УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ С ТРАПЕЦИЕВИДНОЙ ЭПЮРОЙ

Б. Жумабаев, А.А. Аманалиев, А. Ширяева

Показано распределение напряжений состояния полуплоскости от действия нагрузки с трапециевидной эпюрой. Приведены результаты расчета в изотропной и анизотропной полуплоскостях.

Ключевые слова: упругость; комплексные потенциалы; напряжения; деформация; нагрузка с трапециевидной эпюрой.

STRESS AND STRAIN STATE OF ISOTROPIC AND ANISOTROPIC HALF-PLANE UNDER THE ACTION OF LOAD WITH TRAPEZIODAL DIAGRAMS

B. Zhumabaev, A.A. Amanaliev, A.Shiryaeva

It is defined the distribution of stresses in the elastic half-plane of action of the load with trapezoidal Diagrams. It is given the results of the calculation in the isotropic and anisotropic half-plane.

Key words: elasticity; complex potentials; stress; deformation; load with trapezoidal Diagrams.

Связь между компонентами напряжений (σx, σy, τxy) и компонентами деформаций (εx, εy, γxy) линейна, и выражается законом Гука для изотропного [1] или трансверсально-изотропного массива [2].

Граничные условия для полуплоскости $y = 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_x \cdot \cos(n,x) + \tau_{xy} \cdot \cos(n,y) = X_n, \\ &\tau_{xy} \cdot \cos(n,x) + \sigma_y \cdot \cos(n,y) = Y_n. \end{aligned} \tag{1}$$

На поверхности полупространства заданы внешние силы, которые действуют горизонтально и вертикально к дневной поверхности земли. Такие внешние силы обозначены через N и T, направлены нормально и по касательной к границе полуплоскости. Величины касательной T в (1) равны нулю всюду на границе полуплоскости. Вертикальные N нагрузки состоят из разности двух распределенных нагрузок с треугольными эпюрами $N(\xi) = N_1(\xi) - N_2(\xi)$. Законы их распределения одинаковы, но нагрузка N_1 направлена в сторону границы полуплоскости y = 0, а нагрузка N_2 противоположна по отношению к первой.

$$N_1(\xi) = \begin{cases} n = 0, \ \textit{если}\ \xi < L_1\ \textit{и}\ \ \xi > L_4, \\ n = \dfrac{L_1 - \xi}{L_1} \cdot p_0, \ \textit{если}\ L_1 < \xi \le L_2, \\ n = \dfrac{L_4 - \xi}{L_4} \cdot p_0, \ \textit{если}\ L_3 < \xi \le L_4, \end{cases}$$

$$N_2(\xi) = \begin{cases} n = 0, \ \textit{если}\ \xi < L_{11}\ \textit{и}\ \ \xi > L_4, \\ n = \dfrac{L_{11} - \xi}{L_{11}} \cdot p_0, \ \textit{если}\ L_{11} < \xi \le L_2, \\ n = \dfrac{L_{41} - \xi}{L_{41}} \cdot p_0, \ \textit{если}\ L_3 < \xi \le L_4, \end{cases}$$

Внешняя нагрузка состоит из двух слагаемых, имеющих треугольные эпюры. Изменения интенсивности эпюр подчиняются одному и тому же закону. Однако направление действия второй нагрузки противоположно закону изменения первого. В результате верхняя часть первой нагрузки уничтожается эпюрой второй нагрузки и от первой нагрузки остается трапециевидная эпюра распределения внешней нагрузки. Аналитическое описание внешней нагрузки имеет вид:

$$N(\xi) = N_1(\xi) - N_2(\xi).$$

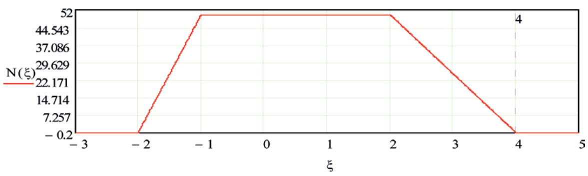


Рисунок 1 – Эпюра распределения внешней нагрузки

Закон распределения нагрузки имеет трапециевидную эпюру. Начало координат в плоскости xoy совпадает с вершиной треугольной эпюры, где нагрузка имеет наибольшее значение P_0. Правый конец загруженного участка контура полуплоскости обозначен как L_4, а левый конец – L_1. На рисунке 1 показана эпюра распределенной нагрузки внутри участка между L_1 и L_4. Вне отрезка нагрузка отсутствует.

Комплексные потенциалы для анизотропной полуплоскости имеют следующий вид:

$$p_0 = -100,\ L_1 = -2,$$

$$L_2 = 0,\ L_3 = 0,\ p_1 = \frac{-p_0}{2},$$

$$z(x, y) = x + i \cdot y, \quad \mu_1 = i \cdot 1{,}662,$$

$$\mu_2 = i \cdot 0{,}937, \quad z_2(x, y) = x + \mu_2 \cdot y,$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

$$\Phi_{01}(x, y) = \frac{p_0 \cdot \mu_2}{L_1}$$

$$\left[\left(L_1 - z_1(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_2 - z_1(x, y)}{L_1 - z_1(x, y)} \right) - \left(L_2 - L_1\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{001}(x, y) = \frac{p_1 \cdot \mu_2}{L_{11}}$$

$$\left[\left(L_{11} - z_1(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_2 - z_1(x, y)}{L_{11} - z_1(x, y)} \right) - \left(L_2 - L_{11}\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{02}(x, y) = \frac{p_0 \cdot \mu_2}{L_4}$$

$$\left[\left(L_4 - z_1(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_4 - z_1(x, y)}{L_3 - z_1(x, y)} \right) - \left(L_4 - L_3\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{002}(x, y) = \frac{p_1 \cdot \mu_2}{L_{41}}$$

$$\left[\left(L_{41} - z_1(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_{41} - z_1(x, y)}{L_3 - z_1(x, y)} \right) - \left(L_{41} - L_3\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{21}(x, y) = -\frac{p_0 \cdot \mu_1}{L_1}$$

$$\left[\left(L_1 - z_2(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_2 - z_2(x, y)}{L_1 - z_2(x, y)} \right) - \left(L_2 - L_1\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{0021}(x, y) = -\frac{p_1 \cdot \mu_1}{L_{11}}$$

$$\left[\left(L_{11} - z_2(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_2 - z_2(x, y)}{L_{11} - z_2(x, y)} \right) - \left(L_2 - L_{11}\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{22}(x, y) = -\frac{p_0 \cdot \mu_2}{L_4}$$

$$\left[\left(L_4 - z_2(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_4 - z_2(x, y)}{L_3 - z_2(x, y)} \right) - \left(L_4 - L_3\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{0022}(x, y) = -\frac{p_1 \cdot \mu_2}{L_{41}}$$

$$\left[\left(L_{41} - z_2(x, y)\right) \cdot \ln\left(\frac{L_{41} - z_2(x, y)}{L_3 - z_2(x, y)} \right) - \left(L_{41} - L_3\right) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{01}(x, y) - \Phi_{001}(x, y) +$$
$$+\Phi_{02}(x, y) - \Phi_{002}(x, y),$$

$$\Phi_2(x, y) = \Phi_{21}(x, y) - \Phi_{0021}(x, y) +$$
$$+\Phi_{22}(x, y) - \Phi_{0022}(x, y),$$

$$\sigma_x(x, y) = 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\mu_1^2 \cdot \Phi_1(x, y) + \mu_2^2 \cdot \Phi_2(x, y) \right),$$

$$\sigma_y(x, y) = 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) \right),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -2 \cdot \mathrm{Re}\left(\mu_1 \cdot \Phi_1(x, y) + \mu_2 \cdot \Phi_2(x, y) \right).$$

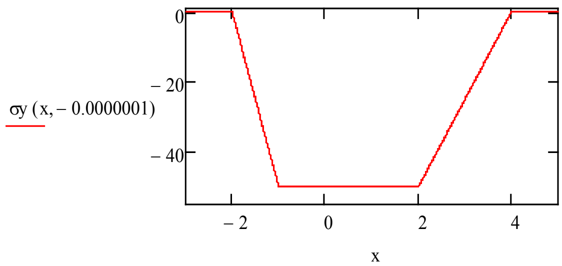


Рисунок 2 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при y = 0.0000001 вблизи контура полуплоскости

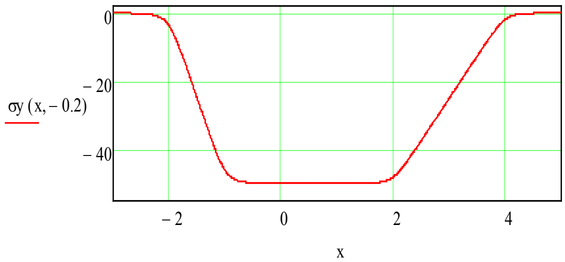


Рисунок 3 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при y = –0.2 вблизи контура полуплоскости

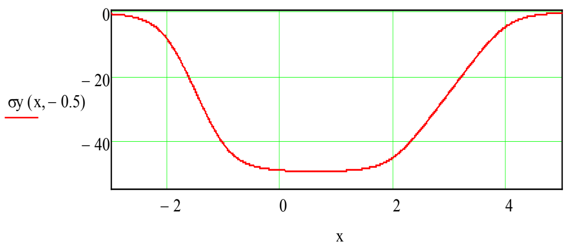
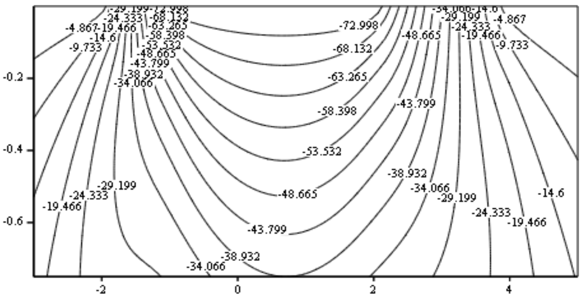


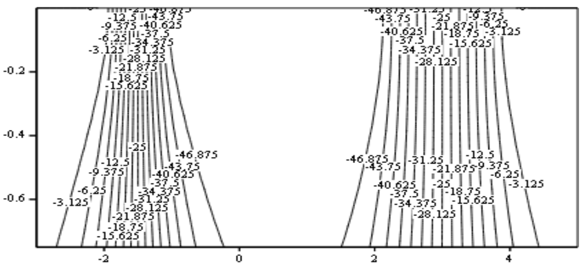
Рисунок 4 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при y = –0.5 вблизи контура полуплоскости

Закономерности распределения напряжений σx, σy, Txy в виде изолиний равных значений для нижней полуплоскости в окрестности загруженного участка контура полуплоскости показаны на рисунках 5–11.



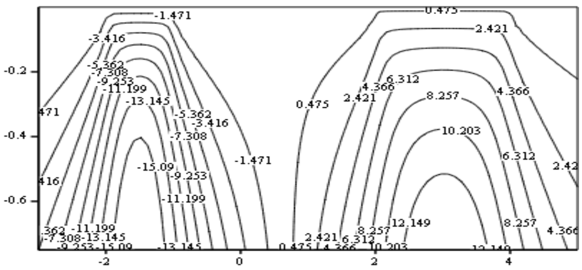
CreateMesh (Izolx, –3, 5, –0.000001, –0.75, 80, 40)

Рисунок 5 – Изолинии горизонтальной нормальной компоненты напряжений



CreateMesh (Izoly, –3, 5, –0.000001, –0.75, 80, 40)

Рисунок 6 – Изолинии вертикальной нормальной компоненты напряжений



CreateMesh (IzolT, –3, 5, –0.000001, –0.75, 80, 40)

Рисунок 7 – Изолинии касательной компоненты напряжений

Рассмотрим изотропную упругую полуплоскость. На контуре действует распределенная нагрузка с неравнобокой трапециевидной эпюрой (см. рисунок 1). Воспользуемся методом и общим решением первой основной задачи [1] для изотропной полуплоскости. Принимаем параметры для нагрузки и их места распределения такими же, как и для анизотропной полуплоскости:

$$p_0 = -100, \quad z(x,y) = x + i \cdot y,$$
$$zc(x,y) = x - i \cdot y,$$

$$\Phi_1(x,y) = -\frac{p_0}{2\pi i L_1}$$
$$\left[\left(L_1 - z(x,y)\right)\cdot \ln\left(\frac{L_2 - z(x,y)}{L_1 - z(x,y)}\right) + \left(L_1 - L_2\right)\right],$$

$$\Phi_{11}(x,y) = -\frac{p_1}{2\pi i L_{11}}$$
$$\left[\left(L_{11} - z(x,y)\right)\cdot \ln\left(\frac{L_2 - z(x,y)}{L_{11} - z(x,y)}\right) + \left(L_{11} - L_2\right)\right],$$

$$\Phi_{1p}(x,y) = -\frac{p_0}{2\pi i L_1}$$
$$\left[-\ln\left(\frac{L_2 - z(x,y)}{L_1 - z(x,y)}\right) + \left(L_1 - z(x,y)\right) \cdot\left(\frac{1}{L_1 - z(x,y)} - \frac{1}{L_2 - z(x,y)}\right)\right],$$

$$\Phi_{11p}(x,y) = -\frac{p_1}{2\pi i L_{11}}$$
$$\left[-\ln\left(\frac{L_2 - z(x,y)}{L_{11} - z(x,y)}\right) + \left(L_{11} - z(x,y)\right) \cdot\left(\frac{1}{L_{11} - z(x,y)} - \frac{1}{L_2 - z(x,y)}\right)\right],$$

$$\Psi_1(x,y) = -z(x,y)\cdot\Phi_{1p}(x,y),$$
$$\Psi_{11}(x,y) = -z(x,y)\cdot\Phi_{11p}(x,y),$$

$$\Phi_2(x,y) = -\frac{p_0}{2\pi i L_4}$$
$$\left[\left(L_4 - z(x,y)\right)\cdot \ln\left(\frac{L_4 - z(x,y)}{L_3 - z(x,y)}\right) + \left(L_3 - L_4\right)\right],$$

$$\Phi_{21}(x,y) = -\frac{p_1}{2\pi i L_{41}}$$
$$\left[\left(L_{41} - z(x,y)\right)\cdot \ln\left(\frac{L_{41} - z(x,y)}{L_3 - z(x,y)}\right) + \left(L_3 - L_{41}\right)\right],$$

$$\Phi_{2p}(x,y) = -\frac{p_0}{2\pi i L_4}$$
$$\left[-\ln\left(\frac{L_4 - z(x,y)}{L_3 - z(x,y)}\right) + \left(L_4 - z(x,y)\right) \cdot\left(\frac{1}{L_3 - z(x,y)} - \frac{1}{L_4 - z(x,y)}\right)\right],$$

$$\Phi_{21p}(x,y) = -\frac{p_1}{2\pi i L_{41}}$$
$$\left[-\ln\left(\frac{L_{41} - z(x,y)}{L_3 - z(x,y)}\right) + \left(L_{41} - z(x,y)\right) \cdot\left(\frac{1}{L_3 - z(x,y)} - \frac{1}{L_{41} - z(x,y)}\right)\right],$$

$$\Psi_2(x,y) = -z(x,y)\cdot\Phi_{2p}(x,y),$$

$$\Psi_{21}(x,y) = -z(x,y)\cdot\Phi_{21p}(x,y),$$

$$\Phi(x,y) = \Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y) - \\ -\Phi_{11}(x,y) - \Phi_{21}(x,y),$$

$$\Phi_p(x,y) = \Phi_{1p}(x,y) + \Phi_{2p}(x,y) - \\ -\Phi_{11p}(x,y) - \Phi_{21p}(x,y),$$

$$\Psi(x,y) = \Psi_1(x,y) + \Psi_2(x,y) - \\ -\Psi_{11}(x,y) - \Psi_{21}(x,y),$$

$$S_1(x,y) = 4\,\mathrm{Re}\big(\Phi(x,y)\big),$$

$$S_2(x,y) = 2\Big(\overline{z(x,y)}\cdot\Phi_p(x,y) + \Psi(x,y)\Big),$$

$$S_3(x,y) = \mathrm{Re}\big(S_2(x,y)\big),$$

$$\sigma_x(x,y) = \frac{S_1(x,y) - S_3(x,y)}{2}, \quad \sigma_y(x,y) = \frac{S_1(x,y) + S_3(x,y)}{2},$$

$$\tau_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\big(S_2(x,y)\big).$$

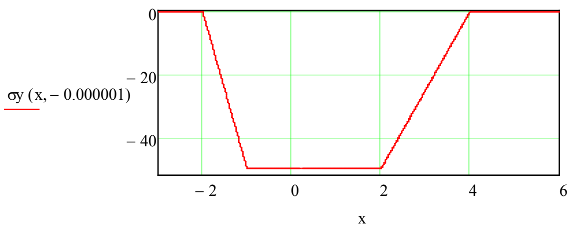


Рисунок 8 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при y = –0.000001 вблизи контура полуплоскости

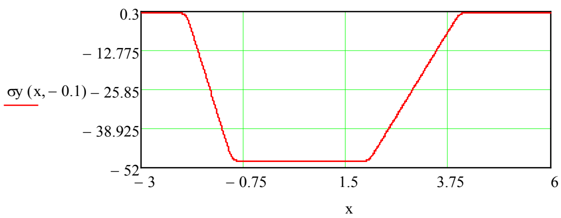


Рисунок 9 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при y = –0.1 вблизи контура полуплоскости

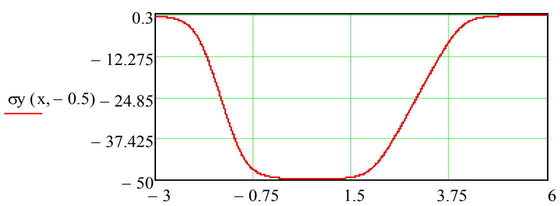
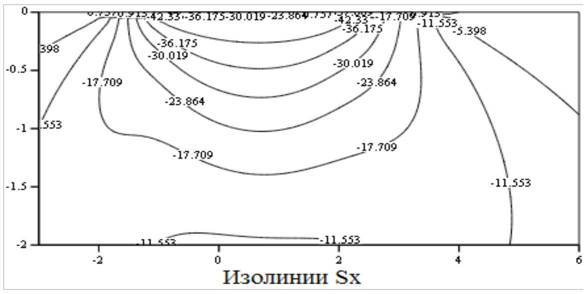
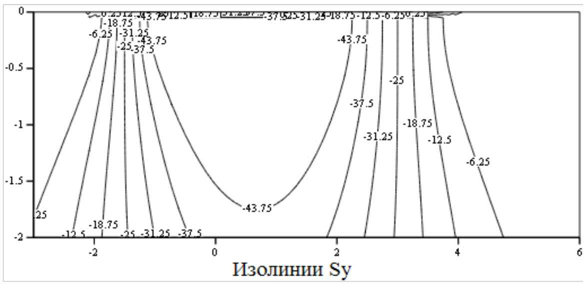


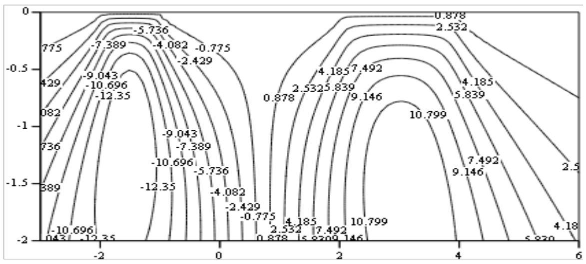
Рисунок 10 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при y = –0.5 вблизи контура полуплоскости



CreateMesh(Px, –3, 6, 0, –2, 80, 40)



CreateMesh(Py, –3, 6, 0, –2, 80, 40)



CreateMesh(PSxy, –3, 6, 0, –2, 80, 40)

Рисунок 11 – Изолинии касательных напряжений

Таким образом, приведенные результаты подтверждают решение двух граничных задач в случае, когда трапециевидная нагрузка равнобокая при L_1 и L_4 симметрична относительно начала оси абсцисс. Роль программы Маткад [4] для выполнения расчетов и доведения их до результатов, полученных в работах [1–3], весьма велика и придает им завершенный вид, необходимый для принятия проектных инженерных решений.

Литература

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. *Жумабаев Б.Ж.* Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом / Б.Ж. Жумабаев. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
4. *Кирьянов Д.В.* Маткад 14 / Д.В. Кирьянов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 704 с.