М.А.Пахирдинов,   К.Ж.Султаналиев

ФУНКЦИЯЛАР

Жалал-Абад, 2015

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ЖАЛАЛ-АБАД МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

М.А.Пахирдинов, К.Ж.Султаналиев

ФУНКЦИЯЛАР

Жалал-Абад, 2015

ББК 22.1

П.12

Жалал-Абад Мамлекеттик университетинин «Жогорку математика» кафедрасынын чогулушунда талкууланып сунушталган жана ЖАМУ нун усулдук кеңешинде бекитилген.

Рецензенттер: п.и.к., доц. мил. аткар. Нарбаев М.

ФУНКЦИЯЛАР

-Жалал-Абад: ЖАМУ, 2011. -26 бет.

«Функциялар» темада жазылган бул окуу-усулдук колдонмо математика, физика жана башка техникалык адистиктердин студенттерине, мектеп окуучуларына жана жаш окутуучуларга жакындан жардам көрсөтүүчү жардамчы окуу каражаты катары арналып жазылды.

Колдонмо негизгинен алгебралык жана транценденттик функцияларды, кёп аргументтщщ функцияларды алар жёнщндёгщ негизги түшүнүктөрдү, аныктамаларды алардын графиктерин жана касиеттерин ёз ичине камтыган.

Кириш сөз

Математикада функция түшүнүгү эң бир негизги түшүнүктөрдүн бири экендиги анык. Мектеп курсунда элементардык деп аталчу бир нече функциялар б.а. алгебралык жана трансценденттик функциялар окутулуп келет. Атап айтканда: Сызыктуу, квадраттык, бөлчөктүү рационалдуу, көрсөткүчтүү, логарифмалык, иррационалдык, тригонометриялык, тескери тригонометриялык ж.б.у.с.

Мында окуучулар функциялардын монотондуулугун, экстремумдарын, графиктин координата октору менен кесилишкен чекиттерин аныктоону, графиктерди чийүүнү, мезгилдүүлүгүн аныктоону ж.б. касиеттерин окуп келишкен.

Функциялар аркылуу турмуштагы көптөгөн процесстер туюнтулат жана анын жардамында изилденет. Ар бир функция өзүнчө касиеттерге ээ болгондуктан, аларды терең окуп үйрөнүү ар бир окуучуга милдеттендирилет. Атап айтсак функциялардын монотондуулугун, экстремумдарын, графиктерин, мезгилдүүлүгүн ж.б. өздөштүрө билүүсү окуучунун математиканы жакшы өздөштүрө алышына алып келет.

Бул колдонмо бүгүнкү күндөгү окуучуларга жана студентерге функцияларды окуп үйрөнүүдөгү кезигип жаткан айрым проблемаларын чечүүгө жардам берет деген ойдобуз.

Ал проблемалардын чыгышынын бирден-бир себеби болуп функциялар жөнүндө окуу куралдарынын, методикалык колдонмолордун жетишсиздиги, ошондой эле окуучулардын функцияларды окуп үйрөнүүдө аларды бири-бири менен окшоштуруп, салыштырып окууну өздөштүрө албастыгында деп билебиз.

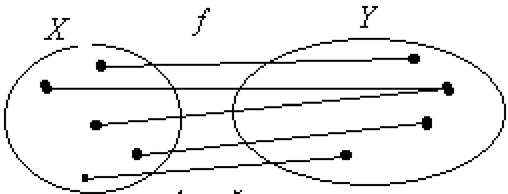
Бул колдонмону жазуунун бирден-бир себеби болуп да мына ошондой проблемаларды чечүүгө негизделген жана бул колдонмо алар үчүн жардамчы окуу куралы болуп калат деген гана ой.

Авторлор

1-§. Функциялар
1. Бир аргументтүү функциялар

Математикадагы функция жөнүндөгү түшүнүктү карап жатып, анын аныктоосун берүүдө, авторлор өз эмгектеринде өзүнүн көз карашы боюнча маалыматтарды берип келишерин билебиз. Ошол себептен функциянын аныктоолору ар бир автордун эмгектеринде түрдүүчө берилген жана алар мааниси боюнча бирдей.

Аныктама 1. Кандайдыр бир X көптүгүнүн ар бир элементине башка бир У көптүгүнүн бирден ашпаган элементи кайсы бир эреженин же закондун негизинде туура келсе, анда мындай туура келүүчүлүк **функция** деп аталат жана $y = f(x)$ түрүндө белгиленет (1-чийме).



1- чийме

Мындагы x көз каранды эмес өзгөрмө же **аргумент,** ал эми y болсо x тен көз каранды б.а. **функция,** ал эми f кандайдыр бир закон же эреже.

Аныктама 2. Аргументтин (көз каранды эмес өзгөрмөнүн) кабыл алууга мүмкүн болгон бардык маанилеринин көптүгү функциянын **аныкталуу областы** деп аталат жана $D(y)$ аркылуу белгиленет.

Аныктама 3. Аргумент x тин ар бир маанисине берилген y функциясы анык мааниге ээ боло тургандай маанилеринин көптүгү функциянын **өзгөрүү областы** деп аталат жана $E(y)$ аркылуу белгиленет.

Берилишинде x аргументинин үстүнөн алгебралык амалдар (кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, даражага көтөрүү, тамыр чыгаруу) жүргүзүлгөн функциялар **алгебралык функциялар** деп аталат.

Мисалы: $y = 2x^2 - 5x - 7$, $y = \dfrac{x-2}{x^2+7}$, $y = \sqrt{x+2}$,...

Төмөндө биз карай турган даражалуу, бүтүн, бөлчөктүү рационалдык жана иррационалдык функциялардын ар бири, алардын ар кандай комбинациялары **алгебралык функциялар** болушат.

Алгебралык эмес функциялардын бардыгы **трансценденттик функциялар** деп аталышат.

Трансценденттик функцияларга мисал болуп көрсөткүчтүү, логарифмалык, тригонометриялык жана тескери тригонометриялык функциялар эсептелет.

Мисалы: $y = 3^x$, $y = \ell og_3(x-2)$, $y = \sin 3x$, $y = arctgx$,...

Эгерде x тин ар бир маанисине y тин бирден гана мааниси туура келсе, анда функция **бир маанилүү** деп, бир нече мааниси туура келсе, анда **көп маанилүү** деп аталат.

Эгерде x тин x_0 маанисине y тин y_0 мааниси туура келсе, анда аны $y_0 = f(x_0)$ түрдө белгилешет.

$y = f(x)$ байланышын, функционалдык көз карандылык деп да коюшат. Функционалдык көз карандылыктар түрдүү жолдор менен берилет:

1. Аналитикалык жол.
2. Таблицалык жол.
3. Графиктик жол.

1) Функциянын **аналитикалык жол** менен берилет дегени, функционалдык көз карандылыктын жазылышы кандайдыр бир математикалык формулалар аркылуу берилгендиги.

Мисалы: $y = 4x^2 - x + 1$, $y = \sin 2x$, $y = \sqrt{5x-7}$ ж.б.у.с.

2) Функциянын **таблицалык жол** менен берилет дегени, функционалдык көз карандылыктын жазылышы, x тин ар

бир кадамына б.а. тандалып алынган маанилерине y тин тиешелүү маанилери таблица аркылуу берилгени.
Мисалы: (Логарифманын, тригонометриянын ж.б. таблицалары)

3) Функциянын **графиктик жол** менен берилет дегени, мындагы функционалдык көз карандылыктын жазылышын, функциянын графиги аркылуу x тин ар бир маанисине туура келүүчү y тин тиешелүү маанилерин (мүмкүн жакындаштытырылган) табууга мүмкүн экендиги.

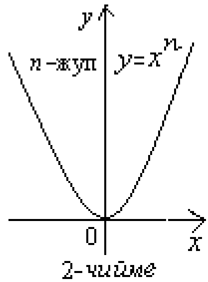
2. Функциянын түрлөрү жана касиеттери

$y = f(x)$ түрүндө берилген функцияны негизинен айкын түрдө берилген же бир өзгөрмөлүү функция деп коюшат.

1) Жуп жана так функциялар

<u>Аныктама 1</u>. Эгерде берилген $y = f(x)$ функциясынын аныкталуу областынан алынган бардык x үчүн, $f(-x) = f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $y = f(x)$ **жуп функция** деп аталат. Мисалы $y = x^2$, $y = \cos x$ ж.б.

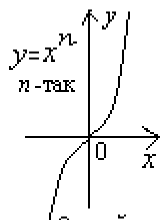
Жуп функциялардын графиктери координаталык тегиздикте Оу огуна карата симметриялуу жайгашат (2-чийме).



2-чийме

<u>Аныктама 2</u>. Эгерде берилген $y = f(x)$ функциясынын аныкталуу областынан алынган бардык x үчүн, $f(-x) = -f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $y = f(x)$ **так функция** деп аталат.

Мисалы $y = x^3$, $y = \sin x$ ж.б.

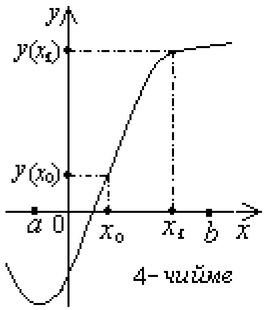


3-чийме

Так функциялардын графиктери координаталык тегиздикте координата башталышына карата симметриялуу жайгашат (3-чийме).

3. Функциянын монотондуулук аралыктары

Аныктама 1. Эгерде $(a;b)$ аралыгынан алынган каалагандай x_0 жана x_1 маанилеринде, $x_0<x_1$ үчүн, $f(x_0)<f(x_1)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралыгында **өсүүчү** деп аталат (4-чийме). Кээде аргументтин чоң маанисине функциянын чоң мааниси (кичине мааниси) туура келсе, анда функция өсүүчү (кемүүчү) болот деп коюшат.

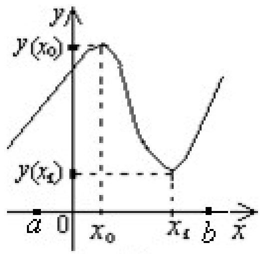


4-чийме

Мисалы $y=3x-2$ функциясы R аралыгында өсүүчү болот. Себеби $x_0=2\in R$, $x_1=4\in R$ болгондо б.а.

$x_0<x_1$ үчүн $f(x_0)=f(2)=3\cdot 2-2=4$, $f(x_1)=f(4)=3\cdot 4-2=10$, $f(2)<f(4)$ болот, демек аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси туура келип

Аныктама 2. Эгерде $(a;b)$ аралыгынан алынган каалагандай x_0 жана x_1 маанилеринде, $x_0<x_1$ үчүн, $f(x_0)>f(x_1)$ барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралыгында **кемүүчү** деп аталат (5-чийме).



5-чийме

Мисалы $y=-x+2$ функциясы R аралыгында кемүүчү болот. Себеби $x_0=1\in R$, $x_1=2\in R$ болгондо б.а. $x_0<x_1$

үчүн $f(x_0) = f(1) = -1 + 2 = 1$, $f(x_1) = f(2) = -2 + 2 = 0$, $f(1) > f(2)$ болот, демек аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келип жатат.

[illegible]

<u>Аныктама 3.</u> Эгерде кандайдыр бир $(a\ ;\ b)$ аралыкта берилген $y = f(x)$ функциянын туундусу $y' = f'(x) > 0$ оң болсо, анда бул аралыкта функция **өсүүчү**, эгерде туунду $y' = f'(x) < 0$ терс белгиде болсо, анда функция бул аралыкта **кемүүчү** функция болот.

Мисалы. Туундунун жардамында $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ функциясынын өсүү жана кемүү аралыктарын тапкыла.

Чыгарылышы. Функциянын аныкталуу областы бардык чыныгы сандардын көптүгү болот. Демек, $f'(x) = (2x^2 - 5x + 3)' = 4x - 5$, $4x - 5 = 0,$ $x = \frac{5}{4},$ мындан $x < \frac{5}{4},$ болгондо, башкача айтканда функция $(-\infty\ ; \frac{5}{4})$ аралыгында кемүүчү, $(\frac{5}{4}; \infty\ )$ аралыгында өсүүчү болот.

Ал эми дайыма өсүүчү жана кемүүчү функцияларды **монотондуу өсүүчү** же **кемүүчү** функциялар деп аташат.

<u>Аныктама 4.</u> Эгерде x_0 чекитинин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймагынан алынган бардык $x_0 \neq x$ маанилери үчүн $f(x) \geq f(x_0)$ барабарсыздыгы орун алса, анда $f(x)$ функциянын аныкталуу областынан алынган x_0 чекити функциянын **минимум** чекити деп аталат.

Мисалы. $x_0 = 2$ чекит, $f(x) = x^2 - 4x + 4$ функциясынын минимум чекити экендигин көрсөткүлө.

Чыгарылышы. $x_0 = 2$ чекитинин аймагынан эркибизче 1,9 жана 2,1 маанилерин алалы. Функциянын бул чекиттердеги маанилерин эсептеп салыштырабыз:

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0.$$

$$f(1{,}9) = 1{,}9^2 - 4 \cdot 1{,}9 + 4 = 3{,}61 - 7{,}6 + 4 = 0{,}01.$$

$$f(2{,}1) = 2{,}1^2 - 4 \cdot 2{,}1 + 4 = 4{,}41 - 8{,}4 + 4 = 0{,}01.$$

$$f(2) < f(2{,}1) = f(1{,}9)$$

Демек, $x_0 = 2$ чекит чын эле $f(x) = x^2 - 4x + 4$ функциясынын минимум чекити болот.

<u>Аныктама 5.</u> Эгерде x_0 чекитинин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймагынан алынган бардык $x_0 \neq x$ маанилери үчүн $f(x) \leq f(x_0)$ барабарсыздыгы орун алса, анда $f(x)$ функциянын аныкталуу областынан алынган x_0 чекити функциянын **максимум** чекити деп аталат.

Мисалы. $x_0 = -1$ чекит, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ функциясынын максимум чекити экендигин көрсөткүлө.

Чыгарылышы. $x_0 = -1$ чекитинин аймагынан эркибизче -0,9 жана -1,1 маанилерин алалы. Функциянын бул чекиттердеги маанилерин эсептеп салыштырабыз:

$$f(x_0) = f(-1) = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = -4.$$

$$f(-0{,}9) = -(-0{,}9)^2 + 2 \cdot (-0{,}9) - 1 = -3{,}61.$$

$$f(-1,1) = (-1,1)^2 + 2\cdot(-1,1) + 1 = 0,01.$$
$$f(2) < f(2,1) = f(1,9)$$

Демек, $x_0 = 2$ чекит чын эле $f(x) = x^2 - 4x + 4$ функциясынын минимум чекити болот.

[illegible] ([illegible]) [illegible].

[illegible] ([illegible]) [illegible].

[illegible].

[illegible], [illegible].

[illegible].

[illegible] x_0 [illegible] $f'(x)$ [illegible], [illegible] x_0 [illegible].

[illegible] x_0 [illegible] $f'(x)$ [illegible] «-» [illegible] «+» [illegible], [illegible] x_0 [illegible], [illegible] «+» [illegible] «-» [illegible], [illegible].

[illegible] x_0 [illegible] $f'(x)$ [illegible], [illegible].

4. Чектелген жана чектелбеген функциялар

<u>Аныктама 1</u>. Эгерде берилген $y=f(x)$ функциясы аныкталган областа дайыма $f(x)\le M$ барабарсыздыгы орундалып, M чектүү сан болсо, анда $y=f(x)$ функциясы **жогору жагынан чектелген** деп аталат.

<u>Аныктама 2</u>. Эгерде чектүү m саны үчүн $m\le f(x)$ барабарсыздыгы орундалса, анда $y=f(x)$ функциясы **төмөн жагынан чектелген** функция деп аталат.

Ал эми $m\le f(x)\le M$ барабарсыздыгы орундалса, анда $y=f(x)$ функциясы **төмөн жагынан** да **жогору жагынан** да **чектелген** функция деп аталат.

Эки жагынан тең чектелбеген **функция чектелбеген функция** деп аталат. Маселен $y=tgx$ эки жагынан тең чектелбеген функция болот.

5. Мезгилдүү функциялар

<u>Аныктама</u>. Эгерде x тин бардык маанилери үчүн $f(x+T)=f(x)$ барабардыгы орундалса, анда $y=f(x)$ функциясы мезгили Т болгон **мезгилдүү функция** деп аталат (мында Т ар кандай сан).

Бул барабардык аткарыла тургандай Т нын эң кичине оң мааниси $y=f(x)$ функциясынын **мезгили** деп аталат.

Бардык тригонометриялык функциялар мезгилдүү функциялар болуп эсептелет. Алардын ичинен $\sin x$ жана $\cos x$ функцияларынын эң кичине оң мезгили 2π, ал эми tgx жана $ctgx$ функцияларынын эң кичине оң мезгили π болот.

6. Татаал функциялар

<u>Аныктама</u>. Эгерде y өзгөрмөсү өз учурунда u өзгөрмөсүнөн көз каранды болсо, ал эми u өзгөрмөсү өз учурунда x аргументтен көз каранды болсо, анда y өзгөрмөсү **татаал функция** деп аталат жана $y = f(u(x))$ түрдө белгиленет.

Мисалы**: 1)** $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ болсо, анда $u = \dfrac{1-x}{1+x}$ болот.

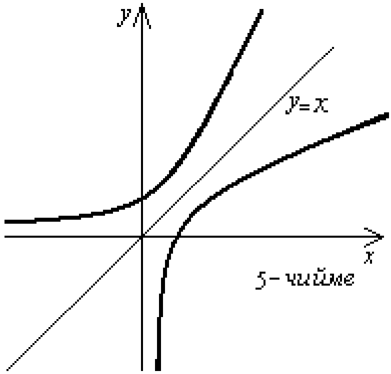
2) $y = \sqrt{\sin x}$ болсо, анда $u = \sin x$ болот.

3) $y = tg(3x-1)$ болсо, анда $u = 3x-1$ болот.

4) $y = \log_4 \sin x$ болсо, анда $u = \sin x$ болот.

7. Тескери функции

Эгерде берилген $y = f(x)$ функциясы кандайдыр бир айкын функция болуп, x аргументин y аркылуу туюнтууга мүмкүн болсо, анда $x = \varphi(y)$ функциясын алабыз жана өз учурунда бул функциялар өз ара тескери функциялар деп аталышат (5-чийме). Мисалы $y = \dfrac{x-1}{2}$ функциясы үчүн $y = 2x+1$ тескери функция болот.



5-чийме

Эгерде $y = f(x)$ функциясы бир маанилүү болуп, монотондуу өсүүчү же монотондуу кемүүчү болсо, анда ага тескери функция дайыма табылат жана ал тескери функция болуп монотондуу өсүүчү же монотондуу кемүүчү болот.

Тик бурчтуу координаталар системасында $y = f(x)$ жана $x = \varphi(y)$ функцияларынын графиктери бир эле график менен туюнтулат. Булардын биринчисинде x аргументтин берилген мааниси боюнча y ти аныктайбыз, экинчисинде болсо тескерисинче y тин берилген мааниси боюнча x ти аныктайбыз.

Өз ара тескери болгон функциялардын графиктери тик бурчтуу координаталар системасында $y=x$ функциясынын графигине карата симметриялуу жайгашат.

8. Айкын эмес түрдө берилген функциялар

Кээде функциялык көз карандылык y ке карата чыгарылбаган б.а. $F(x,y)=0$ теңдемеси түрүндө берилет. Мындай учурда x аргументтүү y функциясын, айкын эмес түрдө берилди деп аташат б.а. **айкын эмес** функция деп айтышат.

Мисалы айкын эмес функциялар болуп төмөнкү функциялар эсептелет: $3x^2-y^2+xy-4=0$,

$x^2+y^2-3xy+y-x=0$, $x^2+y^2-3xy=0$ ж.б.

9. Параметрдик түрдө берилген функциялар

Кээде x жана y өзгөрмөлөрүнүн арасындагы көз карандылык

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

түрдө берилет. Бул учурдагы функциялык көз карандылыкты **параметрдик түрдө** берилди деп аташат.

Эгерде t параметрин жоюп, y ке карата чыгарууга мүмкүн болсо, анда $y=f(x)$ түрүндөгү айкын теңдемеге келебиз. t параметрине каалагандай маанилерди берип, x жана y ти аныктасак, алар биригип тегиздикте белгилүү бир чекитти аныктайт. Мындай чекиттерди улам туташтырып чыксак, анда тегиздикте (1) функциялык көз карандылыктын графигине ээ болобуз.

10. Функциянын графиги

$y=f(x)$ функциясынын графиги деп, берилген функциялык көз карандылыкты канаттандыруучу тегиздиктеги $M(x,f(x))$ чекиттердин көптүгү аталат.

Функциянын графигин чийүүнүн жалпы схемасы

1) функциянын аныкталуу областын аныктоо.
2) функциянын жуп же так экендигин, мезгилдүүлүгүн тактоо.
3) функциянын графигинин координата октору менен кесилишкен чекиттеринин координатасын табуу.
4) функциянын графигинин асимптоталарын табуу.
5) функциянын монотондуу аралыктарын жана экстремумдарын табуу.
6) функциянын графигинин иймектик, томпоктук аралыктарын жана ийилүү чекитин табуу.
7) изилденип алынган маалыматтардын натыйжасын пайдаланып берилген функциянын графигин чийүү.

11. Функцияны 1-тартиптеги туундуну колдонуп экстремумга изилдөө.

1. Функциянын $f'(x)$ туундусун табуу.
2. Функциянын сыналуучу чекиттерин табуу б.а. $f'(x) = 0$ теңдемесин чыгаруу.
3. Сыналуучу чекиттер аркылуу функциянын аныкталуу областы бөлүнгөн аралыктардагы функциянын туундусунун б.а. $f'(x)$ тин белгисин аныктоо. Бул учурда x_0 сыналуучу чекит минимум чекит болот, эгерде ал чекиттин аймагында туунду белгисин $f'(x) < 0$ ден $f'(x) > 0$ ге өзгөрсө, ал эми x_0 сыналуучу чекит максимум чекит болот, эгерде ал чекиттин аймагында туунду белгиси $f'(x) > 0$ ден $f'(x) < 0$ ге өзгөрсө.
4. Экстремум чекиттердеги функциянын маанилерин эсептөө.

12. Функцияны 2-тартиптеги туундуну колдонуп экстремумга изилдөө.

1. Функциянын $f'(x)$ туундусун табуу.
2. Функциянын $f'(x) = 0$ барабардыгы аткарыла тургандай бардык сыналуучу чекиттерин табуу.
3. Функциянын экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундусун табуу.
4. Функциянын бардык сыналуучу чекиттердеги 2-тартиптеги туундусунун маанисин аныктоо. Эгерде бул учурда 2- тартиптеги туунду терс белгиде болсо, анда функция бул чекитте максимумга ээ болот, ал эми оң белгиде болсо, анда функция бул чекитте минимумга ээ болот. Эгерде 2- тартиптеги туунду $f''(x) = 0$ болсо, анда функциянын экстремумун 1-тартиптеги туундунун жардамында изилдөө керек.
5. Экстремум чекиттердеги функциянын маанилерин эсептөө.

2-§. Жөнөкөй элементардык функциялар

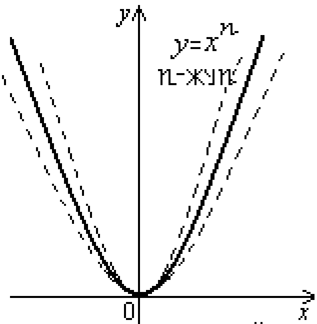
1. Даражалуу функция

<u>**Аныктама**</u>. **Даражалуу функция** деп, $y = x^n$ түрүндө берилген функция аталат (мында x-даражанын негизи, $n \in N$ -даража көрсөткүч, турактуу сан).

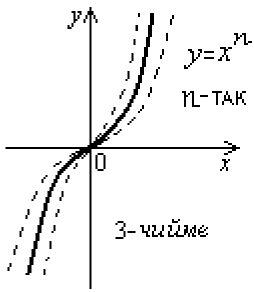
Мында $n = 1$, $n = 2$ болгон учурлары бизге мектеп курсунан белгилүү б.а. мындай учурда функция тиешелүү түрдө сызыктуу жана квадраттык функциялар деп аталышат. Демек, даражалуу функциялар бул функциялар менен кайсы бир денгээлде жалпы касиеттерге ээ.

Алардын графиктери координата башталышы аркылуу өтөт. n жуп болгондо анын графиги ОУ ордината огуна карата симметриялуу болот, жана n канчалык чоңойгон сайын, графиги ОУ огуна жакын жайгаша баштайт жана n канчалык кичине оң болсо, функциялардын графиктери ОУ огунан алыс жайгаша баштайт (2-чийме).

Ал эми n так болгондо функциялардын графиктери координата башталышына карата симметриялуу болот (3-чийме).



2-чийме



3-чийме

Негизги касиеттери.

а) Аныкталуу областы: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$,

б) Маанилеринин областы $E(y) = \{1\}$,

1) $y = x^n$, $n \in N$, n **-жуп болгондо:**

$D(y) = R$, $E(y) = [0; +\infty)$

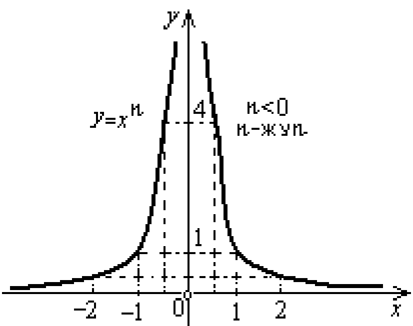
жуп функция болот (2-чийме).

2) $y = x^n$, $n \in N$, n **-так болгондо:**

$D(y) = R$, $E(y) = R$

так функция болот (3-чийме).

3) $n < 0$; **жуп болсо** (4-



4-чийме

чийме), $y = x^n$ функциясын:

а) Аныкталуу областы:

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

б) Маанилеринин областы

$E(y) = (0; \infty)$.

4) $n < 0$; **так болсо** (5-чийме),

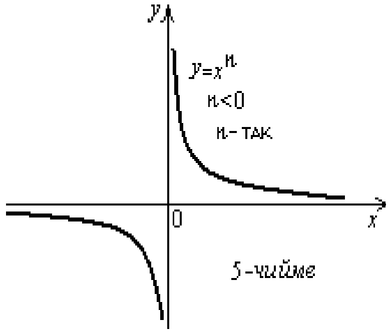
$y = x^n$ функциясын

а) Аныкталуу областы:

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

б) Маанилеринин областы

$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.



5-чийме

2. Бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функция

Даражалуу функциялардан түзүлгөн

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Функциясын **бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функция** деп айтабыз (мында $a_0, a_1, ..., a_n$ турактуу сандар, n-бүтүн оң сан). Бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функциялар аргументтин бардык маанилеринде аныкталган болушат. Мындагы бир мүчөлөрдүн эң чоңунун даражасы бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функциянын даражасы деп аталат.

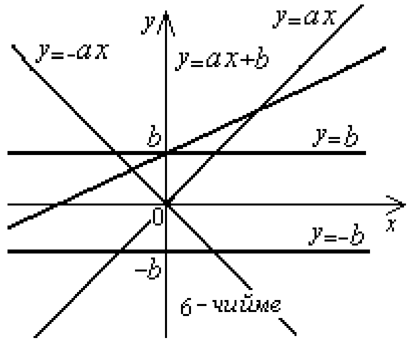
Бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функциялардын суммасы, айырмасы, көбөйтүндүсү жана тийиндиси да бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функциялар болушат.

3. Сызыктуу функция.

Аныктама. $y = ax + b$ түрүндө берилген функция **сызыктуу функция** деп аталат. Мында a, b кандайдыр бир чыныгы сандар. Сызыктуу функциянын графиги дайыма түз сызык болот (6-чийме).

Негизги касиеттери:

1) Аныкталуу областы $D(y) = R$, б.а. бүт чыныгы сандардын көптүгү.
2) Маанилеринин областы
   а) $a = 0$, $E(y) = b$,
   б) $a \neq 0$, $E(y) = R$, б.а. бүт чыныгы сандардын көптүгү.
3) Эгерде $a > 0$ болсо, анда функция өсүүчү болот.
4) Эгерде $a < 0$ болсо, анда функция кемүүчү болот.



6-чийме

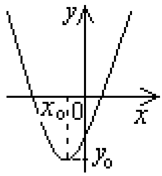
5) Функциянын экстремум мааниси жок.
6) $y = kx$ функциясы ($k > 0$), түз пропорционалдуу.
7) $y = ax + b$ функциясы жуп да эмес, так так да эмес функция.
8) Эгерде $a = 0$ болсо, анда функциянын графиги ОУ огун $y = b$ чекитте кесип өтүп, ОХ огуна параллель болот.
9) Эгерде $b = 0$ болсо, анда функция $y = ax$ түрүнө келет жана графиги координата башталышы аркылуу өтөт. Эгерде $a > 0$ болсо, анда функциянын графиги I жана III чейректерде жайгашат. Эгерде $a < 0$ болсо, анда функциянын графиги II жана IV чейректерде жайгашат.

4. Квадраттык функция.

<u>**Аныктама**</u>. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ түрүндөгү функция **квадраттык функция** деп аталат. Мындагы a, b, c кандайдыр бир чыныгы сандар.

Квадраттык функциянын графиги тегиздикте **парабола** деп аталган жана координата башталышы аркалуу өтүүчү ийри сызык эсептелет.

Эгерде $a > 0$ болгондо параболанын бутактары жогору карай багытталган болот (7-чийме).



7- чийме

Эгерде $a < 0$ болгондо параболанын бутактары төмөн карай багытталган болот (8-чийме). ($x_0; y_0$) –чекити параболанын чокусу деп аталат.

Негизги касиеттери:

а) $a > 0$ болгондо:

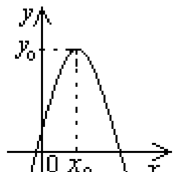
1. Функция $(-\infty; x_0]$ аралыгында кемийт, $[x_0; +\infty)$ де өсөт (7-чийме).

2. Аныкталуу областы $D(y) = R$ б.а. бардык чыныгы сандар. $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ функциянын минимум чекити, $y_0 = y(x_0)$ функциянын минимум мааниси (7-чийме).

3. Маанилеринин областы $E(y) = [y_0; +\infty)$.

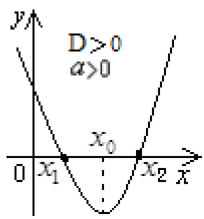
б) $a < 0$ болгондо:

1. Функция $(-\infty; x_0]$ аралыгында өсөт, $[x_0; +\infty)$ де кемийт.



8- чийме

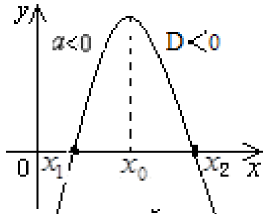
2. Аныкталуу областы $D(y) = R$ б.а. бардык чыныгы сандар. $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ функциянын максимум чекити, $y_0 = y(x_0)$ функциянын максимум мааниси (8-чийме).



9 - чийме

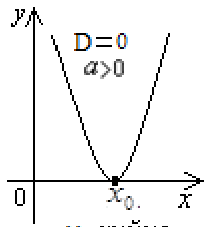
3. Маанилеринин областы $E(y) = (-\infty; y_0]$.

а) $D > 0$**,** $a > 0$ болсо, квадраттык үч мүчө x_1 жана x_2 тамырларга ээ болот. Бул функциянын графиги ОХ огун x_1 жана x_2 чекиттерде кесип өтөт дегени (9-чийме).



10-чийме

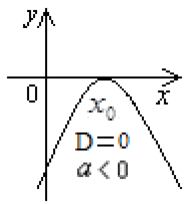
б) $D > 0$**,** $a < 0$ болсо, анда квадраттык үч мүчө x_1 жана x_2 тамырларга ээ. Функциянын графиги ОХ огун x_1 жана x_2 чекиттерде кесип өтөт (10-чийме).



11-чийме

в) $D = 0$**,** $a > 0$ болсо, квадраттык үч мүчө $x_1 = x_2$ болгон тамырга ээ болот.

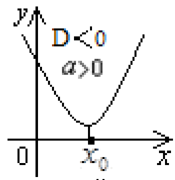
Функциянын графиги ОХ огун x_0 чекитинде жанып өтөт (11-чийме).



12-чийме

г) $D = 0$**,** $a < 0$ болсо, квадраттык үч мүчө $x_1 = x_2$ болгон тамырга ээ.Функциянын графиги ОХ огун x_0 чекитте жанып өтөт (12-чийме).

д) $D < 0$**,** $a > 0$ болсо, функциянын графиги ОХ огун кесип өтпөйт. Функциянын графиги ОХ огунун жогору жагында жатат (13-чийме).



13-чийме

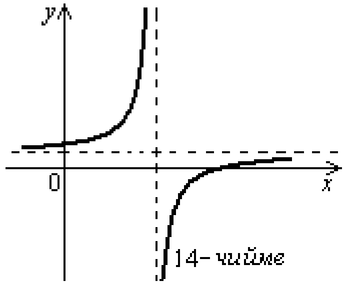
е) $D < 0$**,** $a < 0$ болсо, функциянын графиги ОХ огун кесип өтпөйт. Функциянын графиги ОХ огунун төмөн жагында жатат.

5. Бөлчөк-рационалдуу функция

Бүтүн көрсөткүчтүү рационалдуу функциялардын катышы **бөлчөк-рационалдуу функция**деп аталат жана $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ түрдө берилет. Мында $n\in Z,\quad m\in N$. Бул функция бөлүмү нөлгө айланбаган аргументтин бардык маанилеринде аныкталган болот.

Жекече учурлары: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$**,** $(ad-bc\neq 0)$**,** $y=\dfrac{k}{x}$**,** $k\neq 0$**.**

Бул $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ функциянын графигин тескери пропорционалдуу болгон $y=\dfrac{k}{x}$ функциясынын графигин ОХ жана ОУ октору боюнча тиешелүү түрдө параллель жылдыруу аркылуу алууга болот (14-чийме).



14-чийме

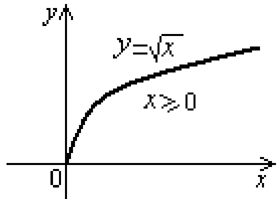
$y=\dfrac{k}{x}$ **функциясынын негизги негизги касиеттери:**

1) Аныкталуу областы: $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
2) Маанилеринин областы: $E(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
3) Эгерде $k>0$ болсо, функция $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ аралыкта кемүүчү болот, $k<0$ болсо, функция $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ аралыкта өсүүчү болот.
4) Функция экстремумга ээ эмес.
5) Так функция болуп эсептелет.
6) $x=0$ вертикалдык асимптота, $y=0$ горизонталдык асимптота.

6. Иррационалдык функция

Радикалдарды кармаган функциялар иррационалдык деп аталат.

<u>Аныктама</u>. Көз каранды эмес өзгөрмөнү (аргументти) радикал белгиси ичинде кармаган функция **иррационалдык функция**деп аталат жана $y = \sqrt{x}$ түрдө белгиленет (15-чийме).



15- чийме

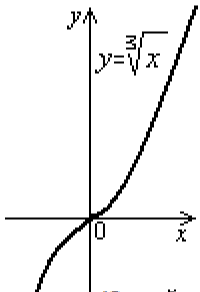
1) Аныкталуу областы
$D(y) = [0; +\infty)$.

2) Маанилеринин областы
$E(y) = [0; +\infty)$.

3) Функция экстремумга ээ эмес.

4) Функция жуп да, так да эмес.

7. $y = \sqrt[3]{x}$ функциясы.



16 - чийме

1) Аныкталуу областы
$D(y) = (-\infty; \ \infty)$.

2) Маанилеринин областы
$E(y) = (-\infty; \ \infty)$.

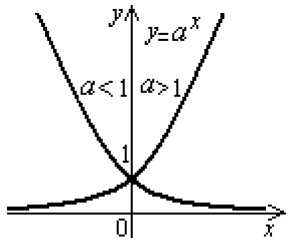
3) Функция экстремумга ээ эмес.

4) Так функция болуп эсептелет.

5) Функция өсүүчү болот (16- чийме).

8. Көрсөткүчтүү функция.

<u>Аныктама</u>. Белгисиз өзгөрмөнү даража көрсөткүчүндө кармаган функция көрсөткүчтүү функция деп аталат жана төмөнкүдөй белгиленет: $y = a^x$, $(a > 0; \quad a \neq 1)$ (17-чийме).



17 - чийме

а) Аныкталуу областы:

$D(y) = R = (-\infty;\ \infty)$

б) Маанилеринин областы

$E(y) = (0; \infty)$.

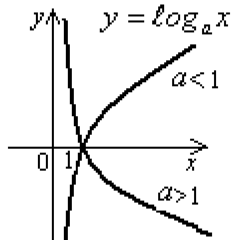
в) Экстремумга ээ эмес.

г) $a > 1$ болсо, функция өсүүчү,

$0 < a < 1$ болгондо функция кемүүчү болот, $x = 0$ болсо, функциянын графиги ОУ огун (0; 1) чекитте кесип өтөт.

9. Логарифмалык функция.

__**Аныктама**__. $y = \ell og_a x$, **(**$a > 0;\quad a \neq 1$**)** түрүндө берилген көз карандылык логарифмалык функция деп аталат (18-чийме).



18–чийме

.

а) Аныкталуу областы:

$D(y) = (0;\ \infty)$

б) Маанилеринин областы

$E(y) = R = (-\infty; \infty)$.

в) Экстремумга ээ эмес.

г) $a > 1$ болсо, функция өсүүчү, $0 < a < 1$ болгондо функция кемүүчү, $x = 1$ болсо, функциянын графиги ОХ огун (1; 0) чекитте кесип өтөт.

10. $y = \sin x$ функциясы

а) Аныкталуу областы: $D(y) = (-\infty;\ \infty)$ (19-чийме)

б) Маанилеринин областы $E(y) = [-1; 1]$.

в) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ аралыктарында кемүүчү функция.

г) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ аралыктарда өсүүчү функция

д) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ функциянын минимум чекиттери

е) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$ функциянын максимум чекиттери

ж) $y=-1$ функциянын минимуму

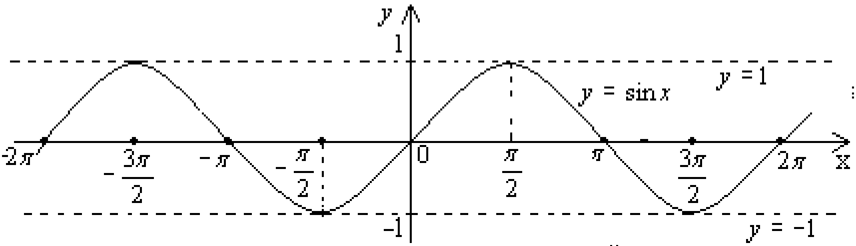
и) $y=1$ функциянын максимуму

з) $x=\pi k,\ k\in Z$ функциянын нөлдөрү

к) $x=2\pi$ функциянын эң кичине оң мезгили

л) $\sin(-x)=-\sin x$ демек, так функция

м) $(\sin x)'=\cos x$, функциянын туундусу



19-чийме

11. $y=\cos x$ **функциясы**

а) Аныкталуу областы: $D(y)=(-\infty;\ \infty)$ (20-чийме)

б) Маанилеринин областы $E(y)=[-1;1]$.

в) $[2\pi k;\pi+2\pi k]$ аралыктарында кемүүчү функция.

г) $[-\pi+2\pi k;\ 2\pi k]$ аралыктарында өсүүчү функция

д) $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$ функциянын минимум чекиттери

е) $x=2\pi k,\ k\in Z$ функциянын максимум чекиттери

ж) $y=-1$ функциянын минимуму

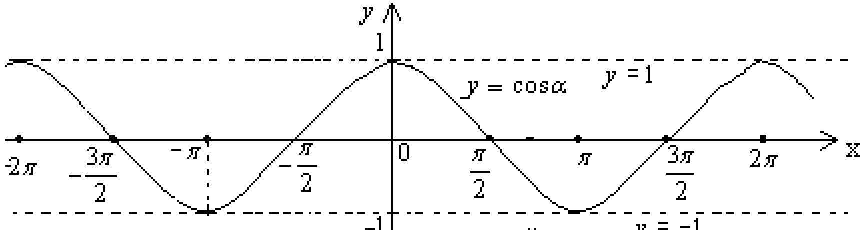
и) $y=1$ функциянын максимуму

з) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ функциянын нөлдөрү

к) $x = 2\pi$ функциянын эң кичине оң мезгили

л) $cos(-x) = \cos x$, функция жуп

м) $(\cos x)' = -\sin x$, функциянын туундусу



20-чийме

12. $y = tgx$ **функциясы**

а) Аныкталуу областы: $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in z$

б) Маанилеринин областы $E(y) = (-\infty; \infty)$, (21-чийме)

в) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in z$, аралыктарында өсүүчү функция.

г) функциянын минимум чекиттери жок

д) функциянын максимум чекиттери жок

и) функция минимумга ээ эмес

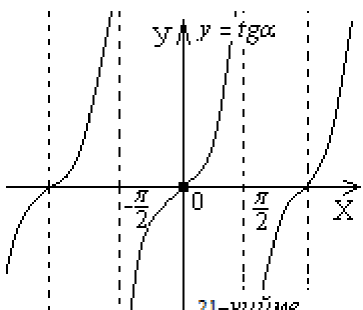
ж) функция максимумга ээ эмес

з) $x = \pi k$, $k \in Z$ функциянын нөлдөрү

л) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ вертикалдуу асимптотасы

к) $x = \pi$ функциянын эң кичине оң мезгили

л) $tg(-x) = -tgx$, функция так



21-чийме

м) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, функциянын туундусу

13. $y = ctgx$ **функциясы.**

а) Аныкталуу областы: $D(y): x \neq \kappa\pi$, $k \in N$ чекиттердин көптүгү (22-чийме)

б) Маанилеринин областы $E(y) = \left(-\infty ;\ \infty\right)$

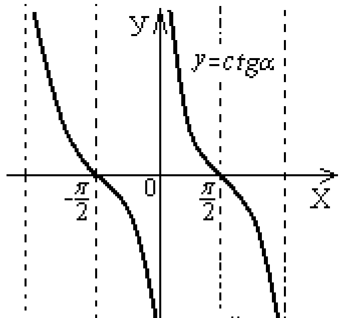
в) функциянын минимум чекиттери жок

г) функциянын максимум чекиттери жок

д) функция минимумга ээ эмес

е) функция максимумга ээ эмес

з) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ функциянын нөлдөрү



22-чийме

л) $x = \pi k$, $k \in Z$ вертикалдуу асимптотасы

к) $x = \pi$ функциянын эң кичине оң мезгили

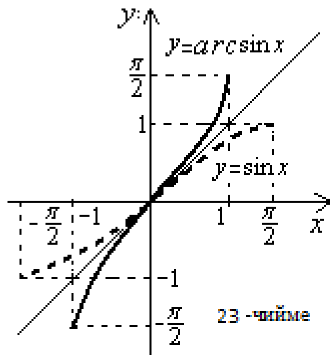
л) $ctg(-x) = -ctgx$, функция так

м) $(ctgx)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, функциянын туундусу

Тескери тригонометриялык функциялар

1. $y = \arcsin x$ функциясы.

Аныктама. $y = \sin x$ функциясына тескери болгон функция **арксинус функциясы** деп аталат жана $y = \arcsin x$ түрдө белгиленет (23-чийме).



23 -чийме

Негизги касиеттери:

1) Аныкталуу областы
$-1 \le x \le 1$.

2) Өзгөрүү областы
$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

3) Функция так
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

4) Функция монотондуу өсүүчү

5) Функциянын графиги ОХ жана ОУ окторун координата башталышында гана кесип өтөт.

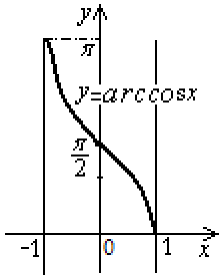
6) $y = \arcsin x = \begin{cases} 0 \le x \le 1, де \ge 0 \\ -1 \le x < 0, де < 0 \end{cases}$

7) $\sin[\arcsin x] = x$

8) $y = \arcsin x$ функциясы, $-1 \le x \le 1$ аралыгында жалгыз x=0 болгон чечимге ээ.

2. $y = \arccos x$ функциясы.

__Аныктама.__ $y = \arccos x$ функциясына тескери болгон функция **арккосинус функциясы** деп аталат жана $y = \arccos x$ түрдө белгиленет (24-чийме).



24-чийме

Негизги касиеттери:

1) Аныкталуу областы $-1 \le x \le 1$.

2) Өзгөрүү областы $0 \le y \le \pi$

3) Функция жуп да эмес, так да эмес.

4) Функция монотондуу кемүүчү

5) Функция ОХ огун (1; 0), ОУ огун $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ чекиттерде кесип өтөт.

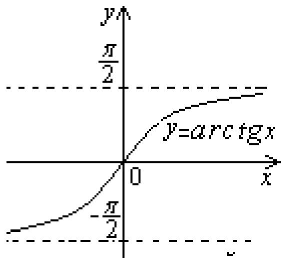
6) Функция $-1 \le x \le 1$ аралыгында оң б.а. $\arccos x > 0$

7) Функция $-1 \le x \le 1$ аралыгында жалгыз x=1 болгон чечимге ээ. $y = \arccos x$ функциясы терс маанилерди албайт.

8) $\cos(\arccos x) = x$

3. $y = arctgx$ функциясы.

<u>**Аныктама.**</u> $y = tgx$ функциясы на тескери болгон функция **арктангенс функциясы** деп аталат жана $y = arctgx$ түрдө белгиленет.



25-чийме

Негизги касиеттери:

1) Аныкталуу областы $-\infty < x < \infty$.

2) Өзгөрүү областы $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

3) Функция так. $arctg(-x) = -arctgx$.

4) Функция монотондуу өсүүчү

5) Функциянын графиги OX жана OУ окторун координата башталышында кесип өтөт.

6) Эгерде $-\infty < x < 0$ болсо, анда $arctgx < 0$; эгерде $0 < x < \infty$ болсо, анда $arctgx > 0$ болот.

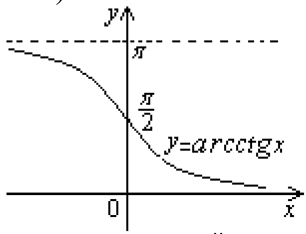
7) $tg(arctgx) = x$

8) $y = \frac{\pi}{2}$ жана $y = -\frac{\pi}{2}$ сызыктары функциянын графигинин горизонталдык асимптоталары (25-чийме).

4. $y = ctgx$ функциясы.

<u>**Аныктама**</u>. $y = ctgx$ функциясына тескери болгон функция **арккотангенс функциясы** деп аталат жана

$y = arcctgx$ түрдө белгиленет (26-чийме).



26-чийме

Негизги касиеттери:

1) Аныкталуу областы
$-\infty < x < \infty$.

2) Өзгөрүү областы
$0 < y < \pi$

3) Функция жуп да эмес, так да эмес.

4) Функция монотондуу кемүүчү

5) Функция ОУ огун $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ чекитте кесип өтөт. ОХ огу, $x \to +\infty$ умтулганда; $y = \pi$ сызыгы $x \to -\infty$ умтулганда функциянын горизонталдык асимптоталары болушат.

6) $y = arcctgx$ функциясы үчүн $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.
$y = arcctgx$ функциясы терс маанилерди албайт.

7) $ctg(arcctgx) = x$

3-§. Көп аргументтүү функциялар

1. Көп аргументтүү функциялар жөнүндө.

Бир өзгөрмөдөн көз каранды болгон функциялар жаратылышта кездешүүчү бардык көз карандалыктарды өзүнө камтый албайт.

Турмушта эки же андан көп өзгөрмөдөн көз каранды болгон функциялар көп кездешип келет. Мисал келтирсек:
1) тик бурчтук формага ээ болгон аянт анын узундугунан жана туурасынан көз каранды, б.а. эгерде s менен анын аянтын, a менен узундугун, b менен туурасын белгилесек, анда аянт $s = s(ab)$ эки өзгөрмөдөн көз каранды болгон функция болот.
2) тик бурчтуу параллелопипеддин көлөмү үч өзгөрмөдөн көз каранды болгон $V = V(abc)$ функция болот.

Ушул эле сыяктуу убакыттан да көз каранды болгон мейкиндиктеги физикалык кубулуштардын болуп өтүшү x, y, z жана t сыяктуу төрт өзгөрүлмө чоңдуктарынан көз каранды болгон функция болот. Жогоруда келтирилген сыяктуу жаратылыштын закон ченемдүүлүктөрүн изилдөө үчүн көп аргументтүү функциялар түшүнүгү киргизилет.

1-аныктама. Эгерде Евклиддик n өлчөмдүү R_n мейкиндигиндеги $\{M\}$ көптүгүнүн ар бир $x \in R_n$ чекитине белгилүү болгон закондун негизинде кандайдыр бир сан $y \in \{Y\} \subset R$ туура келсе, анда $\{M\}$ көптүгүндө $y = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ функциясы аныкталган деп айтабыз. Мындагы $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ аргумент, y функция жана $\{M\}$ көптүгү f функциясынын аныкталуу областы, ал эми $\{Y\}$ функциянын маанилеринин областы. Мисалы: $z = 1 - x + 2y$, $z = x^2 + y^2$, $z = x^3 + y^3$ ж.б. Эгерде $n = 2, 3$ болсо, анда биз тийиштүү түрдө эки жана үч аргументтен көз каранды функцияны алабыз.

2-аныктама. Эгерде x жана y тин кайсы бир жуп түгөй маанилерине кандайдыр бир закондун же эреженин негизинде z өзгөрмөсүнүн аныкталган бир мааниси туура келсе, анда z өзгөрмөсү көз каранды эмес эки өзгөрмөдөн функция деп аталат.

Эки өзгөрмөдөн функциялар деле бир өзгөрмөлүү функциялар сыяктуу түрдүү жолдор менен берилет. Биз мында аналитикалык жол менен (б.а. формула аркалуу) берилген функцияларга токтолобуз.

G көптүгүндөгү x жана y түгөй маанилеринин кабыл алууга мүмкүн болгон маанилеринин көптүгү z функциясынын аныкталуу областы же функциянын жашоо областы деп аталат. Ал эми функциянын аныкталуу областынан алынган маанилерге туура келген z тин маанилеринин көптүгү анын маанилеринин областы деп аталат. Мындагы x жана y өзгөрмөлөрү z функциясынын аргументи деп аталат. Эки өзгөрмөлүү функциялар символикалык түрдө $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ $z = z(x, y)$ ж.б. сыяктуу белгиленет.

1-мисал. $z = 1 - x - y$ функциясынын аныкталуу областы болуп бардык (x, y) түгөй сандарынын көптүгү эсептелет б.а. бүткүл xOy тегиздиги, ал эми функциянын маанилеринин областы болуп $(-\infty; +\infty)$ аралыгы саналат.

1-мисал. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функциясынын аныкталуу областы болуп $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ барабарсыздыгын канааттандыруучу тегиздиктин бардык (x, y) түгөй чекиттеринин көптүгү эсептелет, б.а. сыртынан $x^2 + y^2 = 1$

айланасы жана анын ички чекиттеринен турган тегерек эсептелет.

2. Эки өзгөрмөлүү функциялардын геометриялык сүрөттөлүшү

Бир өзгөрмөдөн көз каранды болгон функциялар тегиздикте $y = f(x)$ теңдемеси менен аныкталуучу сызыкты сүрөттөрү бизге белгилүү. Ал эми эки өзгөрмөдөн көз каранды болгон функциялар мейкиндикте $z = f(x, y)$ теңдемеси менен аныкталуучу бет менен сүрөттөлөт.

Берилүүчү функциянын өзүнүн формуласы бул беттин теңдемеси болот.

Аналитикалык геометрия курсунан бизге бир канча беттердин теңдемелери белгилүү. Мисалы $z - 2x + 5y + 10 = 0$ тегиздиктин теңдемеси, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ борбору координата башталышында жайгашкан, радиусу R=1 ге барабар болгон сферанын теңдемеси болот.

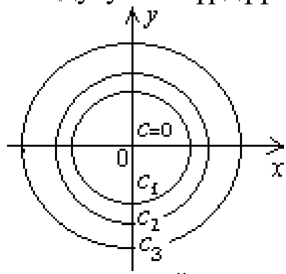
G областындагы аныкталган эки өзгөрмөлүү $z = f(x, y)$ функциясынын графиги деп, G областына таандык (x, y) жана $z = f(x, y)$ болгон мейкиндиктеги (x, y, z) чекиттеринин көптүгү аталат.

Мындай графиктер кандайдыр бетти элестетет. Ошентсе да эки өзгөрмөлүү функциялардын графигин чийип көрсөтүү көпчүлүк учурларда кыйынчылыкты жаратып келет. Ошого байланыштуу эки өзгөрмөүү функциялардын графигин үч өлчөмдүү мейкиндикке кирбей туруп геометриялык жактан сүрөттөп көрсөтүү ыңгайлуу. Сүрөттөп көрсөтүүнүн куралы болуп *денгээл сызыктары* эсептелет. xOy тегиздигиндеги бардык (x, y) чекиттерде $f(x, y)$ бир эле мааниге ээ болгон чекиттерди б.а. $f(x, y) = c$ жайгаштырабыз. Мына ошондой чекиттердин топтомдору денгээл сызыктар деп аталат. $f(x, y) = c$ теңдемеси эки өзгөрмөүү функциялардын графигин берет.

Бул теңдемеге түрдүү маанилерди берип жана ар бир учурда пайда болгон сызыктарды сызып денгээл сызыктардын топтомдорун алабыз. Мына ушул топтом сызыктар $f(x, y)$ функциясынын сүрөттөп берет.

Мисалы: $z = x^2 + y^2$ функциясынын денгээл сызыктарын сызгыла.

Чыгарылышы. $z = x^2 + y^2$ бетин $z = c$ $(0 \leq c < +\infty)$ тегиздиги менен кесебиз. Мында c чоңдугуна түрдүү маанилерди мисалы $c = 0, 1, 2, 3, ...$ берип, айлананы сүрөттөөчү денгээл сызыктардын топтомдорун алабыз. $c = 0$ болгондо айлана $(0, 0)$ болгон чекитке айланат (1-чийме). Мындан, денгээл сызыктар борбору координата башталышында жаткан айлананы сүрөттөгөндүктөн берилген функциянын графиги Oz огунун айланасында айлануудан пайда болгон бет болушу мүмкүн. Чынында эле аналитикалык геометриядан белгилүү болгондой $z = x^2 + y^2$ айлануудан пайда болгон параболоидди берет.



1-чийме

3. Эки өзгөрмөлүү функциялардын предели

Аныктама. Эгерде каалагандай $M_1, M_2, \dots, M_n$ чекиттеринен турган удаалаштык $M_0(x_0, y_0)$ чекитине жыйналуучу болсо, анда A саны $z = f(x, y) = f(M)$ функциясынын $M_n \to M_0$ кездеги предели деп аталат жана символикалык түрдө жазылат:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{же} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Мисалы. $f(x, y) = x^2 + y^2$ функциясынын $M_0(1; 2)$ чекитиндеги пределин тапкыла.

Чыгарылышы. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n{}^2+y_n{}^2)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n{}^2+\lim\limits_{n\to\infty}y_n{}^2=1^2+2^2=5$.

Эгерде берилген функция көрсөтүлгөн чекитте пределге ээ болбосо, анда функциянын предели төмөнкүдөй табылат:

Мисалы $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ функциясы $x+y=0$ сызыгында жаткан чекиттерден башка бүткүл чекиттердин көптүгүндө аныкталган болот.

Аныктама. Эгерде каалагандай $\varepsilon>0$ саны үчүн $0<\rho(M;M_0)<\delta$ шарты аткарыла тургандай $\delta>0$ саны табылып, $|f(M)-A|<\varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда A саны $z=f(M)$ функциясынын M_0 чекитиндеги **предели** деп аталат.

Логикалык символдорду пайдаланып жогорудагы сүйлөмдү төмөнкүдөй жазып алсак болот:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall M\in\{M\},0<\rho(M;M_0)<\delta:|f(M)-A|<\varepsilon\right).$$

4. Эки өзгөрмөлүү функциялардын үзгүлтүксүздүгү

1-аныктама. Эгерде берилген M_0 чекиттеги функциянын предели жашап жана ал бул чекиттеги функциянын маанисине барабар болсо, анда $z=f(M)$ функциясы M_0 чекитте үзгүлтүксүз деп аталат.

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=f(M_0) \quad \text{же} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

2-аныктама. Эгерде берилген чекиттеги функциянын толук өсүндүсү $M\to M_0$ кезде чексиз кичине болсо, анда $z=f(M)$ функциясы M_0 чекитте үзгүлтүксүз деп аталат б.а.

$$\lim_{M\to M_0}\Delta z=\lim_{M\to M_0}\left[f(M)-f(M_0)\right]=0 \quad \text{же} \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

Мисалы. $z = x^2 + y^2$ функциясы каалагандай $(x; y)$ чекиттерде үзгүлтүксүз экендигин көрсөткүлө.

Чыгарылышы. Функциянын $(x; y)$ чекиттеги толук өсүндүсү төмөнкүчө:

$$\Delta z = \left[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2\right] - (x^2 + y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Чынында эле $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болсо, $\Delta z \to 0$ экендиги көрүнүп турат. Демек, 2-аныктаманын негизинде функция үзгүлтүксүз болот.

5. Көп өзгөрмөлүү функциялардын жекече туундулары жана дифференциалы

1) Жекече туундулар

Көп өзгөрмөлүү функциянын берилген чекиттеги кайсы бир өзгөрмөсү боюнча жекече туундусу деп, кадимки эле ошол өзгөрмө боюнча алынуучу туунду аталат, калган өзгөрмөлөр турактуу деп эсептелгенде.

Мисалы: Эки өзгөрмөлүү $z = f(x, y) = f(M)$

функциясынын $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги жекече туундусу төмөнкүдөй аныкталат:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

эгерде бул предел жашаса. Мындагы

$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ жана

$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

чоңдуктары z функциянын x жана y өзгөрмөлөрү боюнча жекече өсүндүлөрү деп аталат. Жекече туундулардын башкача белгилөөлөрүн келтирүүгө болот:

$$z'_x, \qquad \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0;y_0), \qquad f'_x(x_0;y_0),$$

$$z'_y, \qquad \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0;y_0), \qquad f'_y(x_0;y_0).$$

Эки өзгөрмөлүү функциянын x жана y өзгөрмөлөрү боюнча жекече туундусу: $f'_x(x_0;y_0)$ жана $f'_y(x_0;y_0)$ жекече туундулары $z = f(x,y)$ бети менен $y = y_0$, $x = x_0$ тегиздиктеринин кесилишүү сызыгына жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентин билдирет.

2) Толук дифференциал

Эки өзгөрмөлү $z = f(x,y)$ функциясынын $(x_0;y_0)$ чекитиндеги x жана y өзгөрмөлөрүнүн Δx жана Δy өсүндүлөрүнө туура келүүчү функциянын **толук өсүндүсү** деп

$$\Delta z = \Delta f(x_0;y_0) = f\,(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0) \qquad (1)$$

туюнтмасы аталат. Эгерде (1) туюнтманы төмөнкүдөй түрдө жазып алууга мүмкүн болсо:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\,(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta\,(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

мында A жана B Δx жана Δy өсүндүлөрүнөн көз каранды эмес, ал эми Δx жана Δy нөлгө умтулганда $\alpha\,(\Delta x, \Delta y)$ жана $\beta\,(\Delta x, \Delta y)$ да нөлгө умтулса, анда $z = f(x,y)$ функциясы $(x_0;y_0)$ чекитинде **дифференцирленүүчү** функция деп аталат жана фунциянын башкы бөлүгү болгон $A\Delta x + B\Delta y$ бул функциянын $(x_0; y_0)$ чекитиндеги **толук** дифференциалы деп аталат жана символикалык түрдө dz менен белгиленет:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \qquad (2)$$

$z = f(x, y)$ функциясы $(x_0; y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү экендигинен берилген функция $(x_0; y_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз экендиги келип чыгат.

Функциясы $(x_0; y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү экендигинен, $z = f(x, y)$ функциясынын $(x_0; y_0)$ чекитинде жекече туундуга ээ болоору келип чыгат.

3) Татаал функциянын туундусу жана дифференциалы

$z = f(x, y)$ функциясы берилген дейли, мында $x = \varphi(t)$ жана $y = \psi(t)$ болсун. Анда z бир гана t өзгөрмөдөн функция болуп калат. Айталы z'_x, z'_y үзгүлтүксүз жана $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ жашайт дейли. $\frac{dz}{dt}$ табалы. Аны үчүн t өзгөрмөгө Δt өсүндүн беребиз. Анда x, y андан соң z өзүнүн өсүндүлөрүн Δx, Δy жана Δz алышат. Дифференцирлөөнүн жетиштүү шартынын негизинде

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

мындан $\dfrac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\dfrac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$

эми $\Delta t \to 0$ умтулсак, анда Δx , Δy да нөлгө умтулат, себеби x, y функциялары үзгүлтүксүз, ошо себептен α, β да нөлгө умтулат.

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}.$$

Кыскача $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (*)$$

(*) формуласы **татаал функциянын** туундусу деп аталат.

Мисалы: Эгерде $z = xy$, мында $x = t\cos 2\tau$, $y = t^2\tau$ болсо, анда $z'_t = y\cos 2\tau + 2xt\tau$, $z'_\tau = -2yt\sin 2\tau + xt^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2\frac{\partial z}{\partial t} \qquad \text{жана} \qquad \frac{\partial z}{\partial \tau} = 2\frac{\partial z}{\partial \tau}$$

Мисалы. $z = f(x, y)$**,** $x = t^3 + 2$**,** $y = 3t^2 - 1$ берилген. (*) формуланы колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y}12t^3.$$

4) Айкын эмес функция жана аны дифференцирөө

Бизге белгилүү болгондой эгерде теңдеме бир x өзгөрмөдөн функция түрүндө берилип y өзгөрмөгө карата туюнтулбаса, анда функция ***айкын эмес*** функция деп аталат. Теңдемени y өзгөрмөгө карата туюнтсак, анда айкын түрдөгү функцияны алабыз. Бирок дайыма эле теңдемени y өзгөрмөгө карата туюнта албайбыз.

Мисалы: $2^y - 2y + x^2$-1=0 теңдемесин y өзгөрмөгө карата чыгарууга болбойт.

Мындай теңдемелерди барабардыктын бир жагына алып өтүп жалпысынан $F(x, y) = 0$ түрдө жазып алабыз.

Эми $F(x, y) = 0$ түрдөгү айкын эмес функцияны y өзгөрмөгө карата чыгарбай туруп дифференцирлөө маселесин карайлы. Аны үчүн теңдештике татаал функцияны дифференцирлөө эрежесин колдонуп төмөнкүнү алабыз:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Мындан $F'_x(x, y) \neq 0$ экенинен айкын эмес функциянын туундусу келип чыгат:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{2}$$

Мисалы: Мейли функция $e^{xy} - x - y = 0$ түрдө берилсин. $\frac{dy}{dx}$ тапкыла.

Чыгарылышы. $F(x, y) = e^{xy} - x - y$ үчүн, $F'_x = ye^{xy} - 1$, $F'_y = xe^{xy} - 1$ алабыз. Эми (2) формуланын негизинде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}$$ ээ болобуз.

Мисалы. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ теңдемеси менен берилген айкын эмес z функциясынын жекече туундусун тапкыла.

Чыгарылышы. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$ формулаларды пайдалансак, анда: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$.

6. Эки өзгөрмөлүү функциянын экстремуму

1) Экстремумдун жашасынын зарыл шарты

Максимум жана минимум түшүнүктөрүн көп өзгөрмөлүү функциялар үчүн деле таратсак болот. Биз эки өзгөрмөлүү функциялар үчүн келтирели.

$z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитте максимумга (минимумга) ээ болот деп айтышат, эгерде M_0 чекитинин аймагынан алынган каалагандай $M(x,y)$ чекити үчүн (M_0 чекитинен башка) төмөнкү барабарсыздык аткарылса:

$f(x_0, y_0) > f(x,y) \qquad (f(x_0,y_0) < f(x,y))$,

же $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0 \qquad (\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) > 0)$

Теорема (экстремумдун жашасынын зарыл шарты).

Эгерде $z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде экстремумга (максимумга, минимумга) ээ болсо жана анын жекече туундулары z'_x *жана* z'_y жашаса, анда

$$f'_x(x_0, y_0) = 0\ , \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (1)$$

Мисалы. $z = x^3 + y^3 = 0$, $z'_x = 3x^2$, $z'_y = 3y^2$.

Функциянын жекече туундулары (0;0) чекитте нөлгө барабар экени көрүнүп турат, бирок функциянын экстремумга (0;0) чекитте ээ болбойт. Себеби (0;0) чекитинин каалагандай аймагында функция түрдүү белгиге ээ жана (0;0) чекитте функция нөлгө айланат.

2) Экстремумдун жашасынын жетиштүү шарты

Теорема (экстремумдун жашасынын жетиштүү шарты).

Мейли $z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинин аймагында өзүнүн 1- жана 2- тартиптеги жекече туундулары менен бирге үзгүлтүксүз болсун жана

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \ , \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (1)$$

шартын канааттандырсын.

$$A = f''_{x^2}(M_0)\,, \quad B = f''_{xy}(M_0)\,, \quad C = f''_{y^2}(M_0)\,, \quad D = AC - B^2$$

белгилөө киргизели. Анда $z = f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0, y_0)$ чекитинде: 1) минимумга ээ болот, эгер $D = AC - B^2 > 0$ жана $A > 0$ болсо,

2) максимумга ээ болот, эгер $D = AC - B^2 > 0$ жана $A < 0$ болсо,

3) экстремумга ээ болбойт, эгер $D = AC - B^2 < 0$.

Мисалы. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ функцияны экстремумга изилдегиле.

Чыгарылышы. Алгач анын жекече туундуларын табабыз:

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2\,, \ z'_y = 3y^2 - 3x\,.$$

Бул жекече туундулар $M_0(0,0)$ жана $M_1(1,1)$ чекиттерде нөлгө айланат. Ал эми экинчи тартиптеги туундулары

$$z''_{xx} = 6x\,, \ z''_{xy} = -3\,, \ z''_{yy} = 6y$$

барабар. $M_0(0,0)$ чекитинде $D = -(-3)^2 = -9 < 0$ болгондуктан, функция бул чекитте экстремумга ээ болбойт.

$M_1(1,1)$ чекитинде $D = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$ жана мында $A = 6 > 0$ болгондуктан, функция бул чекитте минимумга ээ болот.

Колдонулган адабияттар

1. В.В.Зайцев и др. Элементарная математика Изд. М. “Наука” 1976.
2. В.Г.Болтянский и др. Лекции и задачи по элементарной математике. Изд. М. “Наука” 1972.
3. В.В.Зайцев и др. Сборник конкурсных задач по математике для поступаюших во втузы. М. “Высшая школа” 1980.
4. М.И.Абрамович, М.Т.Стародубцев. Математика геометрия и тригонометрические функции. М. “Высшая школа” 1976.
5. Н.Я.Виленкин и др. Алгебра жана математикалык анализ. Бишкек. Кыргызстан 1995.
6. «Математика» кыскача энциклопедия. Бишкек-1991.
7. А. Бөрүбаев, ж.б. Математикалык анализ. 1-2-бөлүм. Б. 2002.
8. И.И.Баврин. Курс высшей маематики. М.1992.
9. В.С.Шипачев. Высшая математика. М. 1996.

Мазмуну

3-§. Көп аргументтүү функциялар