УДК 517.97

СЛАБО ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева

Исследованы вопросы однозначной разрешимости краевой задачи граничного управления колебательным процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением в частных производных. Разработан алгоритм построения слабо обобщенного решения краевой задачи, построены приближенные ее решения и доказана их сходимость.

Ключевые слова: краевая задача; граничное управление; обобщенное решение; приближенное решение; сходимость.

WEAK GENERALIZED SOLUTION OF THE BOUNDARY CONTROL PROBLEM OF ELASTIC OSCILLATIONS, DESCRIBED BY THE FREDHOLM INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva

It is investigated one-valued solvability of the boundary value problem of boundary control for the oscillation processes described by the Fredholm Integro-Differential equations. It is developed algorithm for constructing of the weak generalized solution of the boundary value problem, constructed approximate solutions of this problem and proved its convergence.

Key words: boundary value problem; boundary control; generalized solution; approximate solutions; convergence.

1. Построение обобщенного решения краевой задачи. Пусть состояние колебательного процесса описывается скалярной функцией $V(t,x)$, которая в области $Q_T = Q\times(0,T]$, где Q – область пространства R^n, ограниченная кусочно-гладкой кривой γ, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению [1, 2].

$$V_{tt} - AV = \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + g(t,x),$$

$$x\in Q,\quad 0<t\le T, \tag{1.1}$$

а на границах области Q начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ \ V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q \tag{1.2}$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1,}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i)+a(x)V(t,x)=$$

$$=b(t,x)f[t,u(t)],\quad x\in\gamma,\quad 0<t<T, \tag{1.3}$$

условиям, где A – эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x)V(t,x),$$

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, c_0>0,$$

δ – вектор нормали, исходящий из точки $x\in\gamma$; $K(t,\tau)$ – заданная функция, которая определена в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0<\infty, \tag{1.4}$$

т. е. является элементом гильбертова пространства $H(D)$;

$$\psi_1(x)\in H_1(Q),\quad \psi_2(x)\in H(Q),$$

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\quad \forall t\in(0,T) \tag{1.5}$$

заданные функции, а $a(x)\ge 0$, $c(x)\ge 0$ – известные измеримые функции; $H(Q)$ – гильбертово пространство первого порядка; $f[t,u(t)]$ – функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(Q)$ и является элементом пространства $H(Q)$, $\forall u(t)\in H(Q)$,

λ – параметр; T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0$.

Известно [3], что при условиях (1.5) краевая задача (1.1)–(1.3) не имеет классического решения. Поэтому будем пользоваться понятием слабо обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.3).

Определение 1.1. Под слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $V(t,x)\in H(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 \left[(V_t\varphi)-(V\varphi_t)\right]_{t_1}^{t_2} dx \equiv$$

$$\equiv \int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left[-V\varphi_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}\varphi_{x_j}-c(x)V\varphi\right]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_\gamma \left(b(t,x)f\left[t,u(t)\right]-a(x)V\right)\varphi(t,x)dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau+g(t,x)\right)\varphi(t,x)dxdt, \qquad (1.7)$$

при любых t_1, t_2, $(0<t_1\le t\le t_2\le T)$ и x также удовлетворяет начальным условиям в слабом смысле, т. е. для любых функций $\varphi_0(x)\in H(Q)$, $\varphi_1(x)\in H(Q)$ имеют место равенства:

$$\lim_{t\to+0}\int_Q V(t,x)\varphi_0(x)dx=\int_Q \psi_1(x)\varphi_0(x)dx,$$

$$\lim_{t\to+0}\int_Q V_t(t,x)\varphi_1(x)dx=\int_Q \psi_2(x)\varphi_1(x)dx. \qquad (1.8)$$

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x), \qquad (1.9)$$

где $V_n(t)=\left\langle V(t,x),z_n(x)\right\rangle=\int_Q V(t,x)z_n(x)dx$ – коэффициенты Фурье, символом $<\cdot,\cdot>$ обозначено скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H(Q)$, система функций $\{z_n(x)\}$, где $z_n(x)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\supset$ удовлетворяет краевой задаче $Az(x)=-\lambda^2 z(x)$, $x\in Q$, $\Gamma z(x)=0$, $x\in\gamma$, и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет следующим условиям: $\lambda_n\le\lambda_{n+1}$, $\forall n=1,2,3,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$

Будем также пользоваться разложениями:

$$g(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)z_n(\lambda),$$

$$g_n(t)=<g(t,x),z_n(x)>=\int_Q g(t,x)z_n(x)dx,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n z_n(x),\ \psi_n=<\psi(x),z_n(x)>=\int_Q\psi(x)z_n(x)dx. \qquad (1.10)$$

Следуя методике работы [4], формальное решение краевой задачи (1.1)–(1.3) находим согласно интегрального тождества (1.7). В силу произвольности функции $\varphi(t,x)$ в интегральном тождестве (1.7) положим $\varphi(x)\equiv z_n(x)$. После несложных вычислений, интегральное тождество (1.7) примет вид:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle V_t,z_n\right\rangle dt+\int_{t_1}^{t_2}\lambda_n^2\left\langle V,z_n\right\rangle dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}b_n(t)f\left[t,u(t)\right]dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)V_n(\tau)d\tau+g_n(t)\right)dt. \qquad (1.11)$$

В этом тождестве, полагая $t_2=t$ и дифференцируя по t, получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$V_n''(t)+\lambda_n^2V_n(t)=$$

$$=\lambda\int_0^T K(t,\tau)V_n(\tau)d\tau+g_n(t)+b_n(t)f\left[t,u(t)\right], \qquad (1.12)$$

которое будем решать с “начальными” условиями

$$V_n(t_1)=\left\langle V(t_1,x),z_n(x)\right\rangle\Big|_{t=t_1}=\left\langle V(t_1,x),z_n(x)\right\rangle,$$

$$V_n'(t_1)=\left\langle V_t(t_1,x),z_n(x)\right\rangle\Big|_{t=t_1}=\left\langle V_t(t_1,x),z_n(x)\right\rangle, \qquad (1.13)$$

при каждом фиксированным $n=1,2,3,\supset$. Рассматривая как свободный член правую часть уравнения, решение задачи Коши (1.12)–(1.13) находим по формуле

$$V_n(t)=\left\langle V(t_1,x),z_n(x)\right\rangle\cos\lambda_n(t-t_1)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\langle V_t(t,x),z_n(x)\right\rangle\times\sin\lambda_n(t-t_1)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_{t_1}^{t}\sin\lambda_n(t-\tau)q_n(\tau)d\tau.$$

Отсюда, устремляя $t_1\to 0$ и учитывая (1.8), (1.10) относительно $V_n(t)=<V(t,x),z_n(x)>$ получим соотношение

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)\right)V_n(s)ds+$$

$$+\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+$$

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)\left[q_n(\tau)+b_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]\right]d\tau, \quad (1.14)$$

которое является линейным интегральным уравнением.

Уравнение (1.14) перепишем в виде

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(\tau, s) V_n(s) ds + a_n(t), \tag{1.15}$$

где

$$K_n(\tau, s) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) K(\tau, s) d\tau, \tag{1.16}$$

$$a_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \left[q_n(\tau) + b_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] \right] d\tau. \tag{1.17}$$

Решение интегрального уравнения (1.15) находим по формуле [6]:

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{1.18}$$

где

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.19}$$

резольвента ядра $K_n(t, s) \equiv K_{n,1}(t, s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t, s)$ определяются по формуле

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_0^T K_n(t, \eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \; i = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.20}$$

Исследуем сходимость ряда Неймана (1.19). Согласно (1.8) и (1.16) непосредственными вычислениями устанавливаются следующие оценки:

$$\left| K_{n,i}(t, s) \right|^2 \le \left(\frac{T}{\lambda_n^2} \right)^i (K_0 T)^{i-1} \int_0^T K^2(y, s) dy, \; i = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.21}$$

Сходимости ряда Неймана (1.19) следуют из неравенства

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \le \frac{\sqrt{T} \sqrt{\int_0^T K^2(y, s) dy}}{\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2}},$$

которое справедливо для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| < \frac{\lambda_n}{\sqrt{K_0 T^2}} \underset{n \to \infty}{\to} \infty.$

Непосредственным вычислением устанавливается следующее неравенство:

$$\int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds = \frac{T}{\left(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2} \right)^2}$$

$$\int_0^T \int_0^T K^2(y, s) dy ds = \frac{K_0 T}{\left(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2} \right)^2}, \tag{1.22}$$

которое неоднократно используется в дальнейшем.

Ряд Неймана для значений параметра λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| < \frac{\lambda_n}{\sqrt{K_0 T^2}} \underset{n \to \infty}{\to} \infty$, абсолютно сходится при каждом $n = 1, 2, 3, \ldots$, т. е. радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n. При этом резольвента $R_n(t, s, \lambda)$, как сумма абсолютно сходящегося ряда, является непрерывной функцией и удовлетворяет оценке

$$\left| R_n(t, s, \lambda) \right| \le \frac{\sqrt{T} \sqrt{\int_0^T K^2(y, s) dy}}{\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2}}, \; n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.23}$$

Отметим, что ряд Неймана для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ абсолютно сходится лишь при значении λ, удовлетворяющем неравенству

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{\sqrt{K_0 T^2}}. \tag{1.24}$$

Таким образом, решение краевой задачи (1.1)–(1.3) находим по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x), \tag{1.25}$$

где по формуле (1.18) определяем как единственное решение интегрального уравнения (1.15). С учетом формулы (1.17) и (1.19) функцию (1.25) преобразуем к следующему виду:

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \psi_n(t, \lambda) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \varepsilon_n(t, \eta, \lambda) b_n(\eta) f(\eta, u(\eta)) d\eta \} z_n(x), \tag{1.26}$$

где

$$\varepsilon_n(t, \eta, \lambda) = \begin{cases} \sin \lambda_n (t - \eta) + \lambda \int_\eta^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n (s - \eta) ds, & 0 \le \eta \le t, \\ \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n (s - \eta) ds, & 0 \le \eta \le T, \\ \text{при} \quad t = \eta \quad \text{есть непрерывность.} \end{cases} \tag{1.27}$$

Лемма. Слабо обобщенное решение краевой задачи (1.1)–(1.3), определенное формулой (1.26) является элементом гильбертова пространства $H(Q)$.

Доказательство. Учитывая (1.27), имеем неравенство:

$$\int_0^T \int_Q V^2(t, x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \{ \psi_n(t, \lambda) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \varepsilon_n(t, \eta, \lambda) b_n(\eta) f(\eta, u(\eta)) d\eta \} dt \le$$

$$\le 2 \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2(t, \lambda) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \varepsilon_n^2(t, \eta, \lambda) b_n^2(\eta) \int_0^T f^2(\eta, u(\eta)) d\eta \} dt$$

Далее, учитывая неравенства

$$1)\ \varepsilon_n^2(t,\eta,\lambda) \le \left(\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right)^2 \le$$

$$\le 2\left(\sin^2\lambda_n t + \lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)\,\mathrm{d}s\int_0^T \sin^2\lambda_n s ds\right) \le$$

$$\le 2\left(1+\lambda^2\frac{K_0T^2}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right);$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^2(t,\lambda) =$$

$$= 3\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_{1n}^2\left[\cos\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right]^2 + \right.$$

$$+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\left[\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]^2 +$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \varepsilon_n^2(t,\eta,\lambda)\,\mathrm{d}\eta\int_0^T g_n^2(\eta)d\eta\right\} \le$$

$$\le 6\left[1+\lambda^2\frac{K_0T^2}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]$$

$$\left\{\left\|\psi_1(x)\right\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_H^2 + \frac{T}{\lambda_1^2}\left\|g(\mathrm{t},x)\right\|_H^2\right\} < \infty;$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T \varepsilon_n^2(t,\eta,\lambda)b_n^2(\eta)d\eta\int_0^T f^2(\eta,u(\eta))d\eta \le$$

$$\le \frac{2}{\lambda_1^2}\left(1+\lambda^2\frac{K_0T^2}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)$$

$$\left.\left\|b(t,x)\right\|_{H(\gamma_T)}^2\left\|f(t,u(t))\right\|_{H(0,T)}^2\right\} < \infty,$$

получаем:

$$\int_0^T\int_Q V^2(t,x)dxdt =$$

$$= 2\int_0^T\left\{6\left[1+\lambda^2\frac{K_0T^2}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left[\left\|\psi_1(x)\right\|_H^2 + \right.\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_H^2 +$$

$$+\frac{T}{\lambda_1^2}\left\|g(t,x)\right\|_{H(Q_T)}^2 + \frac{2}{\lambda_1^2}\left[1+\lambda^2\frac{K_0T^2}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]$$

$$\left.\left\|b(t,x)\right\|_{H(\gamma_T)}^2\left\|f(t,u(t))\right\|_{H(0,T)}^2\right\} =$$

$$= 4T\left[1+\lambda^2\frac{K_0T^2}{\left(\lambda_n - |\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left\{3\left\|\psi_1(x)\right\|_{H(Q_T)}^2 + \right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_{H(Q_T)}^2 + \frac{T}{\lambda_1^2}\left\|g(t,x)\right\|_{H(Q_T)}^2 +$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|b(t,x)\right\|_{H(\gamma_T)}^2\left\|f(t,u(t))\right\|_{H(0,T)}^2\right\} < \infty,$$

т.е. $V(t,x) \in H(Q_T)$.

2. Приближенные решения краевой задачи и их сходимость

При определении функции $V^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}V_n^m(t)z_n(x)$, по формуле (1.26)–(1.27) не всегда удается найти резольвенту $R_n(t,s,\lambda)$. На практике чаще всего рассматривают приближения резольвенты. Усеченный ряд вида

$$R_n^m(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n = 1,2,3,..., \tag{2.1}$$

называется m-м приближением резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$.

Функция $V_n^m(t)$, определяемая по формуле

$$V_n^m(t) = \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t),$$

$$n = 1,2,3,..., \tag{2.2}$$

называется m-м приближением функции $V_n(t)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,...$.

Согласно формулы (1.9) , m-е приближение решения краевой задачи (1.1)–(1.3) $V(t,x)$ находим по формуле

$$V^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}V_n^m(t)z_n(x), \tag{2.3}$$

где $V_n^m(t)$ имеет вид (2.2). Покажем, что приближенное решение $V^m(t,x)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) сходится к точному решению $V(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$. С учетом (1.12), (1.14), (1.15), (2.1), (2.2) и неравенства

$$\int_{m+1}^{\infty}q^{x-1}dx = \frac{1}{q}\int_{m+1}^{\infty}q^x dx = q^{-1}\left(q^{m+1} + \left.\frac{q^x}{lnq}\right|_{m+1}^{\infty}\right) =$$

$$= q^{-1}q^{m+1}\left(1-\frac{1}{lnq}\right) = q^m\left(1-\frac{1}{lnq}\right),\quad 0 < q < 1$$

непосредственным вычислением имеем соотношение:

$$|V(t,x) - V^m(t,x)\|_H^2 =$$

$$= \int_0^T\int_Q\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\int_0^T\left(R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda)\right)a_n(s)ds)^2 z_n(x)\right)dxdt$$

$$|\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 \int_0^T \left(R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda) \right)^2 ds \int_0^T a_n^2(s) ds dt$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{\ln \frac{|\lambda| T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}} \right)^2 \left(\frac{|\lambda| T\sqrt{K_0}}{\lambda_1} \right)^{2m} \times$$

$$\times 3T \left(\left\|\psi_1(x)\right\|_H^2 + \left[\left\|\psi_2(x)\right\|_H^2 + \left\|g(t,x)\right\|_H^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. \left\|f[t,u(t)]\right\|_H^2 \right] \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \qquad (2.4)$$

из которого следует сходимость приближенного решения при $m \to \infty$.

На производстве практически используемое приближенное решение определяется по формуле

$$V_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{k} V_n^m(t) z_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \left(\lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right). \qquad (2.5)$$

Покажем, что это решение при $k \to \infty$ сходится к решению $V^m(t,x)$. Это следует из соотношения

$$\| V^m(t,x) - V_k^m(t) \|_H^2 =$$

$$= \int_0^T \int_Q \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda) q_n(\mathrm{s}) ds + q_n(t) \right] z_n(x) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{n=1}^{k} \left[\lambda \int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right] z_n(x) \right)^2 dxdt \right.$$

$$- \leq 2\int_0^T \sum_{n=k+1}^{\infty} \left[\lambda^2 \left(\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda \right)^2 ds \int_0^T a_n^2(s) ds + a_n^2(t) \right] dt \leq$$

$$\leq 2 \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2} \right) \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_0^T a_n^2(t) dt \leq$$

$$\leq 6T \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2} \right) \qquad (2.5)$$

$$\times \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \psi_{2n}^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_0^T q_n^2(\tau) d\tau \, \| f[t,u(t)] \|_H^2 \right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

так как остаточные суммы сходящихся рядов стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Доказательство сходимости приближенных решений к точному решению $V(t,x)$ проведем по следующей схеме:

$$\| V(t,x) - V_k^m(t) \|_H \leq \| V(t,x) -$$

$$- V^m(t,x) \|_H + \| V^m(t,x) - V_k^m(t) \|_H .$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что приближенное решение $V_k^m(t,x)$ сходится к точному решению $V(t,x)$ при $m,k \to \infty$. Следовательно, получаем следующее неравенство

$$\| V(t,x) - V^m(t,x) \|_H^2 =$$

$$= \left(\int_0^T \int_Q \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \int_0^T \left[R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda) \right] a_n(s) ds \right.$$

$$\left. z_n(x) \right)^2 dxdt$$

$$\leq \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{\lambda_1^2} \left(|\lambda| \frac{T}{\lambda_n} \sqrt{K_0} \right)^{2m}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\ln \frac{|\lambda| T\sqrt{K_0}}{\lambda_n}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T a_n^2(s) ds \leq C_3(\lambda)$$

$$\left(|\lambda| \frac{T}{\lambda_n} \sqrt{K_0} \right)^{2m} \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

$$C_3(\lambda) = \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{\lambda_1^2} \left(1 - \frac{1}{\ln \frac{|\lambda| T\sqrt{K_0}}{\lambda_n}} \right)^2$$

$$3T \left(\| \psi_1(x) \|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \left\|\psi_2(x)\right\|_H^2 + \frac{T}{\lambda_1^2} \left\|f(t,x,u(t,x)\right\|_H^2 \right),$$

из которого следует сходимость приближенного решения к точному решению при $m \to \infty$.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
4. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.