УДК.517.956+517.956.3

Илиясова Г.Б., Бекежанова А.А.
Казахский государственный женский педагогический университет, г. Алматы, Республика Казахстан

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ

В работе методом Фурье изучаются вопросы разрешимости нелокальных задач для гиперболического и эллиптического уравнений. На основании результатов данной работы создан пакет прикладных программ с использованием системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: *метод Фурье, нелокальные задачи для гиперболического уравнения, нелокальные задачи для эллиптического уравнения.*

In this article Fourier's method studies questions of resolvability of non-local problem for the hyperbolic and elliptic equations. On the basis of results of this work the package of applied programs with use of system of computer mathematics of Maple is created.

Keywords: *Fourier's method, non-local problem for the hyperbolic equation, non-local problem for the elliptic equation.*

§ 1. Постановка задачи

В области $D=\{(x,t): 0<x<l,\ 0<t<T_0\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t) \qquad (1)$$

Задача Г. Найти решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad 0\le x\le l \qquad (2)$$

$$u_t(x,0)=\nu(x), \qquad 0<x<l \qquad (3)$$

и нелокальным условиям

$$u(0,t)=a\cdot u(l,t), \qquad 0\le t\le T \qquad (4)$$

$$u_x(0,t)=b\cdot u_x(l,t), \qquad 0\le t\le T \qquad (5)$$

где $a,\ b$ – заданные действительные числа. $\tau(x), \nu(x)$ и $f(x,t)$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласованности

$\tau(0)=a\cdot\tau(l), \qquad \tau'(0)=b\cdot\tau'(l)$.

Регулярным решением задачи (1)-(5) назовем такую функцию $u(x,t)$, которая 1) непрерывна в $\bar{D}$; 2) обладает в области D непрерывными производными до второго порядка по t и x; 3) удовлетворяет уравнению (1) с условиями (2)-(5) в обычном классическом смысле.

Класс задач (1)-(5) широк и разнообразен. Сюда включаются, например, задачи со смешанными краевыми условиями, периодическими условиями и т.д.

Отметим, что к задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями посвящена статья [1]. Близкие задачи рассматривались в работах [2, 3]. Решение задачи Г в силу ее линейности может быть представлено в виде суммы решений задачи Г$_1$ $(f(x,t)\equiv 0,\ \tau(x)\neq 0,\ \nu(x)\neq 0)$ и задачи Г$_2$: $(f(x,t)\neq 0,\ \tau(x)=\nu(x)=0)$.

Будем искать, частное решение задачи Г$_1$ в виде $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$. Подставляя эту форму в решение урвнения (1) (при $f(x,t)\equiv 0$) и нелокальные условия (4)-(5), разделяя переменные, получаем задачу для нахождения собственных функций и собственных значений:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (6)$$

$$X(0)=a\cdot X(l) \qquad (7)$$

$$X'(0)=b\cdot X'(l) \qquad (8)$$

Функция $T(t)$ является решением уравнения:

$$T''(t)+\lambda T(t)=0 \qquad (9)$$

Обоснование метода Фурье (разделения переменных) приводит к следующей задаче: при каких условиях начальные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ разлагаются в ряд по собственным либо собственным и присоединенным функциям задачи (6)-(8)?

Известно, что базисность системы собственных (собственных и присоединенных) функций задачи (6)-(8) зависит от краевых условий.

Используя результаты работы [4], можно утверждать, что система собственных и присоединенных (если они имеются) функций задачи (6)-(8) будет образовывать базис Рисса, если краевые условия (7)-(8) являются усиленно регулярными.

Напомним, что нелокальные условия (7)-(8) будут усиленно регулярными, если числа θ_{-1} и θ_1 отличны от нуля и, кроме того, выполняется соотношение [4] вида

$$\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0.$$

Числа θ_{-1}, θ_0, θ_1 находятся из равенства

$$\frac{\theta_{-1}}{S} + \theta_0 + \theta_1 S = -i(a+b)\left(S + \frac{1}{S}\right) + 2i(1+ab).$$

Отсюда видно, что условия (7)-(8) усиленно регулярны, если

$$|1+ab| \neq |a+b|, \qquad a+b \neq 0.$$

§ 2. Нахождение последовательности собственных и присоединенных функций задачи Г. Биортогонально сопряженная последовательность функций.

Нелокальная кравая задача (6)-(8) является несамосопряженным. Представим задачу (6)-(8) в виде

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \cos\alpha \cdot X(0) = \sin\alpha \cdot X(l) \\ \cos\beta \cdot X'(0) = \sin\beta \cdot X'(l) \end{cases} \qquad (10)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Сопряженный к задаче (10) будет следующая задача:

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0 \\ \sin\beta \cdot Y(0) = \cos\beta \cdot Y(l) \\ \sin\alpha \cdot Y'(0) = \cos\alpha \cdot Y'(l) \end{cases} \qquad (11)$$

В самом деле

$$\int_0^l [X''(x) + \lambda X(x) \cdot Y(x)]dx - \int_0^l X(x) \cdot [Y''(x) + \lambda Y(x)]dx =$$

$$= X'(l)Y(l) - X'(0)Y(0) - Y'(l)X(l) + Y'(0)X(0).$$

Отсюда видно, чтоправая часть полученного соотношения равна нулю, если выполняются условия (7)-(8) и $b \cdot Y(0) = Y(l)$

$$a \cdot Y'(0) = Y'(l)$$

Нетрудно, установить что задача (10) имеет собственные значения:

$$\lambda_k = \mu_k^2 = \frac{1}{l^2}\left[\arccos\left(\frac{1+tg\alpha tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}\right) + 2k\pi\right]^2 \; k = 0,1,2\ldots \qquad (12)$$

и собственные функции

$$X_k(x) = \cos\mu_k x + \frac{1 - tg\alpha\cos\mu_k l}{tg\alpha \sin\mu_k l}\sin\mu_k x \qquad (13)$$

Задача (11) имеет собственные функции

$$Y_k(x) = \cos\mu_k x + \frac{\sin\mu_k l}{\cos\mu_k l - tg\alpha}\sin\mu_k x, \qquad (14)$$

где $tg\alpha + tg\beta \neq 0$.

<u>Лемма1.</u> Последовательности (13) и (14) образуют биортогональную на интервале (0,l) систему функций, так для любых номеров kиmвыполняется соотношение

$$(X_k(x), Y_m(x)) = \int_0^l X_k(x) \cdot Y_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m \\ q, & \text{если} \quad k = m \end{cases}$$

где

$$q = \frac{l \cdot (a^2-1)(a+b)}{2a(a+b-(1+ab))}.$$

Всправедливости леммы нетрудно убедится непосредственным вычислением с учетом (12)-(14).

Рассмотрим теперь второе уравнение (9) при $\lambda=\lambda_k$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t)=A_k\cos(\mu_k t)+B_k\sin(\mu_k t)$$

и решение основной задачи Γ_1 имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}X_k(x)T_k(t)= \qquad (15)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos(\mu_k\cdot t)+B_k\sin(\mu_k\cdot t)\right)\cdot\left(\cos(\mu_k x)+\frac{1-tg\alpha\cdot\cos\mu_k l}{tg\alpha\cdot\sin\mu_k l}\sin(\mu_k x)\right).$$

Удовлетворяя в (15) условию (2) имеем $\sum_{k=0}^{\infty}A_k X_k(x)=\tau(x)$.

Отсюда в силу леммы 1 находим $A_k=\frac{1}{q}\cdot\int_0^l\tau(x)\cdot Y_k(x)dx$.(16)

Аналогично, удовлетворяя в (15) условию (3) находим $B_k=\frac{1}{q\mu_k}\cdot\int_0^l\nu(x)\cdot Y_k(x)dx$. (17)

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$|1+ab|\neq|a+b|$, $a+b\neq 0$.

Если $\tau(x)\in C^4[0.l]$ и $\tau^{(p)}(0)=\tau^{(p)}(l)=0$ $p=0,1.2.3,$

$\nu(x)\in C^3[0,l]$ и $\nu^{(p)}(0)=\nu^{(p)}(l)=0$ $p=0,1.2$

тогда функция $u(x,t)$ определенная формулой (15), где коэффициенты A_k, B_k определяются по формулам (16) и (17) является регулярным решением задачи (1) –(5) при $f\equiv 0$.

Теперь рассмотрим задачу Γ_2, то есть задачу, когда $\tau(x)=\nu(x)=0$.

В этом случае для $T_k(t)$ имеем задачу

$$\begin{cases}T_k''(t)+\lambda_k T_k(t)=f_k(t)\\ T_k(0)=T_k'(0)=0\end{cases}$$

решение которой строится в квадратурах.

$$T_k(t)=\frac{1}{\mu_k}\int_0^t f_k(\theta)\sin\mu_k(t-\theta)d\theta,$$

где $f_k(t)=\frac{1}{q}\int_0^l f(x,t)Y_k(x)dx$.

Подставляя найденное выражение для $T_k(t)$ в ряд, $\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cdot X_k(x)$, (18)

мы получим решение задачи Γ_2, если ряд (18) и ряды полученные из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, равномерно сходятся. Можно показать, такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать, чтобы непрерывная функция $f(x,t)$ имела непрерывные частные производные по x до второго порядка и чтобы при всех значениях t выполнялось условие

$f(0,t)=f(l,t)=f_x'(0,t)=f_x'(l,t)=0$ (19)

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если $f(x.t)\in C_{x,t}^{2,0}(D)$ и выполнены условия (19), тогда функция $u(x,t)$, определенный рядом (18), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (4), (5) и начальным условиям $u(x,0)=u_t(x,0)=0$.

При этом возможно почленное двухкратное дифференцирование ряда (18) по x и t, и полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\le x\le l$ и любом t.

§ 3. Постановка задачи для уравнения Лапласа.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \tag{20}$$

в области D.

Задача DГ. Найти решение уравнения (20) удовлетворяющее нелокальным условиям

$$u(0,y)=a\cdot u(l,y), \qquad 0\le y\le T \tag{21}$$

$$u_x(0,y)=b\cdot u_x(l,y), \qquad 0\le y\le T \tag{22}$$

(21), (22) и краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \tag{23}$$

$$u(x,T_0)=\varphi_2(x), \tag{24}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные действительные функции, причем выполняются следующие условия согласования: $\varphi_1(0)=a\cdot\varphi_1(l)$, $\varphi_1'(0)=b\cdot\varphi_1'(l)$,

$$\varphi_2(0)=a\cdot\varphi_2(l), \qquad \varphi_2'(0)=b\cdot\varphi_2'(l).$$

В отличии от задачи Г в этом случае уравнение для функций $T_k(t)$ имеет вид: $T_k(y)-\mu_k^2T_k(y)=0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид: $T_k(y)=A_ke^{\mu_k y}+B_ke^{-\mu_k y}$.

Решение основной задачи $DГ$ будем искать в виде $u(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T_k(y)\cdot X_k(x)$. (25)

Используя условия (23) и (24) для определения коэффициентов A_k и B_k поступая как и ранее получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_k+B_k=\dfrac{1}{q}\cdot n_k \\ A_k\cdot e^{\mu_k\cdot T_0}+B_k\cdot e^{-\mu_k\cdot T_0}=\dfrac{1}{q}\cdot m_k \end{cases} \tag{26}$$

где $n_k=\int\limits_0^l\varphi_1(x)Y_k(x)dx$,

$$m_k=\int\limits_0^l\varphi_2(x)Y_k(x)dx.$$

Так как $\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\mu_kT} & e^{-\mu_kT}\end{vmatrix}=-2sh(\mu_kT_0)\neq 0$

система алгебраических уравнений (26) имеет единственное решение

$$A_k=-\frac{e^{-\mu_kT_0}n_k-m_k}{2q\cdot sh(\mu_kT_0)} \tag{27}$$

$$B_k=\frac{e^{\mu_kT_0}n_k-m_k}{2q\cdot sh(\mu_kT_0)} \tag{28}$$

Подставляя эти значения A_k и B_k в формулу (25) получим решение задачи $DГ$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия Теоремы 1. Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C^4[0,l]$ и $\varphi_1^{(p)}(0) = \varphi_2^{(p)}(l) = 0, \ \ p = 0.1.2.3$, тогда функция $u(x,y)$ определенная формулой

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{\mu_k \cdot y} + B_k e^{-\mu_k \cdot y}\right) \cdot \left(\cos(\mu_k x) + \frac{1 - tg\alpha \cdot \cos \mu_k l}{tg\alpha \cdot \sin \mu_k l} \sin(\mu_k x)\right),$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются по формуле (27) и (28) является регулярным решением задачи $D\Gamma$.

На основании вышеизложенных исследований создан пакет прикладных программ с использованием системы компьютерной математики Maple.

Литература:

1. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения. Т.15. №7, 1979. – С. 1284-1295.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. //Дифференциальные уравнения. Т. 13. № 2, 1977. – С. 294-304.
3. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. //Дифференциальные уравнения. Т. 15. № 7, 1979. – С. 1279-1283.
4. Кессельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов. //Известия ВУЗов. Серия математика. № 2 (39) 1964. – С. 82-93.
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969.