УДК 531.3, 621.01

Еремьянц В.Э., Шаршеев Ф.Т.

КРСУ им. Б. Ельцина
ИГУ им. К. Тыныстанова

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В ОПОРЕ КОРОМЫСЛА УДАРНОГО МЕХАНИЗМА

При создании кривошипно-коромысловых ударных машин одной из проблем является защита опорного узла коромысла от воздействия реактивных ударных нагрузок. В идеальном случае, когда точка соударения коромысла с инструментом совпадает с центром удара, ударные реакции в опоре коромысла равны нулю. Однако обеспечить это условие не всегда удается. Тогда возникает необходимость расчета ударных реакций в опоре коромысла и выявления степени влияния различных факторов на эти реакции.

Решение этой задачи было начато в работе [1]. Для математического описания процессов, протекающих в коромысловой ударной системе с упругой опорой коромысла, была рассмотрена расчетная схема, представленная на рис. 1. При её составлении принимались следующие допущения: горизонтальные перемещения упругой опоры коромысла (точка О, рис. 1) пренебрежимо малы по сравнению с вертикальными; коэффициент жесткости опоры является величиной постоянной; коромысло представляет собой жесткое недеформируемое тело с податливой сферической ударной частью; инструмент, по которому наносится удар коромыслом, имеет вид упругого стержня.

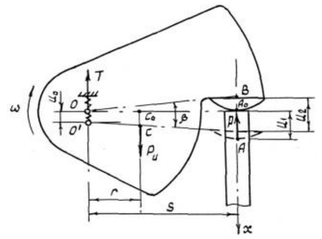

Рис. 1. Расчетная схема коромысловой системы, учитывающая податливость опоры коромысла.

С учетом принятых допущений в [1] получена система дифференциальных уравнений, связывающая усилия *P*, возникающие в контакте коромысла с инструментом, с усилиями *T*, возникающими в опоре коромысла. Эти уравнения можно представить в виде:

$$\ddot{T} + k_1^2 T = -a_1 P, \tag{1}$$

$$\ddot{P} + 2h\dot{P} + k_2^2 P = -a_2 T. \tag{2}$$

где $$k_1^2 = \frac{c_0}{m\alpha_2}, \quad a_1 = \frac{c_0}{m}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 = 1 - \frac{mrS}{J}, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{mr^2}{J}, \tag{3}$$

$$h = \frac{ca}{2EF}, \quad k_2^2 = \frac{c}{m\alpha_2}\left[1 + \frac{mS^2}{J}\left(1 - \frac{2r}{S}\right)\right], \quad a_2 = \frac{c\alpha_1}{m\alpha_2}. \tag{4}$$

В формулах приняты следующие обозначения:
c_0, c – коэффициенты жесткости контакта коромысла с опорой и инструментом (для обоих контактов принимаются линеаризованные модели контактной характеристики Герца); J – момент инерции коромысла относительно его оси вращения; m – масса коромысла; r – расстояние от оси вращения коромысла до его центра масс; S – расстояние от оси вращения коромысла до продольной оси инструмента (оси удара); E – модуль упругости материала элементов ударной системы (предполагается, что коромысло и инструмент выполнены из материала с одинаковым модулем упругости); F – площадь поперечного сечения инструмента; a – скорость распространения волны деформации в инструменте.

Уравнение (1) – это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно T, в котором правая часть, описывающая возмущающую нагрузку, содержит усилие P. Уравнение (2) это дифференциальное уравнение относительно P, в котором возмущающей нагрузкой является усилие T.

Решение этих уравнений представляет определенную сложность. Например, если выразить из первого уравнения функцию P и подставить во второе уравнение, то получится дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции T. Для определения вида функции, описывающей решение этого уравнения, необходимо найти корни характеристического уравнения четвертого порядка, что в общем случае затруднительно.

Если записать исходные уравнения (1) и (2) в изображениях по Лапласу, то решение уравнений не представляет труда, но возникают трудности обратного перехода от изображения искомой функции к её оригиналу. Эти трудности также связаны с необходимостью отыскания корней алгебраического уравнения четвертого порядка.

В связи с этим в данной работе предлагается приближенный метод расчета усилий, возникающих в коромысловой ударной системе при ударе, который заключается в следующем.

В первом приближении принимаем T=0, тогда уравнение (2) становится однородным: $\ddot{P}+2h\dot{P}+k_2^2P=0$.

Его решение имеет вид: $P(t)=\exp(-ht)\left(B_{11}\sin\lambda t+B_{12}\cos\lambda t\right)$; где $\lambda=\sqrt{k_2^2-h^2}$.

Здесь и далее в обозначении постоянных интегрирования (A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} и т.д.) первая цифра индекса показывает номер приближения, а вторая – номер постоянной интегрирования.

Начальные условия для этого уравнения:

$$P(0)=0;\ \dot{P}(0)=c[\dot{u}_1(0)-\dot{u}_2(0)]=c\omega_0S, \qquad (5)$$

где ω_0 – угловая скорость коромысла в начальный момент удара.

Из этих начальных условий находим:

$$B_{11}=c\omega_0S/\lambda, \quad B_{12}=0.$$

Следовательно, решение уравнение (2) в первом приближении имеет следующий вид:

$$P(t)=B_{11}\exp(-ht)\sin\lambda t. \qquad (6)$$

Время действия силы в контактном сечении коромысла с инструментом определится как

$$\tau=\pi/\lambda, \qquad (7)$$

а максимальное значение силы – по формуле:

$$P_m=\frac{cV_0}{k_2}\exp\left[-\frac{h}{\lambda}arctg\frac{\lambda}{h}\right], \qquad (8)$$

где $V_0=\omega_0S$ – линейная скорость соударения коромысла с инструментом.

Подставляя решение (6) в уравнение (1), получим уравнение для определения усилия в контакте коромысла с опорой в первом приближении:

$$\ddot{T}+k_1^2T=-a_1B_{11}\exp(-ht)\sin\lambda t. \qquad (9)$$

Общее решение этого неоднородного уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Начальные условия для его решения:

$$T(0)=0;\ \dot{T}(0)=\dot{u}_0c=0, \qquad (10)$$

где u_0 – деформация опоры.

Общим решением однородного уравнения, левая часть которого имеет вид (9), является функция:

$$\bar{T}(t) = A_{11}\sin k_1 t + A_{12}\cos k_1 t.$$

Частное решение уравнения (9) ищем в виде:

$$\tilde{T}(t) = \exp(-ht)(C_{11}\sin\lambda t + C_{12}\cos\lambda t).$$

Дифференцируя эту функцию по времени, подставляя в правую часть уравнения (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой части уравнения, найдем:

$$C_{11} = -\frac{a_1 B_{11}}{H_0}(h^2 - \lambda^2 + k_1^2), \quad C_{12} = -\frac{a_1 B_{11}}{H_0}2h\lambda,$$

где $H_0 = (h^2 - \lambda^2 + k_1^2)^2 + 4h^2\lambda^2 = (k_2^2 - k_1^2) + 4h^2 k_1^2$.

Записывая общее решение уравнения (9) в виде:

$$T(t) = \bar{T}(t) + \tilde{T}(t) = A_{11}\sin k_1 t + A_{12}\cos k_1 t + \exp(-ht)\left[C_{11}\sin\lambda t + C_{12}\cos\lambda t\right], \quad (11)$$

и находя постоянные интегрирования A_{11} и A_{12} из начальных условий (10):

$$A_{11} = \frac{a_1 B_{11}\lambda}{H_0 k_1}\left(k_1^2 - k_2^2\right), \quad A_{12} = \frac{a_1 B_{11}}{H_0}2h\lambda = -C_{12},$$

получим:

$$T(t) = \frac{a_1 B_{11}}{H_0}\left\{\frac{\lambda}{k_1}\left(k_1^2 - k_2^2\right)\sin k_1 t + 2h\lambda\cos k_1 t - \right. \quad (12)$$
$$\left. -\exp(-ht)\left[\left(h^2 - \lambda^2 + k_1^2\right)\sin\lambda t + 2h\lambda\cos\lambda t\right]\right\}.$$

Это решение можно представить в более компактном виде:

$$T(t) = D_{11}\sin(k_1 t + \theta_{11}) + D_{12}\exp(-ht)\sin(\lambda t + \theta_{12}), \quad (13)$$

где

$$D_{11} = \frac{a_1 B_{11}}{H_0}\sqrt{\frac{\lambda^2}{k_1^2}(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4h^2\lambda^2}, \quad D_{12} = \frac{a_1 B_{11}}{\sqrt{H_0}},$$

$$\theta_{11} = arctg\left(\frac{2hk_1}{k_1^2 - k_2^2}\right), \quad \theta_{12} = arctg\left(\frac{2h\lambda}{h^2 - \lambda^2 + k_1^2}\right).$$

Из выражения (13) видно, что колебания опоры описываются суммой двух гармонических функций. При этом одна гармоника имеет частоту, равную собственной частоте колебаний опоры, а другая – частоту, равную частоте ударного импульса, генерируемого в контакте коромысла с инструментом. Гармоника с собственной частотой является незатухающей, а гармоника с частотой вынуждающей нагрузки – затухающая (в действительности, конечно, обе гармоники будут затухающими, так как в опоре всегда будут какие-то потери энергии).

Подставляя функцию (12) в правую часть уравнения (2) и вводя обозначения:

$$H_{11} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0}\frac{\lambda}{k_1}\left(k_1^2 - k_2^2\right), \quad H_{12} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0}2h\lambda, \quad H_{13} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0}\left(h^2 - \lambda^2 + k_1^2\right),$$

запишем это уравнение в виде:

$$\ddot{P} + 2h\dot{P} + k_2^2 P = -H_{11}\sin k_1 t - H_{12}\cos k_1 t + \exp(-ht)\left(H_{13}\sin\lambda t + H_{12}\cos\lambda t\right). \quad (14)$$

Решением этого уравнения при начальных условиях (5) является функция:

$$P(t) = B_{21}\sin k_1 t + B_{22}\cos k_1 t + t\exp(-ht)(B_{23}\sin\lambda t + B_{24}\cos\lambda t) +$$
$$+\exp(-ht)(B_{25}\sin\lambda t + B_{26}\cos\lambda t). \quad (15)$$

где

$$B_{21} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0^2}\frac{\lambda}{k_1}\left[\left(k_2^2 - k_1^2\right)^2 - 4h^2 k_1^2\right], \quad B_{22} = -\frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0^2}4h\lambda\left(k_2^2 - k_1^2\right),$$

$$B_{23}=\frac{a_1a_2B_{11}h}{H_0},\ \ B_{24}=-\frac{a_1a_2B_{11}}{H_0}\frac{(h^2-\lambda^2+k_1^2)}{2\lambda}.$$

$$B_{25}=B_{11}-\frac{k_1}{\lambda}B_{21}-\frac{h}{\lambda}B_{22}-\frac{1}{\lambda}B_{24},\quad B_{26}=-B_{22}.$$

Используя последние соотношения в решении (15), представим его в виде:

$$P(t)=B_{11}\exp(-ht)\sin\lambda t+B_{21}\sin k_1t+B_{22}\cos k_1t-\frac{\exp(-ht)}{\lambda}\big[(k_1B_{21}+hB_{22}+ \\ +B_{24})\sin\lambda t+\lambda B_{22}\cos\lambda t\big]+t\exp(-ht)(B_{23}\sin\lambda t+B_{24}\cos\lambda t). \quad (16)$$

Очевидно, что первый член этого решения представляет собой решение первого приближения (6). Остальные члены являются уточнением решения во втором приближении.

Подставляя решение (15) в правую часть уравнения (1) получим уравнение для определения реакции в опоре коромысла во втором приближении:

$$\ddot{T}+k_1^2T=-a_1\big\{B_{21}\sin k_1t+B_{22}\cos k_1t+\exp(-ht)(B_{25}\sin\lambda t+B_{26}\cos\lambda t)+ \\ +t\exp(-ht)(B_{23}\sin\lambda t+B_{24}\cos\lambda t)\big\}. \quad (17)$$

Решением этого уравнения при начальных условиях (10) является функция:

$$T(t)=A_{21}\sin k_1t+A_{22}\cos k_1t+t(C_{21}\sin k_1t+C_{22}\cos k_1t+ \\ +\exp(-ht)(C_{23}\sin\lambda t+C_{24}\cos\lambda t)+t\exp(-ht)(C_{25}\sin\lambda t+C_{26}\cos\lambda t), \quad (18)$$

где

$$C_{21}=-\frac{a_1}{2k_1}B_{22},\ \ C_{22}=\frac{a_1}{2k_1}B_{21},$$

$$C_{25}=-\frac{a_1}{H_0}\big[(h^2-\lambda^2+k_1^2)B_{23}-2h\lambda B_{24}\big],\ \ C_{26}=-\frac{a_1}{H_0}\big[(h^2-\lambda^2+k_1^2)B_{24}+2h\lambda B_{23}\big],$$

$$C_{23}=\frac{1}{H_0}\big[(h^2-\lambda^2+k_1^2)\big(2hC_{25}+2\lambda C_{26}-a_1B_{25}\big)-2h\lambda\big(2\lambda C_{25}+2hC_{26}+a_1B_{22}\big)\big],$$

$$C_{24}=\frac{1}{H_0}\big[(h^2-\lambda^2+k_1^2)\big(2\lambda C_{25}+2hC_{26}+a_1B_{22}\big)+2h\lambda\big(2hC_{25}+2\lambda C_{26}-a_1B_{25}\big)\big],$$

$$A_{21}=-\frac{1}{k_1}\big(C_{22}+\lambda C_{23}-hC_{24}+C_{26}\big),\ \ A_{22}=-C_{24}.$$

Далее, подставляя решение (18) в правую часть уравнения (2) можно найти зависимость *P(t)* в третьем приближении и т.д. При этом решение в третьем приближении будет содержать члены, пропорциональные произведению t^2 на тригонометрические функции, следующее приближение будет включать произведения t^3 на эти функции и т.д.

В качестве примера использования предлагаемого метода, приведем результаты расчета динамических усилий, возникающих в ударной системе кривошипно-коромыслового молота МО-100.

Исходные данные для этой ударной системы следующие: момент инерции коромысла: J = 0,734 кгм^2; масса коромысла: m = 35,1 кг; координаты центра масс коромысла: $x_C = r$ = 106 мм, y_C = 0; радиус сферы ударной части коромысла: R_C = 60 мм; диаметр инструмента d = 80 мм; линейная скорость соударения коромысла с инструментом $V_0=\omega_0 S$= 10 м/с.

Модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона для материалов коромысла, инструмента и подшипника примем одинаковыми и равными: E = 20,4·10^{10} Па, ρ = 7850 кг/м^3, μ = 0,3.

Принималось, что расстояние S отличается от оптимального, определяемого соотношением $mrS/J=1$, на 10 %. При этом $\alpha_2 = 0{,}1$.

Для оценки влияния жесткости опоры на динамические усилия, возникающие в системе, рассматривалось три случая с различными значениями коэффициента k_n, равными: $40\cdot10^6$ Н$^{2/3}$/м; $80\cdot10^6$ Н$^{2/3}$/м; $160\cdot10^6$ Н$^{2/3}$/м. Среднее из указанных трех значений соответствует паре шариковых подшипников типа 310. Считалось, что податливость оси коромысла пренебрежимо мала по сравнению с податливостью подшипников.

Расчет проводился в следующем порядке.

Вначале, исходя из опыта, задавалось некоторое значение максимального усилия в контакте коромысла с инструментом P_m и по известным формулам [1]:

$$c = 1{,}25K^{2/3}P_m^{1/3}, \qquad K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)}\sqrt{R_C},$$

находился коэффициент жесткости контакта коромысла с инструментом c.

Затем определялись коэффициенты (3), (4) и по формуле (8) находилось значение P_m. По этому значению уточнялся коэффициент c, вновь находилось значение P_m и т.д., пока расхождение в результатах предыдущего и последующего циклов расчета не становилось меньше 0,1%. С учетом уточненных, таким образом, коэффициентов по формуле (6) строился график функции $P(t)$ в первом приближении. Этот график показан на рис. 2а.

Аналогично, задаваясь максимальным значением силы в контакте коромысла с опорой T_m, находилось значение коэффициента жесткости подшипников опоры c_0 по известной формуле [2]:

$$c_0 = k_n T_m^{1/3}, \quad k_n = \frac{3{,}34\left(zk_B\right)^{2/3}}{1+\sqrt[3]{r_1/r_2}}, \quad k_B = \frac{2E}{3(1-\mu^2)}\sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}}.$$

где r_1, r_2 – соответственно радиусы контактных поверхностей внутреннего и наружного колец подшипника; r_3 – радиус шарика; z – количество шариков в подшипнике; T_m – максимальное значение радиальной силы, действующей на подшипники.

После определения необходимых коэффициентов (3), (4), из формул (12) или (13) находилось максимальное значение усилия в контакте коромысла с опорой T_m и по нему уточнялось значение коэффициента c_0. Затем вновь находилось значение T_m и т.д., пока разность между результатами предыдущего и последующего циклов расчета не становилась меньше 0,1 %. После этого по формуле (12) строилась зависимость усилия в контакте коромысла с опорой от времени $T(t)$ в первом приближении (рис. 3а).

Далее находились поправки второго приближения. Для этого формулы (16) и (18) записывались в виде:

$$P(t) = P_1(t) + \Delta P(t), \qquad T(t) = T_1(t) + \Delta T(t),$$

где $P_1(t)$, $T_1(t)$ – функции, полученные в первом приближении; $\Delta P(t)$, $\Delta T(t)$ – поправки второго приближения. Из этих формул находились зависимости $\Delta P(t)$, $\Delta T(t)$, графики которых представлены на рис. 2б и 3б.

На рис. 2а видно, что в первом приближении закон изменения усилий в контакте коромысла с инструментом не зависит от жесткости опоры. Это связано с тем, что в первом приближении принималось: $T = 0$. Но, как следует из рис. 2б, поправка второго приближения учитывающая силу T, несущественна. Например, при $k_n = 80\cdot10^6$ Н$^{2/3}$/м (что соответствует паре шариковых подшипников 310) величина ΔP не превышает 20 кН и составляет около 2% от максимального значения силы P. С увеличением жесткости опоры (например, за счет замены шариковых подшипников роликовыми) поправка второго приближения становится еще меньше.

С уменьшением жесткости опоры величина ΔP возрастает, но её максимальное значение приходится на конечную часть ударного импульса $P(t)$. Это приводит к незначительному (менее 1%) увеличению длительности взаимодействия коромысла с инструментом.

Во всех рассмотренных случаях уточнение максимального значения контактной силы P_{m1} не превышает 0,2%, что несущественно.

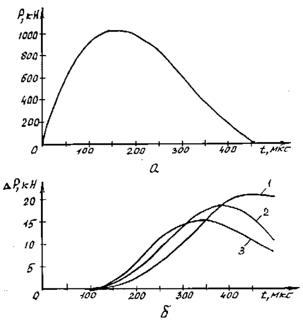

Рис. 2. Зависимость усилия в контакте коромысла с инструментом от времени в первом приближении (а) и поправка, вносимая вторым приближением (б) при различных значениях жесткости опоры:
1 – $k_n = 40 \cdot 10^6$ Н$^{2/3}$/м, 2 – $k_n = 80 \cdot 10^6$ Н$^{2/3}$/м, 3 – $k_n = 160 \cdot 10^6$ Н$^{2/3}$/м.

Анализируя рис. 3а. можно отметить, что величина коэффициента жесткости опоры оказывает существенное влияние на характер изменения усилий в опоре от времени. В зависимости от жесткости эти усилия могут иметь даже знакопеременный характер (кривая 2), но при этом в исследованном диапазоне изменения коэффициента жесткости опоры максимальные значения усилий отличаются друг от друга незначительно и составляют 17-18% от усилий в контакте коромысла с инструментом.

Поправка второго приближения в определении усилий в контакте коромысла с опорой ΔT не превышает 2 кН (рис. 3б.). Поскольку максимумы функций $T_1(t)$ и $\Delta T(t)$ не совпадают по времени, то поправка максимального значения T_{m1} будет составлять менее 1 %, что также несущественно.

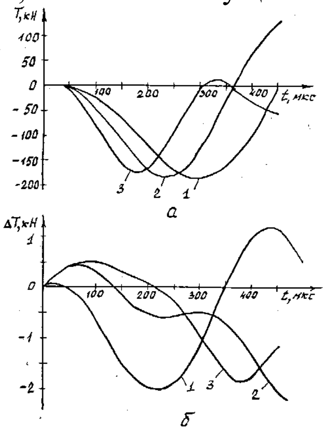

Рис. 3. Зависимость усилия в контакте коромысла с опорой от времени в первом приближении (а) и поправка, вносимая вторым приближением (б) при различных значениях жесткости опоры:
1 – $k_n = 40 \cdot 10^6$ Н$^{2/3}$/м, 2 – $k_n = 80 \cdot 10^6$ Н$^{2/3}$/м, 3 – $k_n = 160 \cdot 10^6$ Н$^{2/3}$/м.

Обобщая полученные результаты можно отметить следующее.

Предложен приближенный метод оценки динамических усилий, возникающих в коромысловой ударной системе с упругой опорой коромысла. Выведены формулы для определения усилий в контакте коромысла с инструментом и с опорой в первом и втором приближениях.

На примере расчета ударной системы молота МО-100 показано, что в реальных системах для получения достаточной для инженерной практики точности достаточно ограничится первым или вторым приближениями.

В исследованном диапазоне изменения параметров коромысловой ударной системы молота МО-100 жесткость опоры практически не оказывает влияние на усилия в контакте коромысла с инструментом и мало влияет на максимальные усилия в контакте коромысла с опорой. Следует отметить, что этот вывод относится только к рассмотренному примеру. Возможно, что при других параметрах системы влияние жесткости опоры на параметры ударных процессов будет более существенным.

Предлагаемый метод может быть эффективно использован в дальнейшем для более подробного изучения влияния различных факторов на ударные процессы в коромысловых системах.

Литература:

1. Еремьянц В.Э. Расчет ударных процессов в машинах. Часть 4. Коромысловые ударные системы и системы с неторцевым соударением элементов. Учебное пособие. – Бишкек: КРСУ, 2003. – 56 с.

2. Еремьянц В.Э., Хренова М.В. Определение приведенного коэффициента жесткости опорного узла коромысла ударного механизма. /Повышение эксплуатационной эффективности транспортных, строительно-дорожных машин и коммуникаций в условиях высокогорья и жаркого климата. Мат-лы международной научн.-практ. конф. – Бишкек: КГУСТА, 2002. – С. 97–104.