УДК 517.9

Панков П.С., член-корреспондент НАН КР, профессор МУК
Долматов С.Л., к.ф.-м.н., и.о. профессора КГТУ
Жээнтаева Ж.К., к.ф.-м.н., зав. кафедрой КУУ, г. Ош

ЯВЛЕНИЕ ЗАМЕДЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕУСТОЙЧИВОГО ТИПА

Аннотациясы: *Топтоштурулган кечигүүсү болгон, туруктуу түрүндөгү дифференциалдык теңдемелер үчүн белгиүү натыйжа менен аналогия боюнча, төмөнкүдөй теорема далилделген. Эгерде турактуу кечигүүсү h болгон, туруктуу эмес түрүндөгү дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын 2n-тен көп эмес «нөлү» узундугу h болгон кесиндиде болсо, анда узундугу h болгон соңку кесиндиде 2n-тен көп эмес «нөлү» бар.*

Негизги сөздөр: *кечигүүсү болгон түрүндөгү дифференциалдык теңдеме, чыгарылыш, чайпалуу*

Аннотация: *По аналогии с известным результатом для дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием устойчивого типа, доказана теорема: если решение уравнения неустойчивого типа с постоянным запаздыванием h имеет не более 2n нулей на отрезке длины h, то оно имеет не более 2n нулей на последующем отрезке длины h.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение с запаздыванием, решение, колебание*

Abstract: *By analogy with the well-known result for differential equations with concentrated delay of stable type, the following theorem is proven: if a solution of an equation with concentrated delay of instable type has no more than 2n zeros on a segment of length h then it has no more than 2n zeros on the next segment of length h.*

Keywords: *delay-differential equation, solution, oscillation*

Введение

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием аргумента

$$x'(t)=A(t)x(t-h),\ t \in R_+=[0,\infty) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0], \qquad (2)$$

где $h=const>0;\ A(t) \in C(R_+)$, $\varphi(t)\in C[-h,0]$ и $A(t) \in C(R_+)$ – заданные функции.

Обозначим решение начальной задачи (1)-(2) через $X(t;\ \varphi(\cdot))$.

В случае $A(t)=a=const$ (уравнение (1) является автономным) результаты о колебаниях (а также – асимптотике при $t \to\infty$) решений $X(t;\ \varphi(\cdot))$ дает теория Флоке (см. например, [1], [2]): рассматривается характеристическое уравнение

$$\lambda=ae^{-\lambda h} \qquad (3)$$

Доказано, что это уравнение имеет бесконечное количество решений λ_1, λ_2, λ_3, ... в комплексной плоскости, причем

$$\lim_{k\to\infty} Re\lambda_k =-\infty, \qquad (4)$$

и кроме, может быть, λ_1, λ_2, последующие значения $\lambda_k =\mu_k \pm i\nu_k$ – комплексные (комплексно-сопряженные, как у всех уравнений с вещественными коэффициентами), причем

$$\lim_{k\to\infty} Im\lambda_k \equiv \lim_{k\to\infty} \nu_k =\infty. \qquad (5)$$

Таким образом, уравнение (1) имеет все более быстро затухающие и при этом все более быстро колеблющиеся решения.

Далее, доказано, что решение представимо в виде асимптотического ряда (6)

$$X(t,\varphi(\cdot)) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi(\cdot))\ \exp(\lambda_k t)\ \ t \in R_+,$$

где коэффициенты c_k определяются начальной функцией.

Из (6), (4) и (5) следует, что «вообще говоря», колебания решения замедляются при увеличении *t*. Однако получить конкретные результаты таким образом пока не удалось.

Отметим еще, что в [6] показано, что в общем случае, для неавтономных уравнений представление (7) может не иметь места.

В [1] доказана (для несколько более общего запаздывания)

ТЕОРЕМА 1. Если $A(t)<0$ и решение $X(t)$ уравнения (1) имеет не более $(2n+1)$ нулей на отрезке $[a, a+h]$, то $X(t)$ имеет не более $(2n+1)$ нулей на отрезке $[a+h, a+2h]$.

Ниже аналогичный результат получен для уравнения устойчивого типа.

1. Основная теорема

ТЕОРЕМА 2. Если $A(t)>0$ и решение $X(t)$ уравнения (1) имеет не более $2n$ нулей внутри отрезка $[a, a+h]$, то $X(t)$ имеет не более $2n$ нулей внутри отрезка $[a+h, a+2h]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $k\le 2n$ количество перемен знака решения $X(t)$ на отрезке $[a, a+h]$. Тогда количество нулей решения $X(t)$ на отрезке $[a+h, a+2h]$ будет не больше $k+1$, поскольку два нуля разделяет перемена знака у производной $X'(t)$, в свою очередь являющейся переменой знака у $X(t-h)$.

Достаточно рассмотреть случай $k=2n$. Тогда для любых достаточно малых $\varepsilon>0$ числа $X(a+\varepsilon)$ и $X(a+h-\varepsilon)$ будут иметь одинаковый знак; не умаляя общности, пусть они будут положительны.

Пусть $(a+v)$ – первый нуль решения $X(t)$ на отрезке $[a, a+h]$. Тогда будет $X'(t)\ge 0$ и, следовательно, $X(t)>0$. при $t \in[a+h+\varepsilon, a+h+v]$, то есть (*) нули решения $X(t)$ на отрезке $[a+h+\varepsilon, a+h+v]$ отсутствуют.

На отрезке $[a+v, a+h-\varepsilon]$ осталась $(2n-1)$ перемена знака решения $X(t)$, поэтому на отрезке $[a+h+v, a+2h-\varepsilon]$ будет не более $2n$ перемен знака.

Этот факт вместе с (*) дает результат: на отрезке $[a+h+\varepsilon, a+2h-\varepsilon]$ решение $X(t)$ имеет не более $2n$ перемен знака.

Устремляем ε к нулю.

Теорема доказана.

2. Пример, показывающий существенность наложенных условий

Рассмотрим уравнение

$$x'(t)=A_1(t)x(t-1)+A_2(t)x(t-2),\ t \in [0,2] \quad (7)$$

с начальным условием (2), $h=2$. Пусть $\varphi(0)=0$. Тогда (8)

$$X(t,\varphi(\cdot))=\int_0^t A_1(s)\varphi(s-1)ds+\int_0^t A_2(s)\varphi(s-2)ds,\ t\in[0,1].$$

Если $\varphi(t)<0$ при $-2<t<-1$ и $\varphi(t)>0$ при $-1<t<0$, то первое слагаемое в (8) положительно, а второе – отрицательно.

Отсюда видно, что выбирая соответствующим образом положительные функции $A_1(t), A_2(t) \in C[0,1]$, можно добиться того, что решение (8) будет менять знак на отрезке $[0,1]$ любое количество раз. Таким образом, Теорема 2 является специфической для одного сосредоточенного запаздывания.

Отметим еще, что в [4] показана специфика сосредоточенных запаздываний в отличие от общего уравнения с запаздыванием.

3. Возможное использование полученного результата

Из Теоремы 2 следует, что, кроме очевидного понятия положительного (и возрастающего) решения, возникают понятия «медленно колеблющихся» решений уравнений неустойчивого типа с одним постоянным запаздыванием: не более двух нулей на отрезке длины запаздывания, не более четырех нулей на отрезке длины запаздывания, и т.д.

В сочетании с соотношением (6), а также учитывая [6], получаем:

ГИПОТЕЗА. Если функция $A(t)$ равномерно ограничена на полуоси, то для уравнения неустойчивого типа существуют такие медленно колеблющиеся решения $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ (не более двух нулей на отрезке длины запаздывания) начальной задачи (1)-(2) и такое число $M=const>0$, что для любой начальной функции $\varphi(t)$ будет (9)

$$\lim_{t\Rightarrow}\frac{X(t,\varphi(\cdot)\ -C_1\varphi(\cdot)\xi_1(t)-C_2\varphi(\cdot)\xi_2(t)-C_3\varphi(\cdot)\xi_3(t)}{\max\{|\xi_j(s)|:t-M\le s\le t;\ j=2,3\}}=0$$

при достаточно малом запаздывании.

Для подтверждения этой гипотезы численными экспериментами, по методу (5), поступаем следующим образом.

Строим функцию $\xi_1(t)$, как решение задачи (1)-(2) с некоторой положительной начальной функцией $\varphi_1(t)$. Также выбираем еще три случайно выбранных начальных функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$. Они, соответственно, дают четыре решения с остаточными членами

$$X_1(t)\equiv \xi_1(t),$$

$$X_2(t)=c_{21}\xi_1(t)+ \xi_2(t),$$

$$X_3(t)=c_{31}\xi_1(t)+ \xi_3(t), \quad (10)$$

$$X_4(t)=c_{41}\xi_1(t)+c_{42}\xi_2(t)+c_{43}\xi_3(t)+\eta_4(t),$$

где $\xi_1(t)>0$, $\xi_2(t)\sim o(\xi_1(t))$, $\xi_3(t)\sim o(\xi_1(t))$, $\eta_4(t)\sim o(|\xi_2(t)|+|\xi_3(t)|)$ при $t\to\infty$.

1-е следствие Гипотезы. Существуют пределы (11)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_2(t)}{\xi_1(t)}=p_{21}=const,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_3(t)}{\xi_1(t)}=p_{31}=const.$$

Вводя обозначения, получаем

$\xi_2(t):= X_2(t) - p_{21}\ \xi_1(t)$, $\xi_3(t):= X_3(t) - p_{31}\ \xi_1(t)$.

Поскольку решения были выбраны случайно, функции $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ должны быть ненулевыми, линейно независимыми между собой и медленно колеблющимися.

Если это следствие подтверждается, то

2-е следствие Гипотезы. Существует предел (12)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_4(t)}{\xi_1(t)}=p_{41}=const,$$

существуют такие числа c_{42}, c_{43}, что функция

$$\eta_4(t)=X_4(t) - c_{41}\xi_1(t) - c_{42}\xi_2(t) - c_{43}\xi_3(t)$$

является быстро колеблющейся и $\eta_4(t)\sim o(|\xi_2(t)|+|\xi_3(t)|)$ при $t\to\infty$.

Расчеты на компьютере для разностного уравнения, соответствующего (1), подтвердили эти следствия для случайно выбранных функции $A(t)>0$ и начальных функций $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$.

Литература:

1. Pinney E. Ordinary difference-differential equations. – Berkeley; Los Angeles: University of California press, 1958. – XII+262 p.
2. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения, пер. с англ. - Москва: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 248 с.
3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
4. Pankov P., Zheentaeva Zh. Conditions of continuous dependence of solutions of delay-differential equations on initial data in integral norm // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – P. 129.
5. Жээнтаева Ж.К. Алгоритм для экспериментального исследования асимптотики решений линейных уравнений с запаздывающим аргументом // Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования: Тексты и тезисы докладов Международной конференции 15-18 декабря 2014 г. – Москва: Российский университет дружбы народов, 2014. – С. 211-212.
6. Панков П.С. Пример линейного однородного дифференциального уравнения с запаздыванием, не имеющего конечномерного экспоненциально устойчивого при $t\to\infty$ пространства решений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1977. - С.117-125.