Туркманов Ж.К.,
Кыдыралиева А.К.,
БГУ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Исследуем поведение при $\varepsilon \to +0$ интегралов вида

$$F(\varepsilon;\ \alpha,\beta) = \int_0^a t^{\beta-1}(t+\varepsilon)^{\alpha}\varphi(t)dt, \qquad 0 < a < \infty. \tag{1}$$

Здесь $\beta > 0$, α – вещественное число.

Если $\varphi \in C[0,a]$, то функция $F(\varepsilon;\ \alpha,\beta)$ голоморфна в комплексной плоскости ε с разрезом по полуоси $(-\infty;\ 0)$. В точке $\varepsilon = 0$ это функция имеет особенность (за исключением случаев, когда $\alpha \geq 0$ - целое число или $\varphi(t) \equiv 0$ в окрестности точки $t = 0$). Нас интересует характер особенности. Заметим, что интеграл вида (1) по любому отрезку $[\delta, a]$, $0 < \delta < a$, есть голоморфная функция в точке $\varepsilon = 0$. Следовательно, особенность функции F в точке $\varepsilon = 0$ полностью определяется поведением функции $\varphi(t)$ при малых $(t \geq 0)$, т.е. ростком функции $\varphi(t)$ в точке $t = 0$.

Теорема. Пусть -вещественное число, $\beta > 0,$ $\varphi(t) \in C(0,a]$.

1°. Пусть $\alpha + \beta$ не является целым числом. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$F(\varepsilon;\ \alpha,\beta) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} B(\beta+n, -\alpha-\beta-n)\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\varepsilon^{\alpha+\beta+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n ,$$
$$(\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon \in S_\delta) \tag{2}$$

S_δ – сектор: $0 < |\varepsilon| \leq r,$ $|arg\varepsilon| \leq \pi - \delta$ комплексной Плоскости ε . Здесь $r > 0$, число δ может быть выбрано сколь угодно малым, но не зависящим от ε .

2°. Пусть $\alpha + \beta = N$, где N-целое число. Тогда справедливо асимптотическое разложение

$$F(\varepsilon;\ \alpha,\beta) \sim -\sum_{n\geq \max[0,-N]}^{\infty} \varepsilon^{n+N}\ln\varepsilon \binom{n+N}{\alpha}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon^n ,$$
$$(\varepsilon \to 0, \qquad \varepsilon \in S_\delta). \tag{3}$$

Эти разложение можно дифференцировать по ε любое число раз.

Для функций $\varepsilon^\gamma,$ $\ln\varepsilon$ выбрана в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ такая ветвь, что $\varepsilon^\gamma > 0$ при $\varepsilon > 0, \ln\varepsilon$ вещественен при $\varepsilon > 0$.

Разложим функцию $\varphi(t)$ по формуле Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{k}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + t^{k+1}\psi_k(t), \tag{4}$$

где функция .
Тогда

$$F(\varepsilon;\ \alpha,\beta) \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\phi(\varepsilon;\ \alpha,\beta+n) + R_k(\varepsilon), \tag{5}$$

$$R_k(\varepsilon) = \int_0^a t^{\beta+k}(t+\varepsilon)^{\alpha}\psi_k(t)dt .$$

Для интегралов $\phi(\varepsilon;\ \alpha;\ \beta+n)$

$$\phi(\varepsilon;\ \alpha,\beta+n) = B(\beta, -\alpha-\beta)\varepsilon^{\alpha+\beta} + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\alpha}\frac{a^{\beta+\alpha-n}}{\beta+\alpha-n}\varepsilon^n,$$

$$\phi(\varepsilon;\ \alpha, N-\alpha) = \varepsilon^N \left[\binom{N}{\alpha}\ln\frac{a}{\varepsilon} + \frac{(-1)^{N+1}}{\Gamma(-\alpha)}\cdot\frac{d}{d\rho}\frac{\Gamma(N-\alpha+\rho)}{\Gamma(N+1+\rho)}\Big|_{\rho=0}\right] +$$

Функция $R_k(\varepsilon)$ голоморфна в секторе S_δ. Так как

$$R_k^{(\delta)}(0) \cong \lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon\in S_\delta} R_k^{(\delta)}(\varepsilon) = \binom{S}{\alpha}\int_0^a t^{\beta+\alpha+k-S}\psi_k(t)dt,$$

то производные $R_k^{(S)}(0)$ существует при $S < \alpha+\beta+k+1.$

Следовательно,

$$R_k(\varepsilon) = \sum_{S=0}^{[\alpha+\beta+k]}\frac{\varepsilon^S}{S!}R_k^{(S)}(0) + o\left(\varepsilon^{[\alpha+\beta+k]}\right). \qquad (6)$$

при $\varepsilon \in S_\delta, \qquad \varepsilon \to 0.$ Подставляя в (5) и учитывая, что к можно выбрать сколь угодно большим, получаем (2). Аналогично доказывается (3).

Коэффициенты сингулярной части разложений (2) зависят только от значений $\varphi^{(k)}(0)$ (т.е. определяются ростком функции $\varphi(t)$ в точке $t=0$) . Коэффициенты a_n, b_n регулярной части разложений зависят от значений $\varphi(t)$ при $0 \le t \le a$. Приведем формулы для коэффициентов a_n (т.е. $\alpha+\beta$ - нецелое число). Из (4) – (6) и $(A_1), (A_2)$ получаем

$$a_n = \binom{n}{\alpha}\sum_{m=0}^{k}\frac{a^{\alpha+\beta+m-n}}{\alpha+\beta+m-n}\cdot\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{1}{n!}\binom{n}{\alpha}\int_0^a t^{\beta+\alpha+k-n}\psi_k(t)dt, \qquad (7)$$

где к таково, что $\alpha+\beta+m-n > 0,$ функция

$$\psi_k(t) = t^{-k-1}\left[\varphi(t) - \sum_{m=0}^{k}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m\right].$$

Если же функция $\varphi(t)$ допускает аналитическое продолжение в круг $|t| < R$, где $R > a$, то в формуле (7) можно положить $k=\infty,\ \psi_k(t)\equiv 0,$ так, что в этом случае

$$a_n = \binom{n}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{\alpha+\beta+m-n}}{\alpha+\beta+m-n}\cdot\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}. \qquad (8)$$

Если же $\varphi(t) \in C^\infty([0, \quad a]),$ то формула (8), вообще говоря, неверна. Действительно, из формулы Коши – Адамаре следует, что сходимость ряда (8) (при некотором $n=n_0$) влечет сходимость степенного ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}t^m \quad \text{в круге} \quad |t| < a.$$

<u>Замечание</u>. Теорема очевидным образом обобщается на интегралы вида

$$F(\varepsilon) = \int_0^a t^\beta(t+\varepsilon)^\alpha\varphi(t,\varepsilon)dt, \qquad (9)$$

где функция $\varphi(t) \in C^\infty([0, \quad a]\times\{\varepsilon: |\varepsilon| < r\})$ и голоморфна по ε круге $|\varepsilon| < r$ при каждом фиксированном $t \in [0, \quad a]$. При этом сингулярная часть асимптотического ряда имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B(\beta+n, -\alpha-\beta-n)\,\frac{\partial^n\varphi(t,\varepsilon)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}\varepsilon^{\alpha+\beta+n}, \qquad (2')$$

если $\alpha+\beta$ - нецелое число, и вид

$$-\sum_{n\ge\max[0,N]}^{N}\binom{n+N}{\alpha}\frac{\partial^n\varphi(t,\varepsilon)}{\partial t^n}\Big|_{t=0}\varepsilon^{n+N}\ln\varepsilon, \qquad (3')$$

если $\alpha+\beta = N$.

Разложения (2), (3) остаются в силе и в этом случае, когда

$$\varphi(t,\varepsilon) \in C^\infty([0,a]\times[0,\varepsilon_0]), \qquad \varepsilon_0 > 0, \qquad \text{при } \varepsilon\to+0.$$

<u>Пример</u>. Вычислим главный член асимптотики при $\varepsilon \to +0$ интеграла

$$F(\varepsilon) = \int_0^a\frac{\varphi(t)}{t+\varepsilon}dt, \qquad 0 < a < 1.$$

В данном случае $\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad$ так что $\alpha + \beta = 0$, и по формуле (3) имеем
$F(\varepsilon) \sim \varphi(0) \ln \varepsilon, \qquad (\varepsilon \to 0)$.

Можно получить этот результат непосредственно:

$$F(\varepsilon) = \varphi(t)\ln(t+\varepsilon)\Big|_0^a - \int_0^a \varphi'(t)\ln(t+\varepsilon)dt.$$

Последний интеграл ограничен при $\varepsilon \to 0$. Из этой формулы следует также, что при $\varepsilon \to +0$.

$$F(\varepsilon) = -\varphi(0)\ln\varepsilon + \varphi(a)\ln a - \int_0^a \varphi'(t)\ln t\,dt + o(1).$$

Построим асимптотический ряд. Предположим вначале, что функция $\varphi(x)$ голоморфна в точке $\varepsilon = 0$. Имеем

$$F(\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-\varepsilon)}{x+\varepsilon}dx.$$

Подынтегральная функция голоморфна по ε при малых $|\varepsilon|$ и разлагается в ряд

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-\varepsilon)}{x+\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\varepsilon^n,$$

$$C_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+1}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \varphi(x) - \varphi(0)\right].$$

Интегрируя этот ряд почленно и разлагаются функции $\varphi(-\varepsilon), \quad \ln(1+\varepsilon)$ в ряды по степеням ε, получаем сходящийся при малых $|\varepsilon|$ ряд

$$F(\varepsilon) = \ln\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varepsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varepsilon^n. \qquad (10)$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}\varphi^{(n)}(0)}{n!}, \qquad b_n = \int_0^1 C_n(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi^{(n-k)}(0)}{(n-k)!\,k}.$$

Покажем, что этот ряд – асимптотический при $\varepsilon \to +0$, если $\varphi \in C^\infty$. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$F(\varepsilon) = \varphi_N(-\varepsilon)\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi_N(-\varepsilon)}{x+\varepsilon}dx,$$

$$\varphi_N(-\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!(-\varepsilon)}.$$

Это приведет к формуле

$$F(\varepsilon) = \ln\varepsilon \sum_{n=0}^{N} a_n\varepsilon^n + \sum_{n=0}^{N} b_n\varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1}\ln[\varepsilon)],$$

где коэффициенты a_n, b_n - те же, что и в (10).

Следовательно, ряд (10) – асимптотический при $\varepsilon \to +0$.

Литература

1. Де Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе. – М.: ИЛ, 1961.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.- М: Мир 1968.
3. Копсон Э. Асимптотические разложения – М.: Мир 1966.
4. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М: Издательство МГУ, 1965.
5. Брычков Ю.А. о асимптотических разложениях обобщенных функций. – Мат. заметка. – 1972. – т.12, №2.- С. 131 – 138.
6. Erdelyi A. Asymptotic expansions of Fourier integrals involving logarithmic singularities //J. Soc. Industr. Appl. Math.- 1956. – V.4. №1.- P. 38-47.