Туркманов Ж.К.,
Кыдыралиева А.К.,
БГУ

МЕТОД СРАЩИВАНИЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАЙТХИЛЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

В конце пятидесятых, начале шестидесятых годов в теории сингулярных возмущений несколькими исследователями независимо друг от друга была применена идея перехода в пространство большей размерности. Как выяснилось позже, сама по себе идея перехода в пространство большей размерности в математике не нова, она была известна еще в прошлом веке (например, А. Пуанкаре [1], с.321). Однако в том виде, в каком она с необходимостью была применена впервые в сингулярно возмущенной модельной задаче Лайтхилла

$$(x+\varepsilon u)u' + k(x)u = h(x), \qquad u(0,\varepsilon) = u^0$$

идея перехода в пространство большей размерности явилась прямым следствием исследований по степенному пограничному слою (см.[2]).

Данная статья посвящена построению явной асимптотики решения модельного уравнения Лайтхилла методом сращивания, которой использует представления одинаковой структуры коэффициентов асимптотического разложения внешнего и внутреннего решения по целым и дробным степеням малого параметра на отрезке, где они совпадают (т.е. они имеют общий отрезок существования). Причем коэффициенты асимптотического разложения внешнего и внутреннего решения, обычно содержат полиномы логарифмов от малого параметра.

Рассмотрим пример при $k(x) = 1, \qquad h(x) = 1$.

$$(x+\varepsilon u(x))u'(x) + u(x) = 1, \qquad u(1) = b > 1, \qquad x \in [0;1] \,. \tag{1}$$

Задачу (1) для простоты можно записать в виде:

$$\frac{d\left(-x+\frac{1}{2}\varepsilon u^2\right)}{dx} + \frac{d(xu)}{dx} = 0\,. \tag{2}$$

Это задача имеет точное решение

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(-x+\sqrt{x^2+2(b-1)\varepsilon+\varepsilon^2 b^2+2\varepsilon x}\right). \tag{3}$$

Решая уравнение (1) методом униформизации Алымкулова К.,

$$\begin{aligned} &\xi\frac{du}{d\xi} = -1 - u(\xi), \qquad u(1) = b \\ &\xi\frac{dx}{d\xi} = x + \varepsilon u(\xi), \qquad x(1) = 1 \end{aligned} \tag{4}$$

Имеем параметрическое предоставление решения

$$\begin{aligned} u &= u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \cdots, \\ x &= \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

Униформизованное уравнение (4) имеет решения

$$\begin{cases} u(\xi) = \dfrac{b+1}{\xi} - 1\,, \\ x(\xi) = \frac{1}{2}\left(2+\varepsilon(b-1)\right)\xi + \varepsilon - \dfrac{\varepsilon(b+1)}{2\xi}\,. \end{cases}$$

Исключая из второго уравнения параметр ξ и подставляя в первое, получаем решение (3) (неявном виде).

Решая уравнение (1) разложением по степеням ε малого параметра, т.е. представляя решение в виде

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \ldots + \varepsilon^n u_n(x) + \ldots\,, \tag{6}$$

тогда для определения $u_j(x)$ получаем следующие задачи:

$$Lu_1 = -u_0 u_0', \qquad u_1(1) = 0, \tag{7.1}$$

$$Lu_2 = -u_0' u_1 - u_0 u_1', \qquad u_2(1) = 0, \tag{7.2}$$

… … …

$$Lu_n = -\sum_{i+j=n-1} u_i u_j', \qquad u_n(1) = 0, \tag{7.n}$$

Невозмущенная задача $(\varepsilon = 0)$, соответствующая задаче (1)

$$Lu_0 = xu_0' + u_0 = 1, \qquad u_0(1) = b.$$

Имеем решение, представимое в виде

$$u_0(x) = \frac{b-1}{x} + 1.$$

Из (7.1) имеем

$$u_1(x) = x^{-3}\left[P_0^{(1,2)} + P_1^{(1,2)}x + P_2^{(1,2)}x^2\right],$$ где

$$P_0^{(1,2)} = -\frac{b-1}{2}, \qquad P_1^{(1,2)} = b-1, \qquad P_2^{(1,2)} = \frac{3}{2}(b-1).$$

Аналогично остальные задачи (7) также имеют единственные решения

$$u_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} P^{(n,n+2)}(x),$$

где $P^{(n,n+2)}(x)$ - полином степени $n+2$ относительно x.

Внешнее разложение имеет вид

$$u(x,\varepsilon) = \frac{1}{x}\Big\{b - 1 + x + \varepsilon x^{-2}[P_0^{(1,2)} + P_1^{(1,2)}x + P_2^{(1,2)}x^2] + \left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^2 P^{(2,4)}(x) + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^n P$$

$$A_{nx}u(x,\mu^2) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots + \varepsilon^n u_n(x), \qquad \varepsilon = \mu^2 \tag{9}$$

$$|u(x,\varepsilon) - A_{nx}u(x,\mu^2)| \le \mu\varepsilon^{-\beta}\varepsilon^{2\alpha(n+1)} \tag{10}$$

$$A_{0x}u(x,\mu^2) = u_0(x) = \frac{b-1}{x} + 1.$$

$$A_{1x}u(x,\mu^2) = \frac{1}{x}\big((b-1) + x\big) + \varepsilon x^{-3}\left(-\frac{b-1}{2} + (b-1)x + \frac{3}{2}(b-1)x^2\right).$$

Внутреннее разложение.

В (1) сделаем подстановку:

$$u = V(t,\mu) = \mu^{-1}v(t,\mu), \qquad x = \mu t, \qquad \varepsilon = \mu^2. \tag{11}$$

Тогда для $v(t)$ получим уравнение

$$(t + v(t))v'(t) + v(t) = \mu \tag{12}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$v(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \dots + \mu^n v_n(t,\mu) + \dots . \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим следующие уравнения:

$$Lv_0(t) = (t + v_0(t))v_0'(t) + v_0(t) = 0, \tag{14_0}$$

$$Lv_1(t) = (t + v_0(t))v_1'(t) + [\![(1+v]\!]_0(t))v_1 = 1, \tag{14_1}$$

$$Lv_2(t) = -v_0(t)v_1'(t) - v_0'(t)v_1(t) = 0, \tag{14_2}$$

… … …

$$Lv_{2n}(t) = -\sum_{j=1}^{2n-1} v_j(t)v_{2n-j}'(t) \qquad (n \ge 2), \tag{14_{2n}}$$

$$Lv_{2n+1}(t) = -\sum_{j=1}^{2n} v_j(t)v_{2n+1-j}'(t) \qquad (n \ge 2) \tag{14_{2n+1}}$$

Для того, чтобы сращивать решение уравнения (12) с внешним решением (8), запишем (8) через внутреннюю переменную t. Имеем

$$u(\mu\, t, \mu^2) = \frac{1}{\mu}[U_0^0(t) + \mu U_1^0(t) + \mu^2 U_2^0(t) + \ \dots] \,, \qquad (15)$$

где $$U_0(t) = \frac{1}{t}\left[P_0^{(0,1)} + \tau P_0^{(1,2)} + \tau^2 P_0^{(2,4)} + \ \dots\right],$$

$$U_1(t) = \frac{1}{t}\left[P_1^{(0,1)} + \tau P_1^{(1,2)} + \tau^2 P_1^{(2,4)} + \ \dots\right] = O(1), \qquad t \to \infty$$

$$U_{2n}(t) = \frac{t^{2n}}{t}\left[P_{2n}^{(0,1)} + \tau P_{2n}^{(1,2)} + \tau^2 P_{2n}^{(2,4)} + \ \dots + \tau^{2n-2} P_{2n}^{(2n-2,2n)} + \ \dots\right].$$

Общее решение уравнения (14_0) имеет вид $v_0(t) = -t \pm \sqrt{t^2 + 2C_0}$, $\qquad (17)$

где C_0 – постоянная интегрирования.

Теперь возьмем из (17) (знак +) и разлагая эту функцию при $t \to \infty$, имеем

$$v_0(t) = \frac{1}{t}(C_0 + v_1^{(0)}\tau + v_2^{(0)}\tau^2 + \ \dots). \qquad (18)$$

Сравнивая с $U_0(t)$, имеем $C_0 = P_0^{(0,\ 1)} = b - 1$, т.е.

$$U_0(t) = v_0(t) \qquad \left(t \geq t_0 = \varepsilon^{\beta - \frac{1}{2}}\right).$$

Общее решение уравнения (14_1) имеет вид

$$v_1(t) = \frac{C_1}{t + v_0} + \frac{t}{t + v_0}. \qquad (19)$$

Сравнивая с $U_1(t)$, имеем $C_0 = 0$, т.е.

$$v_1(t) = \frac{t}{t + v_0} \sim U_1(t), \qquad t \to \infty.$$

$$|u(x, \varepsilon) - X_{2n}(x, \mu)| \leq \mu\varepsilon^{-\beta}\varepsilon^{2\alpha(n+1)} \qquad (20)$$

$$X_{2n}(x, \mu) = A_{2nx}u(x, \mu^2) + A_{2nt}V(t, \mu) - A_{2nt}A_{2nx}u(x, \mu^2),$$

Приближение

$$A_{0\,x}u(x, \mu^2) = u_0(x) = \frac{b-1}{x} + 1\,,$$

$$A_{0\,t}V(t, \mu) = \frac{1}{\mu}\left(-t + \sqrt{t^2 + 2(b-1)}\right) + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2(b-1)}}.$$

$$A_{0\,t}A_{0\,x}\,u(x, \mu^2) = \mu^{-1}t^{-1}(b-1) + 1 = A_{0\,x}u(x, \mu^2), \qquad (22)$$

$$[A_{0\,t}V(t, \mu)]_x = \frac{1}{\mu}\left[-\frac{x}{\mu} + \sqrt{\frac{x^2}{\mu^2} + 2(b-1)}\right] + \frac{x}{\mu\sqrt{\frac{x^2}{\mu^2} + 2(b-1)}} =$$

$$=\frac{x}{\varepsilon}\left[-1+\left(1+\frac{2\varepsilon(b-1)}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\frac{1}{\left(1+\frac{2\varepsilon(b-1)}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{x}{\varepsilon}\left[-1+\left(1+\frac{2\varepsilon(b-1)}{2x^2}+O(\varepsilon^2)\right)\right]+1+O(\varepsilon)=\frac{b-1}{x}+1+O(\varepsilon).$$

Таким образом

$$A_{0\,x}A_{0\,t}\,V(t,\mu)=A_{0\,t}A_{0\,x}u(x,\mu^2).$$

Поэтому нулевое приближение $n=0$:

$$X_0(x,\mu)=A_{0\,x}u(x,\mu^2)+A_{0\,t}V(t,\mu)-A_{0\,t}A_{0\,x}u(x,\mu^2)=$$

где $A_{0\,x}u(x,\mu^2)=u_0(x)=\dfrac{b-1}{x}+1$,

$$A_{0\,t}A_{0\,x}\,u(x,\mu^2)=\mu^{-1}t^{-1}(b-1)+1\ .$$

$$A_{0\,t}V(t,\mu)=\frac{1}{\mu}\left[-t+\sqrt{t^2+2(b-1)}\right]+\frac{t}{\sqrt{t^2+2(b-1)}}$$

и непосредственная оценка дает

$$|u(x,\varepsilon)-X_0(x,\varepsilon)|\le\mu_1\varepsilon^{2\alpha-\beta}\ ,$$

для внешнего приближения и

$$|u(\mu\,t),\mu^2-A_{0\,t}V(t,\mu)|\le\mu\mu_2$$

для внутреннего приближения, что вторая оценка справедлива на всем отрезке $(\mu_2=\sqrt{2})$ т.е. малый параметр оказывается в первой степени.

Аналогично вычисляется первое приближение $(n=1)$

$$A_{1\,t}A_{1\,x}u(x,\mu^2)=A_{1\,x}\,u(x,\mu^2),\qquad O(\mu)=O(\sqrt{\varepsilon})\,.$$

Литература

1. Пуанкаре А. Собр. соч.т.1. - М.: Наука, 1971.
2. Ломов С.А. О модельном уравнении Лайтхилла. -Сб. научных трудов МО. СССР, - М.1964. №54, с.74-83
3. Алымкулов К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла //Изв. АН. Киргиз. ССР-1981. №1. -с.35-38
4. Коул Дж. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1972.- 276с.
5. Туркманов Ж.К.Об одном классе возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особенностью. //Исследование по интегро-дифференциальное уравнение. – Б.: Илим,1997. - Вып.26.-с. 143-147.