimal control; system of nonlinear integral equations.

I. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности. Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$L\left[\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^m\vartheta_s^2(t)\,dt,\quad \beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1–3]:

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau+g(t,x),$$

$$0<x<1,\ \ 0<t\le T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=0,\quad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=$$

$$=q\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right],\ \ 0<t\le T. \tag{4}$$

Здесь $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$, $q\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]\in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $q\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]$ нелинейно зависит от вектор-функции управления $\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\in H^m(0,T)=H(0,T)\times...\times H(0,T)$, и по функциональной переменной $\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial q\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]}{\partial\vartheta_s(t)}\uparrow 0, \tag{5}$$

$$s=1,...,m,\quad \forall t\in[0,T],$$

ядро $p_1\left[t,\bar{u}(t)\right]$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|,$$

$$D=\left\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\right\}, \tag{6}$$

$\lambda-$ параметр; постоянная $\alpha>0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Оптимальное управление, согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [4], определяется из следующего соотношения:

$$\Pi_u\left(\cdot;\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right)=\frac{\partial q\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]}{\partial\vartheta_s}$$

$$\omega(t,1)-2\beta\vartheta_s(t)=0,\quad s=1,...,m, \tag{7}$$

а также, согласно критериям Сильвестра, удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\left|\Gamma\left[\Pi\left(\cdot;\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right)\right]\right| =$$

$$=(-2\beta)^s\prod_{s=1}^{h}q_{\vartheta_s}\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_1} & ... & \left(\dfrac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_h}\\ ... & ... & ...\\ \left(\dfrac{\vartheta_h}{q_{\vartheta_h}}\right)_{\vartheta_1} & ... & \left(\dfrac{\vartheta_h}{q_{\vartheta_h}}\right)_{\vartheta_h}\end{vmatrix} > 0,$$

$$h=1,...,m, \tag{8}$$

где матрица Гесса $\Gamma\left[\Pi\left(\cdot;\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right)\right]$ имеет вид

$$\Gamma\left[\Pi\left(\cdot;\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right)\right] =$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\vartheta_1\partial\vartheta_1} & ... & \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\vartheta_1\partial\vartheta_m}\\ ... & ... & ...\\ \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\vartheta_m\partial\vartheta_1} & ... & \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial\vartheta_m\partial\vartheta_m}\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}\omega(t,1)\dfrac{\partial^2 q}{\partial\vartheta_1\partial\vartheta_1}-2\beta & ... & \omega(t,1)\dfrac{\partial^2 q}{\partial\vartheta_1\partial\vartheta_m}\\ ... & ... & ...\\ \omega(t,1)\dfrac{\partial^2 q}{\partial\vartheta_m\partial\vartheta_1} & ... & \omega(t,1)\dfrac{\partial^2 q}{\partial\vartheta_m\partial\vartheta_m}-2\beta\end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-2\beta q_{\vartheta_1}\left(\dfrac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_1} & ... & -2\beta q_{\vartheta_1}\left(\dfrac{\vartheta_1}{q_{\vartheta_1}}\right)_{\vartheta_m}\\ ... & ... & ...\\ -2\beta q_{\vartheta_m}\left(\dfrac{\vartheta_m}{q_{\vartheta_m}}\right)_{\vartheta_1} & ... & -2\beta q_{\vartheta_m}\left(\dfrac{\vartheta_m}{q_{\vartheta_m}}\right)_{\vartheta_m}\end{pmatrix}.$$

Функция $\omega(t,x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_t^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0;$$

$$0<x<1; 0\le t<T,$$

$$\omega(T,x)+2\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]=0;$$

$$0<x<1 \tag{9}$$

$$\omega_x(t,0)=0;\quad \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0;$$

$$0\le t<T$$

и имеет вид

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda\int_t^T J_n(s,t,\lambda)\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds+\right.$$

$$\left.+\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-t)}\right)z_n(x). \tag{10}$$

Подробное исследование краевой задачи, получение условий оптимальности и исследование сопряженной краевой задачи были приведены в [5].

С учетом (10) перепишем условия оптимальности (7).

$$\beta\vartheta_s(t)q_{\vartheta_s}^{-1}\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)\int_0^T G_n(\tau,1)q\left[\tau,\vartheta_1(\tau),...,\vartheta_m(\tau)\right]d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)h_n,$$

$$s=1,...,m, \tag{11}$$

где

$$G_n^*(t,1)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T J_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1), \tag{12}$$

$$G_n(t,1)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right)z_n(1), \tag{13}$$

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right)-$$

$$-\int_0^T G_n(\tau)g_n(\tau)d\tau. \tag{14}$$

II. Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений векторного оптимального управления. Система нелинейных интегральных уравнений (11) решается согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [6]. Система равенств (11) обладает специфическим свойством, в частности, оно удовлетворяет системе равных отношений, т. е.

$$f(t)=\frac{\beta\vartheta_1(t)}{q_{\vartheta_1}}=...=\frac{\beta\vartheta_m(t)}{q_{\vartheta_m}}, \tag{15}$$

где $f(t)$ – некоторая функция.

Лемма 1. Функция $f(t)$ является элементом пространства $H(0,T)$.

Доказательство. В силу условия (5) имеет место оценка

$$\left|q_{\vartheta_s}^{-1}\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]\right|\le M,$$

$$\forall t\in[0,T],\quad s=1,...,m.$$

Так как $\vartheta_s(t)\in H^m(0,T)$, $s=1,...,m$, то утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T f^2(t)dt\le N_0\beta^2\int_0^T\vartheta_s^2(t)dt<\infty,$$

$$s=1,...,m,\quad N_0=\sup_{0\le t\le T}\left\{q_{\vartheta_1}^{-1},...,q_{\vartheta_m}^{-1}\right\}.$$

Заметим, что в силу монотонности функции $q\left[t,\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)\right]$ по каждой функциональной переменной $\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)$ и согласно условию оптимальности (8) из систем равенств (15) каждая из функций $\vartheta_1(t),...,\vartheta_m(t)$ однозначно выражается через функцию $f(t)$, т. е. имеет место следующая система равенств:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(t) = p_1\left[t, f(t), \beta\right], \\ &------------ \\ &\vartheta_m(t) = p_m\left[t, f(t), \beta\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда на основе соотношений (15) и (16) из (11) относительной функции $f(t)$ имеем следующее соотношение:

$$f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1) q$$

$$\left[\tau, p_1\left[\tau, f(\tau), \beta\right], ..., p_m\left[\tau, f(\tau), \beta\right]\right] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) h_n, \tag{17}$$

или в операторной форме

$$f(t) = S\left[f(t)\right] + h(t), \tag{18}$$

где

$$S\left[f(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1)$$

$$q\left[\tau, p_1\left[\tau, f(\tau), \beta\right], ..., p_m\left[\tau, f(\tau), \beta\right]\right] d\tau,$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) h_n. \tag{19}$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (18).

Лемма 2. Функция $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) h_n$ является элементом пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T h^2(t)\, dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) h_n \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n^*(t,1)\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \le$$

$$\le 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right)$$

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n^2 + 2\psi_n^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{\left(2\lambda_1^2\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right) \left\| g(t,x) \right\|_H^2 \right) \le$$

$$\le 6\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right) \times$$

$$\times \left[\left\|\xi(x)\right\|_H^2 + 2\left\|\psi(x)\right\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{\left(2\lambda_1^2\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right) \left\|g(t,x)\right\|_H^2 \right] < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 3. Оператор $S\left[f(t)\right]$ отображает пространство $H(0,T)$ в себя, т. е. является элементом пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T S^2\left[f(t)\right] dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1) q \right.$$

$$\left. \left[\tau, p_1\left[\tau, f(\tau), \beta\right], ..., p_m\left[\tau, f(\tau), \beta\right]\right] d\tau \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n^*(t,1)\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau,1)\, d\tau$$

$$d\tau dt \le \int_0^T q^2\left[\tau, p_1\left[\tau, f(\tau), \beta\right], ..., p_m\left[\tau, f(\tau), \beta\right]\right]$$

$$\le 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right) 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n^2}\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right)$$

$$\left\| q\left[\tau, p_1\left[\tau, f(\tau), \beta\right], ..., p_m\left[\tau, f(\tau), \beta\right]\right] \right\|_H^2 \le$$

$$\le 4\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2}\right)^2$$

$$\left\| q\left[\tau, p_1\left[\tau, f(\tau), \beta\right], ..., p_m\left[\tau, f(\tau), \beta\right]\right] \right\|_H^2 < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть выполнены условия

$$\left\| q\left[t, \vartheta_1(t), ..., \vartheta_m(t)\right] - q\left[t, \bar{\vartheta}_1(t), ..., \bar{\vartheta}_m(t)\right] \right\|_H \le$$

$$\le q_0 \left(\left\| \vartheta_1(t) - \bar{\vartheta}_1(t) \right\|_H + ... + \left\| \vartheta_m(t) - \bar{\vartheta}_m(t) \right\|_H \right), \tag{20}$$

$$\left\| p_1\left[t, f(t), \beta\right] - p_1\left[t, \bar{f}(t), \beta\right] \right\|_H + ... +$$

$$+ \left\| p_m\left[t, f(t), \beta\right] - p_m\left[t, \bar{f}(t), \beta\right] \right\|_H \le$$

$$\le p_{01}(\beta) \left\| f(t) - \bar{f}(t) \right\|_H + ... +$$

$$+ p_{0m}(\beta) \left\| f(t) - \bar{f}(t) \right\|_H \le$$

$$\le p_0(\beta) \left\| f(t) - \bar{f}(t) \right\|_H,$$

$$p_0(\beta) = \max\left(p_{01}(\beta), ..., p_{0m}(\beta)\right). \tag{21}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda| TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)q_0p_0(\beta)<1, \quad (22)$$

оператор $S\left[f(t)\right]$ является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\left\|S\left[f(t)\right]-S\left[\bar{f}(t)\right]\right\|_H^2 =$$

$$=\int_0^T\left(S\left[f(t)\right]-S\left[\bar{f}(t)\right]\right)^2dt \le \int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t,1)\times\right.$$

$$\times\int_0^T G_n(\tau,1)q\left[\tau,p_1\left[\tau,f(\tau),\beta\right]-p_1\left[\tau,\bar{f}(\tau),\beta\right]+\ldots+\right.$$

$$\left.\left.\left[+p_m\left[\tau,f(\tau),\beta\right]-p_m\left[\tau,\bar{f}(\tau),\beta\right]\right]d\tau\right]\right)^2dt \le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n^*(t,1)\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T G_n^2(\tau,1)d\tau dt\times$$

$$\times\int_0^T q^2\left[\tau,p_1\left[\tau,f(\tau),\beta\right]-p_1\left[\tau,\bar{f}(\tau),\beta\right]+\ldots+\right.$$

$$\left.+p_m\left[\tau,f(\tau),\beta\right]-p_m\left[\tau,\bar{f}(\tau),\beta\right]\right]d\tau \le$$

$$\le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n^2}\left(1+\frac{|\lambda| TM_0K_0}{2\lambda_1^2}\right)4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n^2}\left(1+\frac{|\lambda| TM_0K_0}{2\lambda_1^2}\right)\times$$

$$\times\left\|q\left[\tau,p_1\left[\tau,f(\tau),\beta\right]-p_1\left[\tau,\bar{f}(\tau),\beta\right]+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+p_m\left[\tau,f(\tau),\beta\right]-p_m\left[\tau,\bar{f}(\tau),\beta\right]\right]\right\|_H^2 \le$$

$$\le 4\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\left(1+\frac{|\lambda| TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)^2 \le$$

$$\le q_0^2p_0^2(\beta)\left\|f(t)-\bar{f}(t)\right\|_H^2,$$

откуда находим, что

$$\left\|S\left[f(t)\right]-S\left[\bar{f}(t)\right]\right\|_H =$$

$$=2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{|\lambda| TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right)q_0p_0(\beta)\left\|f(t)-\bar{f}(t)\right\|_H.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5)–(6), (8), (20)–(22). Тогда операторное уравнение (18) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Леммам *1–3* операторное уравнение (18) можно рассматривать в пространстве $H(0,T)$. Согласно Лемме *4* оператор $S\left[f(t)\right]$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство $H(0,T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме [7] о принципе сжимающих отображений оператор $S\left[f(t)\right]$ имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (18) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (18) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. r-е приближение решения находится по формуле

$$f_r(t)=S\left[\theta_{r-1}(t)\right],\quad r=1,2,3,\ldots,$$

где $f_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0,T)$, причем имеет место оценка

$$\left\|\bar{f}(t)-f_r(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^r}{1-\gamma}\left\|S\left[f_0(t)\right]\right\|_H. \quad (23)$$

Точное решение $\bar{f}(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$\bar{f}(t)=\lim_{r\to\infty}f_r(t)$$

Подставляя это решение в (16), находим искомое оптимальное управление:

$$\begin{aligned}&\vartheta_1^0(t)=p_1\left[t,\bar{f}(t),\beta\right],\\ &------------\\ &\vartheta_m^0(t)=p_m\left[t,\bar{f}(t),\beta\right].\end{aligned}\quad (24)$$

Оптимальный процесс $v^0(t,x)$, т. е. решение краевой задачи (2)–(4), соответствующее оптимальному управлению $\left(\vartheta_1^0(t),\ldots,\vartheta_m^0(t)\right)$, находим по формуле

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)b_n^0(s)ds+b_n^0(t)\right)z_n(x), \quad (25)$$

где $b_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2t}\psi_n+$

$$+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)q\left[\tau,\vartheta_1^0(\tau),\ldots,\vartheta_m^0(\tau)\right]\right)d\tau.$$

Минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$L\left[\vartheta_1^0(t),\ldots,\vartheta_m^0(t)\right]=$$

$$=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{s=1}^m\left(\vartheta_s^0(t)\right)^2dt. \quad (26)$$

Найденная тройка $\left(\left(\vartheta_1^0(t),\ldots,\vartheta_m^0(t)\right),\ v^0(t,x),\ L\left[\vartheta_1^0(t),\ldots,\vartheta_m^0(t)\right]\right)$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. *Тихонов А.Н., Кальнер В.Д., Гласко В.Б.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.

3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. *Керимбеков А., Сейдакмат кызы Э.* Условие оптимальности в задаче граничного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтерровo интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э. // Матер. межд. научн.-практич. конф. "Информационные технологии: Инновации в науке и образовании". Бишкек, 2015. С. 178–182.
6. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами / А.К. Керимбеков: Дисс… докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 224 с.
7. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.