УДК 517. 95

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИСА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА В ПАКЕТЕ MAPLE

Ю.Н. Ананьева

Исследуется обобщенное уравнение типа Кортевега-де Фриса. В соответствии с методом дополнительного аргумента задача сведена к соответствующему интегральному уравнению.

Ключевые слова: уравнение типа Кортевега-де Фриса; метод дополнительного аргумента; метод последовательных приближений; график решения.

NUMERICAL SOLUTION OF KORTEWEG-DE VRIES TYPE EQUATION BY ADDITIONAL ARGUMENT METHOD

Yu. N. Ananeva

The generalized equation like Korteweg-de Vries is investigated. According to additional argument method, the task is reduced to equivalent integral equation.

Key words: Korteweg-de Vries type equation; additional argument method; fixed point iteration; numerical solution.

В работах [1–3] было рассмотрено следующее уравнение типа Кортевега-де Фриса:

$$u_{xxt}(t,x)+u^m(t,x)u_{xxx}(t,x)-u_t(t,x)-$$
$$-u^m(t,x)u_x(t,x)=f(t,x,u(t,x)), \quad (1)$$

где m – натуральное число, с начальным условием

$$u(0,x)=\varphi(x)\,,\ \varphi^{(k)}(\pm\infty)=0,\ x\in R\,,\ k=0{,}1 \quad (2)$$

и предельными краевыми условиями

$$u(\mathrm{t},\pm\infty)=0. \quad (3)$$

В работе [1] задача (1)–(3) была решена методом дополнительного аргумента. Выведены и доказаны ряд лемм и теорем, в силу которых задача сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$I(t,\xi)=\int_{\infty}^{\xi}e^{\xi-s}\cdot\int_{-\infty}^{s}e^{\upsilon-s}A(t,\upsilon)d\upsilon ds, \quad (4)$$

где

$$A(t,x)=a(p(o,t,x))+$$
$$+\int_0^t f(\rho,p(\rho,t,x),v(\rho,t,x))d\rho. \quad (5)$$

В (5) имеем:

$$a(x)=\varphi''(x)-\varphi(x)\,, \quad (6)$$

$$p(\tau,t,x)=x-\int_{\tau}^{t}v(\upsilon,t,x)d\upsilon. \quad (7)$$

Причем, если

$$u(t,x)=I(t,x)$$

$$u(t,x)=v(t,t,x)\,,$$

то функция $u(t,x)$ является решением задачи (1)–(3).

В своей работе мы применяем метод последовательных приближений и строим график решения с помощью компьютерного математического пакета Maple.

Для решения задачи (1)–(3) выберем следующие значения.

В уравнении (1) выбираем $m=1$, $f(t,x,u(t,x))=1+u(t,x)$. За начальное условие выберем функцию $\varphi(x)=e^{-x^2}$, которая полностью удовлетворяет выражению (2). Тогда за нулевое приближение нам послужит функция:

$$u_0(t,x)=e^{-x^2}\,.$$

Далее вводим последовательно команды в программу Maple и получаем следующие результаты.

Для уравнения (6) имеем:

$$a(x):=-3e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\,. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) находится в виде:

$$p(0,t,x):=x-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\,. \quad (9)$$

Далее составляем и решаем уравнение (5) с учетом (8) и (9):

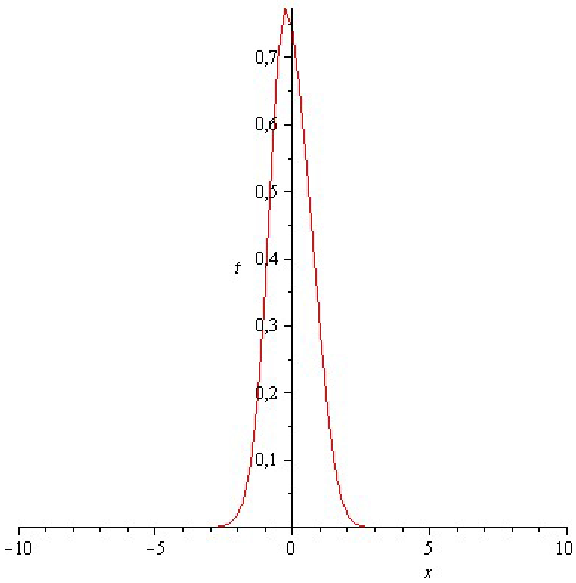

Рисунок 1 – График решения задачи (1)–(3)

$$A(t,x) := -3e^{-\left(x-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right)^2} + 4\left(x-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$e^{-\left(x-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right)^2} + t - \frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2} \qquad (10)$$

Затем мы вычисляем значение интеграла (4).

В силу полученного большого значения для первого приближения решения $u(t,x)$, мы не будем приводить результат вычисления программы.

В результате нашего исследования строим график решения задачи (1) – (3) (рисунок 1):

Полученный результат показывает, что методом дополнительного аргумента можно решать задачи не только аналитически, но и применять современные математические компьютерные средства.

Литература

1. *Иманалиев М.И.* Обоснование и развитие метода дополнительного аргумента для решения дифференциальных уравнений в частных производных / М.И. Иманалиев: дис. … д-ра ф-м.н. Бишкек, 2011. 128 с.
2. *Иманалиев Т.М., Ананьева Ю.Н., Бурова Е.С., Назарбаев Ф.Т.* Приближенные решения уравнения типа Кортевега-де Фриса методом дополнительного аргумента / Т.М. Иманалиев, Ю.Н. Ананьева, Е.С. Бурова, Ф.Т. Назарбаев // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. 2011. Спец. вып. С. 174–176.
3. *Ananjeva J.N.* Approximate Solution of the KDV type Equation by Additional Argument Method / J.N. Ananjeva // Тез. докл. межд. научн. конф. “Функциональный анализ и его приложения”. Астана: ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2012. С. 208–209.