УДК 378

Найманова А.Б., докторант МУКР,
преподаватель Павлодарского ГПИ (Республика Казахстан)

ИНДУКТИВНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Аннотациясы: *Мурда биз төмөнкүдөй илимий божомолду койдук. Эгерде алдын ала билими болгон окуучуга туура келген тандалган маселелердин удаалаштыгы берилсе, анда ал өз алдынча макул боло турган мөөнөттө негизги математикалык фактыларды билдире жана алардын кээ бирин далилдөөнү таба алат. Мында жогорку математикадан кээ бир мисалдар берилет.*
Негизги сөздөр: *өз алдынча окуу, жогорку математика, макалалар*

Аннотация: *Ранее нами была выдвинута гипотеза: Если давать учащемуся, имеющему необходимые пререквизиты, соответствующим образом подобранную серию задач, то он может за приемлемое время самостоятельно установить основные математические факты и найти доказательства некоторых из них. Здесь приводятся примеры из высшей математики.*
Ключевые слова: *самостоятельное изучение, высшая математика, задачи*

Abstract: *The following hypothesis was stated by us. Students having prerequisite knowledge being given a series of happily composed tasks can themselves guess basic mathematical facts and can find proofs of some of them. Examples of such statement in advanced mathematics are given here.*
Keywords: *independent learning, advanced mathematics, tasks*

Введение

При традиционном изложении математических дисциплин сначала дается определение какого-либо нового понятия, далее приводятся примеры, доказываются (или сообщаются) теоремы, а потом уже предлагаются задачи на проверку знания и понимания этого определения.

Вместе с тем, при применении методики «опережающего обучения», предложенной Л.С.Выготским, нами было установлено, что многие факты и теоремы математики, а также некоторые законы механики для некоторых учащихся являются очевидными. И их изложение, как нового материала, вызывает у таких учащихся только отрицательную реакцию.

Таким образом, задачи на некоторые правила и теоремы можно предлагать до изложения соответствующей темы.

Впервые применять индуктивный метод предложил Сократ, диалог «Менон». Сократ выдвинул гипотезу, что знания имеются у человека до рождения, и путем постановки наводящих вопросов можно заставить человека «вспомнить» эти знания.

Преимущества индуктивного преподавания математических дисциплин подчеркивались во многих работах. Приведем некоторые формулировки.

Ж. Массе «Учащийся должен участвовать в “изобретении арифметики”.»

С.И. Шохор-Троцкий: «Необходимость построения всего курса матема-тики на методически подобранных задачах и упражнениях, а не на объяснениях учителя и не на тексте учебника».

Н.Б.Истомина: «Используя индуктивные умозаключения, учащиеся могут самостоятельно “открывать” математические свойства и способы действий (правила), которые в математике строго доказываются. Помогать детям словесно оформлять наблюдения, задавая наводящие вопросы, уточняя и корректируя те формулировки, которые они предлагают».

Вместе с тем, обзор литературы показал, что конкретных примеров имелось явно недостаточно. Кроме упомянутых формулировки и доказательства теоремы Пифагора для равнобедренного прямоугольного треугольника, обычно приводятся простейшие примеры вида «какой будет сумма двух нечетных чисел – четной или нечетной», а также следующий, для демонстра-ции метода полной математической индукции:

1 + 3 = ? 1 + 3 + 5 = ? 1 + 3 + 5 + 7 = ? 1+3+5+7+9=?

Нами была предложена

Гипотеза [3], [4]. Если давать учащемуся, имеющему необходимые предварительные знания (пререквизиты), соответствующим образом подобранную серию задач и опровергать примерами неправильные ответы, то он может за приемлемое время самостоятельно установить основные математические факты и найти доказательства некоторых из них.

Соответственно, с учетом [1], [2] был предложен следующий путь изложения нового материала:

- Представление задачи со случайными исходными данными (для случайности можно спрашивать такие данные у самих учащихся);
- Получение ответов от учащихся;
- (Мысленный) отбор правильных ответов;
- Подбор примеров, опровергающих неправильные ответы; это тоже можно предоставить учащимся;
- Задание: сформулировать полученный индуктивно результат в общем виде;
- Обсуждение предложенных формулировок и сообщение о формулировке в общепринятых терминах и обозначениях;
- (иногда) Предложение о доказательстве данного факта (с соответствующими наводящими вопросами).

Используется следующий индуктивный принцип:

Если некоторая «естественная» закономерность имеет место для случайно выбранного элемента множества (или нескольких элементов), то она также имеет место для всех элементов множества (кроме, может быть, «особых» или «крайних» случаев).

Некоторые примеры из элементарной математики были предложены нами в [3]. Здесь предлагаются примеры из высшей математики.

2. Экспоненциальная функция и дифференциальные уравнения для нее

Спрашиваются два случайных числа, например 5 и 8.

1-й вопрос. «В 12.00 было 8 миллионов атомов радиоактивного изотопа; в 13.00 осталось 5 миллионов атомов. Сколько приблизительно осталось атомов в 14.00?»

Если учащиеся (или некоторые из них) дают ответ: «2 миллиона», то

2-й вопрос: «Сколько приблизительно осталось атомов в 15.00?»

И учащиеся видят свою ошибку.

Принципиальным в нашем методе является следующее: если учащийся даст ответ «3 миллиона» на первый вопрос, то нельзя говорить: «неправильно», это оттолкнет его. Нужно сказать: «Правильно, около 3 миллионов.

3-й вопрос всем: А как посчитать более точно?»

4-й вопрос: «Сколько приблизительно стало атомов в 12.30? Не спешите» (Если не сказать «не спешите», то почти все дадут ответ «6.5 миллионов»).

Если учащиеся затрудняются, то

5-й вопрос: «Постройте приближенный график количества атомов в зависимости от времени от 12.00 до 16.00» и повторить «Сколько приблизительно получается по графику атомов в 12.30?»

Ответы будут между 6.0 и 6.4 миллиона – их всех нужно считать пра-вильными. Пусть каждый подчеркнет свой ответ в тетради.

6-й вопрос всем: «А как посчитать более точно?»

Если никто не сможет решить, то подсказка «Учтите, что за каждые полчаса количество атомов уменьшается в одно и то же количество раз». В результате построения квадратного уравнения получается ответ: «6.325 миллионов».

Примечание 1. Здесь построение квадратного уравнения будет затруд-няться тем, что почти у всех будет получаться «X*X=2X» (аналогичное явление отмечено в [5]). Общая закономерность: когда ум у человека работает на пределе, он заменяет действия на действия более низкой ступени: умножение – на сложение, возведение в степень – на умножение.

Примечание 2. Опыт показывает, что те, кто раньше учил формулы радиоактивного распада по физике, не могут их вспомнить и не имеют преимуществ перед другими студентами.

Далее, здесь можно применить методику [2]. «А теперь давайте определим чемпиона по точности. У кого отклонение от 6.325 минимальное?»

7-й вопрос: «Как получить ответ 6.325 миллионов из 8 миллионов и 5 миллионов более быстрым способом?»

Здесь можно будет рассказать о формуле среднего геометрического.

8-й вопрос: «Сколько приблизительно стало атомов в 12.15? В 12.45?»

9-й вопрос: «Как посчитать количество атомов в любой заданный момент времени?»

10-й вопрос: «Сформулируйте правило изменения количества атомов.»

Здесь мы предлагаем использовать понятие «неформальная словесная запись дифференциального уравнения»

Возможные ответы: «Уменьшается.» – «Правильно. А как уменьшается?»

«Сначала быстро, а потом – медленно.» – «Правильно. А более точно?»

«Чем меньше атомов, тем медленнее уменьшается.» – «Правильно. А как это записать математически?»

Так приходим к уравнению $A'(t)= - KA(t)$ (*) (минус обязателен; уравнение $A'(t)= K A(t)$ с условием $K<0$ непонятно).

11-й вопрос: «У какой функции производная равна функции? У какой функции производная равна функции с минусом?»

12-й вопрос: «Как выглядит решение уравнения (*)?»

13-й вопрос: «Каким надо взять K, чтобы из 8 миллионов через час получилось 5 миллионов?» и т.д.

Продолжение. 1-й вопрос. «В 12.00 было 5 миллионов микробов; в 13.00 стало 8 миллионов микробов. Микробы размножаются (делятся) неза-висимо один от другого. Сколько приблизительно микробов будет в 14.00?»

И далее аналогичные вопросы.

Так приходим к уравнению $M'(t)= KM(t)$ (**).

3. Интеграл от периодической функции

1-й вопрос. «Начертить график высоты дерева на протяжении пяти лет. Начало – весной».

2-й вопрос. «Чему равна производная от высоты дерева?» (периодическая функция).

4. Неавтономное дифференциальное уравнение

1-й вопрос. «В ящике стола в этой комнате лежит незасвеченная фото-пленка, сейчас ее цвет – белый. Обозначим белый цвет единицей, а черный – нулем. Начертить график цвета фотопленки на протяжении семи суток, начало - сейчас».

2-й вопрос. «Каким дифференциальным уравнением описывается этот процесс?» Ответ преподавателя:

C'(t)= – K(Освещенность в комнате, как функция от t)* C(t).*

5. Понятие предела

5.1. Выбирается нечетное случайное число, например, 9.

1-й вопрос. «Обозначим $F(X)= \sqrt{(X^2+9X)} - X$. Вычислите на калькуляторе и запишите: $F(10); F(100); F(1000); F(100000)$.»

2-й вопрос. «Сделайте вывод».

Здесь следует отметить, что существующие математическая терминология и система обозначений складывались исторически, еще не были официально утверждены, имеют ряд неудобств, неточностей, двусмысленностей. Поэтому предложенные учащимся термины и формулировки могут быть даже более точны, чем существующие. Также, термины на различных (кыргызском и русском) языках для одного и того же понятия могут не соответствовать один другому в общеязыковом смысле.

3-й вопрос. «Как записать ваш вывод математически?»

5.2. Выбирается случайное число, например *40*:

1) Дано: $b_1=40,\ b_2=60,\ b_3=49,\ b_4=51,\ b_5=49.9,\ b_6=50.1.$

«Найти b_7, b_8. Найти b_{100} с точностью

0.001.»

2) Дано: $d_1=40$, $d_2=60$, $d_3=70$, $d_4=75$, $d_5=77.5$.

«Найти d_6, d_7. Найти d_{100} с точностью *0.001.*»

3) Дано: $v_1=40$, $v_{k+1}=(7-v_k)/2$, $k=1,2,3,\ldots$

«Найти v_2, v_3, v_4, v_5. Найти v_{1000} с точностью *0.000000001.* »

«Как обосновать такой результат? »

Общий вопрос: «Как назвать полученное вами число по отношению к последовательности? У всех ли последовательностей есть такие числа?»

6. Понятия производной от кусочно-линейной возрастающей функции, определенного интеграла и теорема Ньютона-Лейбница

Выберите различные случайные числа $V_1 \in 4..7$, $T_1 \in 3..7$, $V_2 \in 3..5$, $T_2 \in 3..7$.

Задача. Человек шел (по прямой) 7 часов со скоростью 5 км/час, а потом еще 4 часа со скоростью 3 км/час.

1-е задание. Постройте график скорости человека в зависимости от времени.

2-й вопрос. «Вычислите, какое расстояние прошел человек.»

3-й вопрос. «Найдите связь между графиком скорости и пройденным расстоянием»

4-й вопрос. «Сформулируйте эту связь в общем виде.»

В дополнение к Задаче:

Потом еще человек шел назад 5 часов со скоростью 2 км/час.

5-й вопрос. «Вычислите расстояние от начальной точки до конечной точки пути человека.»

6-й вопрос. «Как нужно построить график скорости, чтобы сохранилась найденная связь между ним и результатом 5-го вопроса?»

Литература:

1. Панков П.С., Эгембердиев Ш.А., Джаналиева Т.Р. Методика аналоговых и неявных заданий для повышения мотивации к учебе // Вестник Международный университет Кыргызстана, 2008, № 2(17). – С. 82-84.
2. Pankov P.S. Independent learning for Open society // Collection of papers as results of seminars conducted within the frames of the program «High Education Support». Bishkek: Foundation «Soros-Kyrgyzstan», 1996. - Issue 3, pp. 27-38.
3. Панков П.С., Найманова А.Б. Индуктивное изучение математических дисциплин // Вестник Международного университета Кыргызстана. - 2014, № 1(25). – С. 3-6.
4. Pankov P., Naimanova A. Directed original developing of foundations of mathematics // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians (Kyrgyzstan, Bulan-Sogottu, 5-7 June, 2014) / Ed. A.Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. – P. 312.
5. Борубаев А.А., Панков П.С. Дискретная математика (допущено МОН КР в качестве учебного пособия для преподавателей вузов). - Бишкек: изд. КРСУ, 2010. – 123 с.