ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 513.83

Жораев А.Х.,
к.ф-м.н., доцент КУУ, г. Ош

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Аннотациясы: *Эки өлчөмдүү кинематикалык мейкиндикте тегерекке гомеоморфиялык эмес айланасы болгон чекит жашаганынын шарттары табылган; ошондуктан, мейкиндик бир тектүү эмес бар экен.*
Негизги сөздөр: *кинематикалык мейкиндик, бир тектүү мейкиндик, чекит, айлана*

Аннотация: *Найдены условия, при которых в двумерном кинематическом пространстве существует точка с окрестностью, негомеоморфной кругу, то есть пространство оказывается неоднородным.*
Ключевые слова: *кинематическое пространство, неоднородное пространство, точка, окрестность*

Abstract: *There are found conditions preserving existence of a point in a two-dimensional kinematical space with a neighbor to be non-homeomorphic to a circle; that is the space is non-homogeneous.*
Keywords: *kinematical space, non-homeomorphic space, point, neighbor*

Введение

В [1] была поставлена общая проблема наглядного компьютерного представления топологических пространств и введено определение кинематического пространства, в [2] рассмотрено доказательное движение по кинематическому пространству. В [3] введены определения, относящиеся к неоднородности пространств.

В настоящей статье введены соответствующие дополнительные определения и найдены условия в терминах движения по пространству, при которых гарантируется неоднородность пространства.

1. Основные определения и известные результаты

Определение 1 [1]. **Кинематическим пространством** называется множество G точек и множество K **маршрутов.** Каждый маршрут M состоит из числа $T_M > 0$ (**время** маршрута) и функции m_M: $[0, T_M] \to G$ (**траектория** маршрута). Выполняются следующие свойства.

(K1) Для любых различных z_0 и z_1 существует такое $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то $\{T_M, m_M(T_M - t)\}$ также принадлежит K {движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то пара: T^* и функция $m^*(t) = m_M(t)$ ($0 \le t \le T^*$)

также принадлежит K {можно остановиться в любой момент}.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то пара:

число $T^* = T_1 + T_2$ и функция

$m^*(t) = m_1(t)$ ($0 \le t < T_1$); $m^*(t) = m_2(t - T_1)$ ($T_1 \le t \le T_1 + T_2$)

также принадлежит K {транзитивность}.

Кинематическое пространство является линейно связным (без изолированных точек) метрическим топологическим пространством с метрикой

$\rho_K (z_0, z_1) = inf \{T_M \mid M\in K, m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1 \}$.

Вместе с тем, есть пример [1] линейно связного метрического пространства, не являющегося кинематическим.

Множество – образ отрезка $L = m([0, T_M]) \subset G$ называется **линией** маршрута (замкнутое множество).

В метрическом пространстве W с метрикой ρ обозначим для любого $\varepsilon >0$:

$B_\varepsilon (w)=\{x\in W \mid \rho (x,w)<\varepsilon\}$ – открытый шар радиуса ε с центром в w.

Ранее было известно понятие однородного пространства – множества X вместе с заданным на нем транзитивным действием некоторой группы G пре-образований $g: X\to X$: для любых двух элементов $x_1, x_2\in X$ существует такое $g_{12}\in G$, что $g_{12}(x_1)= x_2$. В этом случае любые два элемента (вместе с положением в пространстве в целом) неразличимы.

В связи с этим, в [3] введено

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если две точки топологического пространства имеют гомеоморфные окрестности, то они называются локально однородными.

Таким образом, топологическое пространство распадается на подпространства, каждое из которых содержит локально однородные между собой точки.

ПРИМЕЧАНИЕ. Одномерное топологическое пространство (прямую) можно охарактеризовать тем, что не всякие пары точек непрерывно преобразуются одна в другую так, что в ходе преобразования точки не сливаются.

Но уже в двумерном топологическом пространстве (плоскости) любой конечный набор точек можно непрерывно преобразовать в другой такой набор так, что в ходе преобразования точки не сливаются. Для определения двухмерности таким способом нужно уже передвигать одномерный объект (кольцо).

Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если хотя бы две точки $x_1\in X$, $x_2\in X$ не являются локально однородными, то пространство X в целом называется локально одно-родным.

Для подклассов класса топологических пространств вместо гомеоморфизмов в данных определениях нужно взять морфизмы данного подкласса соответственно.

В кинематических пространствах все шары $B_\varepsilon (w)$ являются связными.

2. Основная теорема

Пусть X – линейно связное множество на плоскости R^2, маршруты – непрерывные отображения m отрезков в X такие, что

$$||m(x_1) - m(x_2)||\le || x_1 - x_2||. \qquad (1)$$

Тогда X – кинематическое пространство. Действительно, если начальная и конечная точки z_0 и z_1 маршрута не совпадают, $z_0 = m(0)$, $z_1 = m(T_M)$, то из (1) получаем

$$||m(0) - m(T_M)||\le || 0 - T_M ||,$$

$$T_M \ge ||z_0 - z_1||,$$

свойство (K1) выполняется.

ТЕОРЕМА. Если

1) внутренность множества X не пуста;

2) в кинематическом пространстве X существуют такие точки $A,B,C,D,$ и такая линия $[AC]$, что любая линия $[BD]$ имеет хотя бы одну общую точку с этой линией, то X не является открытым множеством в R^2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (от противного). Предположим, что X является открытым множеством в R^2.

Возьмем какую-либо линию $[BD]$. Пусть E – «первая» на линии $[BD]$ и F – «последняя» на линии $[BD]$ точки на $[AC]$ замкнутого множества $[AC] \cap [BD]$.

По предположению, каждая точка линии $[AE]$ принадлежит множеству X вместе со своей некоторой малой окрестностью (кругом). Эти окрестности образуют открытое покрытие множества $[AE]$, являющееся подмножеством множества X.

В силу компактности, из него можно выделить конечное подпокрытие, с центрами, которые обозначим $\{x_1,\dots x_n\}$. Включим в него еще центры – точки E и F.

В объединении кругов, входящих в это подпокрытие, можно построить кривую $[KM]$, состоящую из дуг в кругах покрытия, имеющую пустое пересечение с *[AC]*, начинающуюся в точке K на линии *[BE)* (без последней точки *E)* в окрестности точки E, и заканчивающуюся в точке M на линии *(FD]* в окрестности точки F (без начальной точки *F)*.

Опишем такое построение. Внешняя граница $W \subset R^2$ объединения кругов – (замкнутое) компактное множество, не имеющее общих точек с (замкнутым) компактным множеством *[AC]*. Следовательно, хаусдорфово расстояние между ними – положительно. Поэтому, если уменьшить радиусы всех кругов на достаточно малую величину ε, новая внешняя граница W_ε также будет находиться на положительном хаусдорфовом расстоянии от *[AC]*.

Также будет $W_\varepsilon \subset X$. Поскольку W_ε, как граница связного множества, гомеоморфна окружности, в качестве кривой *[KM]* можно взять любую из «половин» W_ε между линиями *[BE)* и *(FD]*.

Теперь построим линию *[BK]-[KM]-[MD]*. Она имеет пустое пересечение с *[AC]*, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, теорема доказана «от противного».

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы кинематическое пространство X – неоднородно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия 1) теоремы, в пространстве X существуют точки, имеющие окрестности, гомеоморфные кругу.

Поскольку множество $X \subset R^2$ не может быть открытым, в нем есть точки, окрестности которых в X не могут быть гомеоморфны кругу, что и требовалось доказать.

Литература:

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерное представление кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.
2. Pankov P.S., Joraev A.H. Manned search in kinematical topological spaces // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. Almaty, June 30 – July 4, 2009. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 102-105.
3. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных топологических пространств // Вестник КНУ, 2007. – Серия 3, выпуск 4. – С. 5–8.